

电子信息类精品教材

# 信号与系统

(第4版)

徐天成 谷亚林 钱 玲 编著

電子工業出版社  
Publishing House of Electronics Industry  
北京 · BEIJING

## 内 容 简 介

本书系统论述了确定性信号与线性时不变系统的基本概念、基本理论与分析方法。从信号分析到系统分析、从连续到离散、从时域到变换域、从输入输出分析到状态变量分析,共包括9章内容。第1章引言,介绍信号与系统的基本概念及应用领域,第2、3章介绍连续时间信号的时域与变换域(傅里叶变换和拉普拉斯变换)分析,第4、5章介绍连续时间系统的时域与变换域分析,第6章介绍傅里叶变换的应用,第7、8章介绍离散时间信号与系统的时域与变换域分析,第9章介绍连续时间系统与离散时间系统的状态变量分析。每章最后介绍了与该章内容相关的MATLAB的内容。书中有较丰富的例题与习题,书后附有参考答案。

本书叙述通俗易懂、条理清晰,可作为高等院校通信工程、电子信息工程、自动控制及计算机等专业的信号与系统课程的教材,也可供有关科技人员参考。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

## 图书在版编目(CIP)数据

信号与系统 / 徐天成, 谷亚林, 钱玲编著. —4版. —北京: 电子工业出版社, 2012.7

电子信息类精品教材

ISBN 978-7-121-17341-7

I. ①信… II. ①徐… ②谷… ③钱… III. ①信号系统—高等学校—教材 IV. ①TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第125194号

责任编辑: 韩同平 特约编辑: 李佩乾

印 刷:

装 订:

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 21.25 字数: 560千字

印 次: 2012年7月第1次印刷

印 数: 3000册 定价: 45.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010)88254888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件至 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

服务热线: (010)88258888。

## 第 4 版前言

“信号与系统”课程主要研究确定性信号和线性时不变系统的基本概念和基本理论,包括信号的时域与频域分析,以及确定性信号经线性时不变系统传输与处理的基本分析方法。该课程是通信工程、电子信息工程、自动化及计算机等专业的一门重要的学科基础课。近几年来,这些学科的理论与实践都得到迅速的发展,分析方法也不断的更新。但是,据我们对国内外许多高等院校的调查,以及与国内外知名专家和同行的相互交流中,发现就本科生课程——信号与系统而言,其教学基本要求及教学内容上是相对稳定的,而市面上的同类教材所包含的内容、组织也大体相同,只是在结构框架、知识点排列次序以及对问题的阐述方法有所不同而已。

南京理工大学“信号与系统”课程于 2008 年被评为江苏省精品课程,本书是该课程的配套教材。在前 3 版教材使用的基础上,我们根据教学反馈情况,进行了进一步的修订,从而使教材不断适应学科的发展,教材体系更加具有合理性和科学性。与第 3 版教材相比,第 4 版教材在教学目的、教学要求及大部分教学内容等方面基本相同,但在某些内容、结构安排等方面做了如下修订:① 内容的组织和选取有了一些调整 and 变化。例如:在第 3 版的 2.4 节,介绍卷积积分时只是引出了卷积积分的计算公式,而将卷积积分的计算方法放在了第 4 章中介绍;同样在 7.1.3 节,介绍卷积和时也是只介绍卷积和的计算公式,而将卷积和的计算方法放在了第 8 章中介绍。这样的编排存在着计算公式与计算方法脱节的现象,为了弥补这方面的不足,在第 4 版教材中,对这方面的内容进行了整合,将卷积积分的计算方法放在了第 2 章叙述,同样将卷积和的计算方法放在了第 7 章叙述。② 纠正了第 3 版中的一些错误及不足之处,并修改了某些词语、语句及表述,使得语句更加精炼,更加具有可读性。③ 对部分例题和习题做了修改。

本书总体特点如下:

### (1) 信号部分与系统部分分开叙述

多数教材在结构上采用的是先连续、后离散,先时域、后变换域,先输入输出分析、后状态变量分析的分析方法,但不管是连续部分还是离散部分,都是将信号与系统穿插在一起分析的。而本教材虽然在大线条上也是按上述次序安排的,但在各板块中则是将信号与系统分开来叙述,采用先信号分析再系统分析的方法,这样使得信号与系统的脉络更加清晰。

### (2) 初步使用 MATLAB 验证信号和系统的基本理论

将计算机语言应用到“信号与系统”课程的教学中去,对课程的各知识点进行验证与仿真,大大提高了教学效率。目前,在国际流行的科技应用软件中, MATLAB 是应用最广泛的语言之一。它的特点是操作简单,人机交互性能好。基于这些原因,我们在本教材中补充了 MATLAB 在信号和系统应用方面的内容。

### (3) 突出了傅里叶变换的应用

傅里叶变换是信号处理的核心内容之一,本教材为了强调傅里叶变换应用的重要性和具体问题具体分析的科学工作态度,单独列出一章“傅里叶变换的应用”。

### (4) 规范了教材中的某些符号,与后续课程保持一致

针对目前国内相关教材和国外教材的不同译本,存在着符号使用上的混乱现象,我们觉

得有必要用科学的一致的方式, 将这些符号给予清晰, 并统一起来, 这样就方便了大家的使用。例如:

① 关于周期信号与非周期信号, 本书中将周期信号用  $\tilde{f}(t)$  来表示, 而非周期信号仍用  $f(t)$  来表示, 这样从符号上就能清楚地区分周期信号与非周期信号。

② 将连续角频率的符号定义为  $\Omega$ , 而数字频率的符号定义为  $\omega$ , 与后续课程“数字信号处理”的教材保持一致。

#### (5) 习题按知识点次序排列并按难易程度分类

首先, 各章习题部分按照知识点的先后次序排列, 使读者可以按照所学知识点来方便地选择相应的习题。其次, 还将习题按难易程度进行分类, 分为基本题、综合题和提高题三类, 其中在题号前不加任何符号的为基本题, 在题号前加(\*)的为综合题, 在题号前加(\*\*)的为提高题, 其中基本题和综合题附有参考答案, 大部分提高题除了附有参考答案之外, 还列出关键步骤或解题提示。

由于不同的学校和不同的专业“信号与系统”课程学时数不尽一致, 一般课堂讲授的学时为 32~64 学时。因此, 教师可根据实际学时数, 选择不同的章节来进行授课。

与本教材相配套的电子课件与部分习题答案, 可以登录电子工业出版社的华信教育资源网 [www.hxedu.com.cn](http://www.hxedu.com.cn) 免费下载。

本教材由徐天成统稿。其中第 1, 2, 3, 4, 6 章由徐天成执笔, 第 7~9 章由谷亚林执笔, 第 5 章及全部的 MATLAB 内容由钱玲执笔。本书作者所在教研室的各位同仁对本书提出了许多宝贵意见, 在此表示诚挚的谢意。

编著者

(作者的 E-Mail: [xutiancheng@mail.njust.edu.cn](mailto:xutiancheng@mail.njust.edu.cn))

# 目 录

|                             |      |
|-----------------------------|------|
| 第 1 章 引言                    | (1)  |
| 第 2 章 连续时间信号的时域分析           | (5)  |
| 2.1 信号的分类                   | (5)  |
| 2.2 常用连续时间信号                | (6)  |
| 2.3 奇异信号                    | (8)  |
| 2.3.1 单位斜变信号                | (8)  |
| 2.3.2 单位阶跃信号                | (9)  |
| 2.3.3 单位冲激信号                | (10) |
| 2.3.4 冲激偶信号                 | (12) |
| 2.4 信号的运算                   | (13) |
| 2.5 信号的分解                   | (22) |
| 2.6 MATLAB 的操作界面及连续信号的表示    | (25) |
| 习题                          | (29) |
| 第 3 章 连续时间信号的变换域分析          | (33) |
| 3.1 周期信号的频谱分析——傅里叶级数        | (33) |
| 3.1.1 三角形形式的傅里叶级数           | (33) |
| 3.1.2 指数形式的傅里叶级数            | (34) |
| 3.1.3 周期信号的频谱及其特点           | (35) |
| 3.1.4 波形的对称性与谐波特性的关系        | (38) |
| 3.1.5 吉布斯现象                 | (41) |
| 3.2 典型周期信号的频谱               | (42) |
| 3.2.1 周期矩形脉冲信号              | (42) |
| 3.2.2 周期锯齿脉冲信号              | (45) |
| 3.2.3 周期三角脉冲信号              | (45) |
| 3.2.4 周期半波余弦信号              | (45) |
| 3.2.5 周期全波余弦信号              | (46) |
| 3.3 非周期信号的频谱分析——傅里叶变换       | (46) |
| 3.3.1 傅里叶变换及傅里叶逆变换          | (46) |
| 3.3.2 傅里叶变换的物理意义——频谱和频谱密度函数 | (48) |
| 3.4 典型非周期信号的频谱              | (49) |
| 3.5 傅里叶变换的基本性质              | (54) |
| 3.6 周期信号的傅里叶变换              | (68) |
| 3.7 拉普拉斯变换                  | (73) |

|              |                              |              |
|--------------|------------------------------|--------------|
| 3.7.1        | 从傅里叶变换到拉普拉斯变换 .....          | (73)         |
| 3.7.2        | 拉普拉斯变换的收敛域 .....             | (74)         |
| 3.7.3        | 典型信号的拉普拉斯变换 .....            | (76)         |
| 3.8          | 拉普拉斯变换的基本性质 .....            | (78)         |
| 3.9          | 拉普拉斯逆变换 .....                | (86)         |
| 3.9.1        | 部分分式展开法 .....                | (87)         |
| 3.9.2        | 留数法 .....                    | (90)         |
| 3.10         | 连续信号的频域与复频域的 MATLAB 分析 ..... | (91)         |
|              | 习题 .....                     | (93)         |
| <b>第 4 章</b> | <b>连续时间系统的时域分析 .....</b>     | <b>(99)</b>  |
| 4.1          | 系统模型及其分类 .....               | (99)         |
| 4.2          | 线性时不变系统及其分析方法概述 .....        | (101)        |
| 4.2.1        | 线性时不变系统的基本特性 .....           | (101)        |
| 4.2.2        | 线性时不变系统分析方法概述 .....          | (104)        |
| 4.3          | 线性时不变系统响应的经典求解 .....         | (105)        |
| 4.3.1        | 线性时不变系统的数学模型 .....           | (105)        |
| 4.3.2        | 微分方程的经典求解 .....              | (106)        |
| 4.3.3        | 初始条件的确定 .....                | (109)        |
| 4.4          | 零输入响应与零状态响应 .....            | (112)        |
| 4.5          | 冲激响应与阶跃响应 .....              | (115)        |
| 4.6          | 系统的卷积积分分析 .....              | (116)        |
| 4.7          | 用 MATLAB 对连续时间系统的时域分析 .....  | (118)        |
|              | 习题 .....                     | (120)        |
| <b>第 5 章</b> | <b>连续时间系统的变换域分析 .....</b>    | <b>(124)</b> |
| 5.1          | 系统响应的拉氏变换求解 .....            | (124)        |
| 5.1.1        | 微分方程的拉氏变换求解 .....            | (124)        |
| 5.1.2        | $s$ 域的元素模型 .....             | (127)        |
| 5.2          | 系统函数与冲激响应 .....              | (131)        |
| 5.3          | 零、极点分布与时域响应特性 .....          | (134)        |
| 5.3.1        | 零点与极点的概念 .....               | (134)        |
| 5.3.2        | 零、极点分布与时域响应特性 .....          | (135)        |
| 5.3.3        | 自由响应与强迫响应、暂态响应与稳态响应 .....    | (138)        |
| 5.4          | 零、极点分布与系统频率响应特性的关系 .....     | (141)        |
| 5.4.1        | 频率响应特性的定义 .....              | (141)        |
| 5.4.2        | 频响特性的矢量作图法 .....             | (142)        |
| 5.5          | 典型系统的频响特性 .....              | (144)        |
| 5.6          | 全通系统和最小相位系统 .....            | (150)        |
| 5.7          | 系统模拟及信号流图 .....              | (153)        |
| 5.7.1        | 系统的框图 .....                  | (153)        |

|              |                        |              |
|--------------|------------------------|--------------|
| 5.7.2        | 信号流图                   | (154)        |
| 5.7.3        | 系统模拟                   | (157)        |
| 5.8          | 系统的稳定性                 | (162)        |
| 5.9          | MATLAB 在连续系统变换域分析中的应用  | (166)        |
|              | 习题                     | (168)        |
| <b>第 6 章</b> | <b>傅里叶变换的应用</b>        | <b>(175)</b> |
| 6.1          | 信号的传输与滤波               | (175)        |
| 6.1.1        | 无失真传输                  | (175)        |
| 6.1.2        | 理想滤波器                  | (176)        |
| 6.2          | 模拟滤波器的基本概念与设计方法        | (181)        |
| 6.2.1        | 系统的物理可实现性              | (181)        |
| 6.2.2        | 典型模拟低通滤波器的设计方法         | (182)        |
| 6.2.3        | 频率变换                   | (186)        |
| 6.3          | 信号的采样                  | (187)        |
| 6.3.1        | 信号采样的概念                | (187)        |
| 6.3.2        | 采样信号的傅里叶变换             | (188)        |
| 6.3.3        | 采样定理                   | (190)        |
| 6.3.4        | 从采样信号恢复连续信号            | (192)        |
| 6.4          | 调制与解调                  | (196)        |
| 6.4.1        | 调制的概念及分类               | (196)        |
| 6.4.2        | 调幅信号的傅里叶变换             | (197)        |
| 6.4.3        | 解调的概念                  | (201)        |
| 6.5          | MATLAB 在信息处理与通信中的应用    | (203)        |
|              | 习题                     | (206)        |
| <b>第 7 章</b> | <b>离散时间信号的时域与变换域分析</b> | <b>(210)</b> |
| 7.1          | 离散时间信号——序列             | (210)        |
| 7.1.1        | 离散时间信号的表示              | (210)        |
| 7.1.2        | 序列的种类                  | (211)        |
| 7.1.3        | 典型序列                   | (211)        |
| 7.1.4        | 序列的运算                  | (214)        |
| 7.2          | 序列的 $z$ 变换             | (217)        |
| 7.2.1        | $z$ 变换的定义              | (217)        |
| 7.2.2        | $z$ 变换的收敛域             | (218)        |
| 7.2.3        | 常用因果序列的 $z$ 变换         | (222)        |
| 7.2.4        | $s$ 平面到 $z$ 平面的映射      | (224)        |
| 7.3          | $z$ 逆变换                | (226)        |
| 7.3.1        | 部分分式展开法                | (227)        |
| 7.3.2        | 围线积分法 (留数法)            | (229)        |
| 7.3.3        | 幂级数展开法 (长除法)           | (231)        |

|              |                               |              |
|--------------|-------------------------------|--------------|
| 7.4          | $z$ 变换的基本性质 .....             | (232)        |
| 7.5          | 序列的傅里叶变换 .....                | (239)        |
| 7.6          | 离散信号时域与变换域分析的 MATLAB 实现 ..... | (242)        |
|              | 习题 .....                      | (244)        |
| <b>第 8 章</b> | <b>离散时间系统的时域与变换域分析 .....</b>  | <b>(248)</b> |
| 8.1          | 离散时间系统与差分方程 .....             | (248)        |
| 8.1.1        | 线性时不变离散时间系统 .....             | (248)        |
| 8.1.2        | 线性时不变离散时间系统的数学模型 .....        | (250)        |
| 8.2          | 常系数线性差分方程的求解 .....            | (252)        |
| 8.2.1        | 线性常系数差分方程的时域经典法求解 .....       | (253)        |
| 8.2.2        | 线性常系数差分方程的零输入响应与零状态响应求解 ..... | (256)        |
| 8.2.3        | 线性常系数差分方程的 $z$ 变换法求解 .....    | (258)        |
| 8.3          | 离散系统的单位样值响应和系统函数 .....        | (260)        |
| 8.3.1        | 单位样值响应 .....                  | (260)        |
| 8.3.2        | 线性时不变系统的时域分析——卷积和 .....       | (262)        |
| 8.3.3        | 系统函数 .....                    | (263)        |
| 8.3.4        | 离散系统的零极点分布与时域响应特性的关系 .....    | (263)        |
| 8.3.5        | 系统函数和系统的因果性与稳定性 .....         | (264)        |
| 8.4          | 离散系统的频响特性 .....               | (267)        |
| 8.4.1        | 频响特性的定义 .....                 | (267)        |
| 8.4.2        | 频响特性的矢量几何作图法 .....            | (268)        |
| 8.5          | 数字滤波器的原理与结构 .....             | (272)        |
| 8.5.1        | 数字滤波器原理 .....                 | (272)        |
| 8.5.2        | 数字滤波器结构 .....                 | (274)        |
| 8.6          | 应用 MATLAB 分析离散时间系统 .....      | (276)        |
|              | 习题 .....                      | (279)        |
| <b>第 9 章</b> | <b>系统的状态变量分析法 .....</b>       | <b>(284)</b> |
| 9.1          | 系统的状态变量和状态方程 .....            | (284)        |
| 9.2          | 连续时间系统状态方程的建立 .....           | (287)        |
| 9.2.1        | 系统状态方程的直接编写 .....             | (288)        |
| 9.2.2        | 系统状态方程的间接编写 .....             | (289)        |
| 9.3          | 离散时间系统状态方程的建立 .....           | (293)        |
| 9.3.1        | 根据给定系统的差分方程确定状态方程 .....       | (293)        |
| 9.3.2        | 根据给定系统的框图或流图建立状态方程 .....      | (294)        |
| 9.4          | 连续时间系统状态方程的求解 .....           | (295)        |
| 9.5          | 离散时间系统状态方程的求解 .....           | (298)        |
| 9.6          | 由状态方程判断系统的稳定性 .....           | (301)        |
| 9.7          | 系统的状态变量分析法的 MATLAB 实现 .....   | (302)        |
|              | 习题 .....                      | (304)        |



|                           |       |
|---------------------------|-------|
| 附录 A 常用非周期信号的傅里叶变换表 ..... | (308) |
| 附录 B 劳斯准则 .....           | (312) |
| 习题答案 .....                | (314) |
| 参考文献 .....                | (329) |

# 第 1 章 引 言

“信号与系统”的理论和分析方法，潜在的和实际的应用范围不断地在扩大着，几乎渗透到各个科学技术领域之中。那么，什么是信号（signal）？什么是系统（system）呢？为什么要把信号与系统这两个概念联系在一起呢？这是首先必须弄清楚的问题。

## 1. 信号的定义及应用

“信号”来源于拉丁文“*signum*（记号）”一词，其含义甚广。“信号”这一术语不仅出现于科学技术领域之中，而且在日常生活之中每时每刻几乎都与信号打交道，人们对信号并不陌生。上课的铃声就是一种信号，火车、船舶的汽笛声，汽车的喇叭声也都是一种信号，这些都是声信号。道路交叉路口和铁路轨道旁设置的红绿灯光是一种信号，发射信号弹的闪烁亮光也是一种信号，这些都是光信号。收音机和电视机天线从天空中接收到的电磁波是一种信号，它们每一级电路的输入、输出电压（voltage）或电流（current）也是信号，这都是电信号。除此之外，还有电视机和计算机显示器屏幕上的图像文字信号，交警指挥的手势信号，军舰使用的旗语信号，等等。所有这些五花八门的信号，虽然它们的物理表现形式各不相同，但是它们却存在两个共同特点：无论是声信号、光信号、电信号，还是其他形式的信号，其本身都是一种变化着的物理量，或者说是一种物理体现，这个特点是显而易见的。而另一个特点则表现为，信号都包含有一定意义，也就是说，信号是载有信息（information）的。例如上课的铃声信号，表示上课时间到了的信息；雷达荧光屏上的光点信号，表示有飞机出现的信息；生物细胞中 DNA 的结构图案信号，表示了一定的遗传信息等。因此我们可以说，信号就是用于描述、记录或传输的信息的任何对象的物理状态随时间的变化过程。简单而言，信号就是载有一定信息的一种变化着的物理量。也可以说，信号就是载有一定信息的一种物理体现。信号是信息的表现形式，信息则是信号的具体内容。人们相互问询、发布新闻、广播图像或传递数据，其目的都是要把信息借助于一定形式的信号传递出去。

自古以来，人们就在不断地寻求各种方法，将信息转化为信号，以实现信息的传输、记忆与处理。我国古代利用烽火台的狼烟报警，希腊人利用火炬位置表示字母符号，就是利用光信号进行信息传递的早期范例。击鼓鸣金报送时刻或传达命令，是利用声信号进行信息传递的例证。以后出现了信鸽、驿站和旗语等传送信息的各种方法。然而，这些方法无论在距离、速度还是在有效性与可靠性方面，都没有得到较满意的解决。19 世纪初叶之后，人们开始研究如何利用电信号进行信息的传送，使人类在信息传输、记忆与处理等诸多方面取得了显著的进步和满意的效果。1837 年，莫尔斯（F. B. Morse）发明了电报，使用点、划、空适当组合的代码表示字母和数字，这种代码称为莫尔斯电码。1876 年，贝尔（A. G. Bell）发明了电话，直接将语音转换成电信号沿导线传递。19 世纪末，赫兹（H. Hertz）、波波夫（A. C. Попов）、马可尼（G. Marconi）等人研究用电磁波传送无线电信号问题。1901 年，马可尼成功地实现了横跨大西洋的长距离无线电通信（即信息传输）。从此，传输电信号的通信方式得到了广泛的应用与迅速发展。现在，电话、电报、无线电广播、电视等利用电信号的通信方式，已成为我们日常生活中不可缺少的内容和手段，不仅实现了遍绕地球的全球电

信号通信,而且实现了太阳系范围的电信号通信。还要指出,电信号与许多种非电信号之间可以比较方便地进行相互转换。上课电铃声(声信号)和指挥交通的红绿灯(光信号),都是由电信号控制和推动而得到的。作为声信号的语言通过话筒变换成电信号,放大之后推动扬声器又将其复原成语言信号,使之在较远处也能被听到。景物图像的光信号通过电视摄像机变成电信号,经电视发射台加工处理之后以电磁波形式辐射到空间,远处的电视接收机收到辐射的电磁波后再一次加工处理,使之在电视机屏幕上显示原景物的图像信号。实际应用中常常将各种物理量,如声波动、光强度、机械运动的位移或速度等转换成电信号,以利于远距离的信息传输,经传输后在接收端再将电信号还原成原始的消息。

本书中只研究电信号的各种特性和分析方法。所谓电信号(以后简称为信号),一般指载有信息的随时间而变化的电压或电流,也可以是电容上的电荷、线圈中的磁通及空间中的电磁波等电量。信号特性可以从两个方面来描述:一是时间特性,亦称为时域特性;二是频率特性,亦称为频域特性。信号是随时间而变化的电量,那么描述信号的数学表达式则是时间的函数。绘出函数的图像称为信号的波形。波形表现出信号的时间特性,如信号出现的时间先后,持续时间的长短,重复周期的大小,以及随时间变化的快慢等。信号的另一个特性是,任一信号总可以分解为许多不同频率的正弦分量,表现出信号具有一定的频率特性。例如,各频率的正弦分量之间相对大小、主要频率分量占有的范围即频带宽度等。信号的形式有所不同,就在于它们有各自的时间特性和频率特性。信号的时间特性与频率特性之间具有一定的相互对应关系。不同的时域特性将导致不同的频域特性。这将在第3章频谱分析中详细讨论。随着问题的深入,需用正交变换的方式来描述和研究信号。

## 2. 信号处理的概念

随着信号传输理论与技术的发展,信号处理的理论与技术亦迅猛发展。所谓信号处理可以理解为对信号进行某种加工或变换。加工或变换的目的在于削弱信号中多余的成分,滤除混杂的噪声和干扰;或者将信号变换成容易分析与识别的形式,便于估计或选择它的特征参量。近年来数字电子计算机的迅猛发展与广泛应用,更大大促进了信号处理的研究,使得信号处理的应用遍及许多科学技术领域。例如,月球探测器发来的电视信号可能被淹没在噪声之中,而利用信号处理技术就可以使有用的信号增强,在地球上得到清晰的图像。资源勘探、地震测量及核试验监测中所得到的数据分析也需要利用信号处理技术。信号处理还可以应用于心电图、脑电图的分析,语音或图像识别,以及各种类型的数据通信等。信号传输与信号处理既有着密切的联系,又是相对独立的学科体系。但它们共同的理论基础是信号分析与系统分析。信号与系统分析的理论研究将服务于解决信号传输与信号处理方面的理论与实际问题。

## 3. 系统的定义及应用

近代,人们在研究自然界、社会和思维规律时,普遍地引用系统的概念、理论和方法。从一般意义上来说,所谓系统是指一个由若干个相互联系、相互作用的单元(事物)组合而成的具有某种特定功能的整体。系统可以是太阳系、生态系统和动物神经组织等自然系统;也可以是计算机网、交通运输网和电力系统等人工系统。系统可以是生物系统、化学系统、政治体制系统和经济结构等非物理系统。本书只讨论无线电电子学领域中的电系统。

在无线电电子学领域中,常常利用通信系统、控制和计算机系统等信号的传输与处

理。信号的传输与处理，要由许多不同功能的单元组合而成的一个复杂系统来完成。从广义上来说，一切信息的传输过程都可以看做是通信。一切完成信息传输任务的系统统称为信息传输系统，亦可称为通信系统，电话、电报、电视、雷达、导航等系统均属之。以电视系统来说，它所要传输的信息包含在配有声音的画面之中，传输这些画面时，先要借助电视摄像机把画面的光线色彩转换成图像信号，并利用话筒把声音转换成伴音信号，这些就是电视要传输的带有信号的原始信号。然后把这些信号送入电视发射机，它能够产生一种反映上述信号变化的便于传播的射频电视信号。最后，由天线将这个射频电视信号转换为电磁波发射出去，在空间传播。电视接收者用接收天线截获一小部分电磁波能量，将它转换成射频信号送入电视接收机。接收机的作用正好和发射机相反，它能将送入的射频电视信号恢复出原有的图像信号和伴音信号，并把这些信号分别送到显像管和喇叭，使接收者能看到传输的图像，并听到配有的伴音。这个信息传输过程，可以用图 1-1 所示的方框图表示。这个方框图也表示了一般通信系统的组成。图中，信源是产生载有信息之消息（语言、文字、图像或数据等）的设备或人，输入转换器把消息转换为信号，如摄像管、话筒等，发射机是把输入转换器输出的信号转换成便于传输的另一种形式信号的装置。信道是指信号传输的通道，在有线电话中它是一对导线，在利用电磁波传播的无线电通信中它可以是空间、卫星通信中的人造卫星，也可以是波导或同轴电缆，在光通信中，它则是光导纤维。接收机用来接收信道传来的信号，并把它转换为能适宜于输出转换器工作的装置。从广义而言，发射机和接收机也可以看成是信道，因此也称它为信道机。输出转换器是将接收机输出的信号转换为消息的装置，如显像管、喇叭等。转换器完成从一种形式的能量转换为另一种形式的能量这一工作。信宿是接收消息的装置或人。不同的通信系统可以有不同的信源和不同的信道。

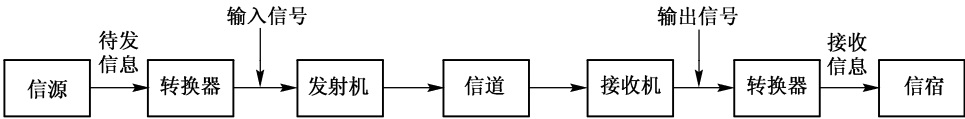


图 1-1 通信系统的组成

构成系统的单元可小可大，可简可繁。如果将通信系统、控制系统、计算机系统与指挥系统共同组合而成一个繁杂的整体，可以构成一个宇宙航行的综合系统。一只电阻和一只电容可以构成具有一定微分或积分功能的简单系统。通常，无线电电子学领域中系统的主要部件包括大量的、多种类的电路。电路亦称为网络。当研究一般性的抽象规律时往往用网络一词，而讨论一些指定的具体问题时常称之为电路。

#### 4. 系统、电路与网络的区别

在一定意义上，系统与电路（circuit）或网络（network）是同义词。电路和网络就是一个系统。系统所关心的是，对于给定的信号形式与传输、处理的要求，系统能否与之相匹配，系统为此而需要具有怎样的功能和特性。网络问题的着眼点在于，为实现系统的功能与特性，网络应具有怎样的结构，其各种参数如何确定。系统与网络的差异，主要体现在观察事物的着眼点或处理问题的角度方面。系统问题侧重全局，而网络问题则侧重局部。例如，仅由一个电阻和一个电容组成的简单电路，在网络分析中，注意研究其各支路、回路的电压或电流；而从系统的观点来看，可以研究它如何构成具有微分或积分功能的运算器。近年来，由于大规模集成电路技术的发展，各种极其复杂的网络系统可以直接做在一个很小的集成电

路芯片上，使得系统、网络、电路及器件之间的差别日益缩小，无须严格区分各名词之差异。本书中，系统、网络与电路等名词通用。

5. 信号与系统的关系

信号与系统有着十分密切的联系。离开了信号，系统将失去意义。信号是待传递消息的表现形式，是运载信息的工具；而系统则是为传输信号或对信号进行加工处理而构成的某种组合。也就是说，要产生信号，要对信号进行传输、处理、存储或转化，必定需要一定的物理装置，这种物理装置就是系统。从系统的功能来看，系统就是一个转换器，它总是对某个特定的输入信号  $x(t)$  变换成另一个输出信号  $y(t)$ 。为了方便地表示不同的系统，把输入输出信号之间的关系写成如下的函数形式

$$y(t) = T[x(t)]$$

(1-1)



式中， $x(t)$ 亦可称为激励； $y(t)$ 亦可称为响应； $T[\cdot]$ 可以看做是一种算子，不同系统对应不同算子。这样，系统可用图 1-2 所示的方框图表示。这里表示的是单输入单输出系统。复杂系统可以是多个输入多个输出的。系统的功能和特性，就是通过由怎样的激励产生怎样的响应来体现的。不同的系统具有各种不同的特性。

图 1-2 系统的方框图

近年来，随着计算机技术应用的迅速发展，系统仿真技术的日益进步，使系统的研究和信号的研究已经进一步融合起来了。本书不但将信号与系统这两个概念联系在一起，而且将信号分析与系统分析并重讨论。

## 第 2 章 连续时间信号的时域分析

引言中指出, 信号是随时间而变化的, 它的数学表达式是时间的函数, 这是信号的基本描述方法。当然, 可以用它的函数图像即信号波形来表示。为了讨论方便, 本书中常常把信号与函数两个术语视为同义词。本章讨论连续时间信号的时域分析, 在第 3 章中还要研究连续时间信号的变换域分析。

### 2.1 信号的分类

信号种类很多, 从不同角度可以有不同分类方法。

按分布性质不同, 信号可以区分为**确定性信号** (deterministic signal) 和**随机信号** (random signal)。对于给定的某一时刻, 有确定的函数值与之对应, 这种信号称为确定性信号或规则信号。例如, 正弦信号就是确定性信号。然而, 实际传输的信号往往具有不可预知的不确定性, 这种信号称为随机信号或不确定信号。语音信号就是一种随机信号, 空中传来的噪声、电路元件中的热噪声电流都是随机信号。随机信号在每一确定时刻上的取值难于确定, 只能通过大量实验测出取某些值可能性的分布 (概率分布)。本书只讨论确定性信号。

按函数自变量取值是否具有连续性, 信号可以区分为**连续时间信号** (continuous time signal) 和**离散时间信号** (discrete time signal)。如果对于所讨论的时间范围内, 在任意时刻点上 (除若干不连续点外) 函数都有确定的值与之对应, 这种信号就称为连续时间信号。例如, 图 2.1-1(a) 所示的正弦信号和图 2.1-1(b) 所示的信号都是连续时间信号。而离散时间信号, 在时间上是离散的, 它只在某些时间的离散点上给定函数值, 而在其他时间上都没有定义。图 2.1-2 所示的信号, 就是离散时间信号。

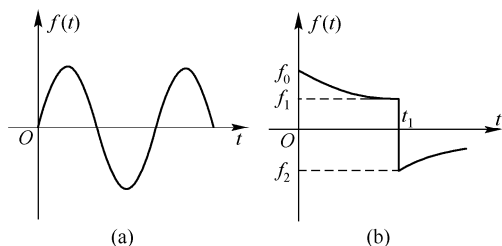


图 2.1-1 连续时间信号

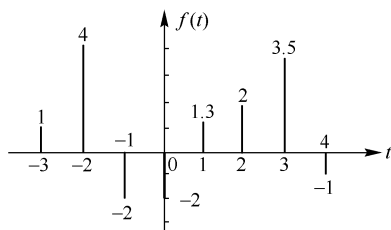


图 2.1-2 离散时间信号

按函数是否具有周期性, 信号可以区分为**周期信号** (periodic signal) 和**非周期信号** (nonperiodic (aperiodic) signal)。如果对所有的  $t \in (-\infty, \infty)$ , 存在一个最小的常数  $T$ , 使得

$$f(t) = f(t + nT) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1-1)$$

就称  $f(t)$  是以  $T$  为周期的周期信号, 否则就称为非周期信号。周期信号就是依一定时间间隔  $T$  周而复始, 而且是无始无终的。只要给出此信号在任一周期内的变化过程, 便可确知它在任一时刻的数值。非周期信号在时间上不具有周而复始的特性。若令周期信号的周期  $T$  趋于

无限大，则成为非周期信号。

按函数存在的区域，信号可以分为因果信号（causal signal）和非因果信号（noncausal signal）。将  $t \geq 0$  接入系统的信号（即在  $t < 0$  时为零的信号），称为因果信号。反之，若  $t < 0$  时不等于零的信号，则称为非因果信号。

按函数自变量数目不同，信号可以分为一维信号（one-dimensional signal）和多维信号（multi-dimensional signal）。若信号表示为时间  $t$  的函数，则这种信号是一维信号。一维信号的这种时间函数关系可以用数学表达式、波形图、数据表等方式来表达。 $\sin t, e^{-t}$  等具体函数表达式可以表示信号，亦可用  $f(t), x(t)$  等抽象的函数表达式表示信号。

对于一个函数，它的定义域是很重要的。用时间函数来表示的信号，其定义域就是信号存在的时间范围。例如， $\cos t$  ( $-\infty < t < \infty$ ) 和  $\cos t$  ( $t \geq 0$ ) 就是两个不同的信号，因为它们的时间范围不相同。为方便起见，凡时间范围为  $-\infty < t < \infty$  的，可以省略不写。也就是说，凡没有特别标明时间范围时，都认为  $t \in (-\infty, \infty)$ 。对应一维信号，还有二维信号、三维信号等多维信号。电视图像信号是典型的三维信号  $f(x, y, t)$ ，即它是平面空间  $x, y$  和时间  $t$  的三维函数。多维信号可以采用扫描等措施变换成一维信号。本书只讨论表示为时间函数的一维信号。

## 2.2 常用连续时间信号

### 1. 指数信号

在信号与系统分析中，指数信号（exponential signal）是重要的基本信号之一，它的表达式为

$$f(t) = Ae^{\alpha t} \quad (2.2-1)$$

式中， $\alpha$  是实数。若  $\alpha > 0$ ，则信号将随时间增大而增长，且  $\alpha$  越大，增长速度越快。若  $\alpha < 0$ ，则信号随时间增大而衰减，且  $|\alpha|$  越大，衰减速度越快。当  $\alpha = 0$  时，信号不随时间而变化，称为直流信号。指数信号的波形如图 2.2-1 所示。

常见的指数信号是单边指数衰减信号，其表达式为

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.2-2)$$

式中， $\alpha > 0$ 。 $\alpha$  的倒数称为指数信号的时间常数（time constant），记为  $\tau$ ，其波形如图 2.2-2 所示。

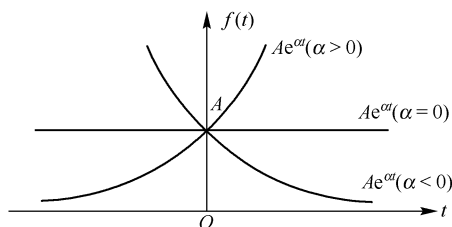


图 2.2-1 指数信号

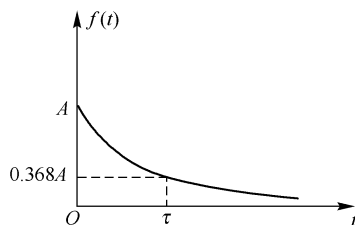


图 2.2-2 单边指数衰减信号

## 2. 正弦信号

正弦信号 (sine signal) 与余弦信号 (cosine signal), 两者只是在相位上相差  $\pi/2$ , 可以统称为正弦信号。其一般形式为

$$f(t) = A \sin(\Omega t + \theta) \quad (2.2-3)$$

式中,  $A$  为振幅 (amplitude),  $\Omega$  是角频率 (angular frequency),  $\theta$  为初相位 (initial phase)。上述三个量是正弦信号的三要素。它的波形如图 2.2-3 所示。

正弦信号是周期信号, 其周期 (period)  $T$  与频率 (frequency)  $f$  及角频率  $\Omega$  之间的关系为  $T = 1/f = 2\pi/\Omega$ 。

在信号与系统分析中, 经常要遇到单边指数衰减的正弦信号, 其波形如图 2.2-4 所示。其表达式为

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} \sin \Omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.2-4)$$

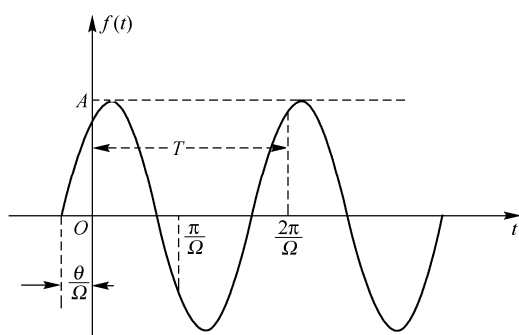


图 2.2-3 正弦信号

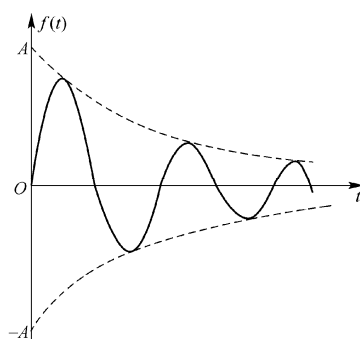


图 2.2-4 指数衰减的正弦信号

## 3. 抽样函数

抽样函数 (sampling function) 的表达式为

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t} \quad (2.2-5)$$

抽样函数的波形如图 2.2-5 所示。由图可知,  $\text{Sa}(t)$  是偶函数 (even function), 在  $t$  的正、负两方向振幅都逐渐衰减, 且当  $t = \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$  时, 函数值为零。

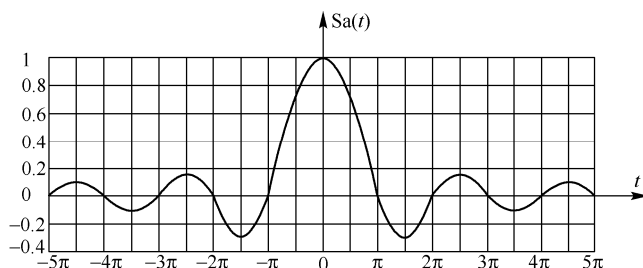


图 2.2-5 抽样函数



Sa(t) 函数具有如下性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \pi \quad (2.2-6)$$

#### 4. 复指数信号

将指数信号的指数因子换成复数，则称为复指数信号（complex exponential signal），其表达式为

$$f(t) = Ae^{st} \quad (2.2-7)$$

式中， $s$  称为复频率（complex frequency），它可以表示成  $s = \sigma + j\Omega$ ， $\sigma$  为复指数  $s$  的实部（real part）， $\Omega$  为虚部（imaginary part）。借助欧拉公式，可将式(2.2-7)展开成如下形式

$$f(t) = Ae^{st} = Ae^{(\sigma + j\Omega)t} = Ae^{\sigma t} \cos \Omega t + jAe^{\sigma t} \sin \Omega t \quad (2.2-8)$$

上式表明，一个复指数信号可分解为实部与虚部两部分。其中，实部为余弦信号，虚部为正弦信号。指数因子的实部  $\sigma$  表征了正弦与余弦的振幅随时间变化的情况。若  $\sigma > 0$ ，则正弦、余弦信号是增幅振荡；若  $\sigma < 0$ ，则为衰减振荡。指数因子的虚部  $\Omega$  则表示正弦和余弦信号的角频率。

## 2.3 奇异信号

在信号与系统分析中，除了上述几种常用基本信号之外，还经常遇到信号本身具有不连续点（跳变点）或其导数与积分具有不连续点的情况，这类信号统称为奇异信号（singularity signal）或奇异函数。

### 2.3.1 单位斜变信号

单位斜变信号（unit ramp signal）也称为单位斜坡信号或单位斜升信号。它是从某一时刻随时间正比例增长的信号。如果从  $t = 0$  开始按单位斜率增长，则称为单位斜变信号，用  $R(t)$  表示，其数学表达式为

$$R(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.3-1)$$

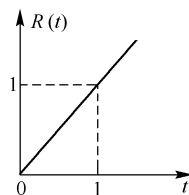


图 2.3-1 单位斜变信号

其波形如图 2.3-1 所示。如果起始点移至  $t_0$ ，则应写为

$$R(t - t_0) = \begin{cases} t - t_0 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \quad (2.3-2)$$

这是延时的斜变信号，其波形如图 2.3-2 所示。如果斜率(slope)不是 1，而是  $A$  ( $A$  为大于零的常数)，则可以写为  $AR(t)$  或  $AR(t - t_0)$ 。

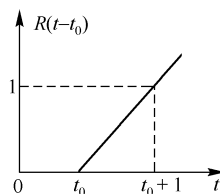


图 2.3-2 延时的单位斜变信号

## 2.3.2 单位阶跃信号

单位阶跃信号 (unit step signal), 用符号  $u(t)$  表示, 其数学表达式为

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.3-3)$$

波形如图 2.3-3 所示。在跳变点  $t = 0$  处, 函数值未定义。

如何得到单位阶跃信号呢? 我们来考查图 2.3-4 所示的电路, 假设开关 S、直流电源  $E$  及电容  $C$  均为理想元件, 无内阻。当  $t = 0$  时, 开关 S 闭合, 由于电路中无损耗电阻存在, 所以电源电压立刻加到电容  $C$  两端。从而使电容  $C$  两端的电压从  $t < 0$  时的  $0V$  跳变到  $t > 0$  后的  $E = 1V$ 。这样, 电容  $C$  两端的电压就是单位阶跃信号。

如果开关 S 在  $t = t_0$  时刻闭合, 则电容  $C$  两端电压应是延时的单位阶跃信号, 其表达式为

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \quad (2.3-4)$$

波形如图 2.3-5 所示。

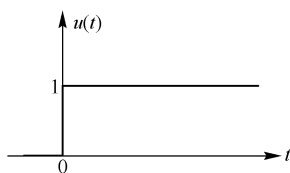


图 2.3-3 单位阶跃信号

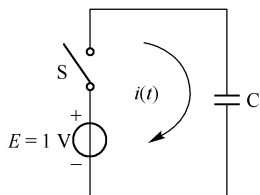


图 2.3-4 电容充电电路

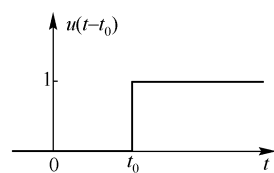


图 2.3-5 延时的单位阶跃信号

如果跳变值不是 1, 而是  $E$ , 则可以写成  $Eu(t)$  或  $Eu(t - t_0)$ 。

容易证明, 单位阶跃信号是单位斜变信号的导数, 即

$$u(t) = \frac{dR(t)}{dt} \quad (2.3-5)$$

反之, 单位斜变信号是单位阶跃信号的积分, 即

$$R(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (2.3-6)$$

阶跃信号具有单边特性, 当任意信号  $f(t)$  与  $u(t)$  相乘时, 将使信号  $f(t)$  在  $t = 0$  之前的幅度为零。例如, 将余弦信号  $\cos t$  与  $u(t)$  相乘, 使其  $t < 0$  的部分变为零。

利用阶跃信号的单边特性, 可以方便地表示分段信号。例如, 图 2.3-6 所示的矩形脉冲  $G(t)$  可表示为

$$G(t) = u(t) - u(t - t_0) \quad (2.3-7)$$

利用单位阶跃函数还可以表示符号函数 (signum function)。符号函数定义为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (2.3-8)$$

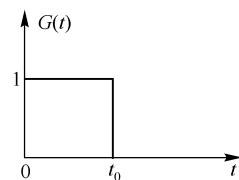


图 2.3-6 矩形脉冲

波形如图 2.3-7 所示。显然

$$\operatorname{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad (2.3-9)$$

反之，也可用  $\operatorname{sgn}(t)$  来表示  $u(t)$ ，即

$$u(t) = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn}(t)] \quad (2.3-10)$$

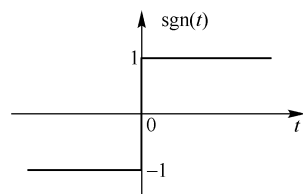


图 2.3-7 符号函数

### 2.3.3 单位冲激信号

某些物理现象，需要用一个时间极短，但取值极大的函数模型来描述。例如，力学中瞬间作用的冲击力，电学中电容器的瞬间充电电流，还有自然界中的电闪雷鸣等。单位冲激信号（unit impulse signal）就是以这类实际问题为背景而引出的。

我们仍以图 2.3-4 所示的电路为例，从物理概念上来解释冲激函数的意义。前面我们已经知道，当  $t=0$  时开关 S 闭合，电容 C 上的电压  $v_C(t)$  是一个单位阶跃电压  $u(t)$ 。现在来计算电容 C 中的充电电流  $i_C(t)$ ，若设  $C=1\text{F}$ ，显然充电电流  $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt}$ ，由于当  $t \neq 0$  时， $\frac{du(t)}{dt}$  均等于零，而当  $t=0$  时， $\frac{du(t)}{dt}$  是一个无限值，因而充电电流  $i_C(t)$  在  $t=0$  时也是一个无限大值，而在  $t \neq 0$  时均为零。这是因为在讨论过程中是将图 2.3-4 电路中的电源、开关及电容予以理想化而引起的。实际电路中，必定存在损耗电阻，这时电容上的电压  $v_C(t)$  将不会在  $t=0$  瞬间从 0 突变到 1，而是存在一个过渡过程。现在假设电容上的电压  $v_C(t)$  在一定时间范围  $(0 < t < \tau)$  之内按线性规律从 0 逐渐增大到稳定值 1。也就是说， $v_C(t)$  用图 2.3-8(a) 所示的电压来代替原理想的单位阶跃电压，则电容 C 在  $0 < t < \tau$  范围内的充电电流  $i_C(t) = 1/\tau$ ；而在  $t < 0$  与  $t > \tau$  范围内的充电电流  $i_C(t) = 0$ 。此时  $i_C(t)$  是一个幅度为  $1/\tau$ 、宽度为  $\tau$  的矩形脉冲，该矩形脉冲的面积为 1，如图 2.3-8(b) 所示。现在我们将  $\tau$  逐渐减小并趋于零，那么电压  $v_C(t)$  将逐渐趋近于单位阶跃函数，同时电流  $i_C(t)$  的矩形脉冲宽度  $\tau$  也将趋于零，而其幅度  $1/\tau$  则趋于无限大。但是，无论  $\tau$  值如何变小，脉冲面积却始终保持为 1。由此引出单位冲激函数，用符号  $\delta(t)$  来表示。

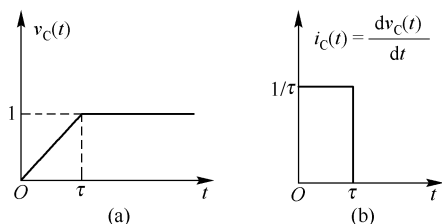


图 2.3-8 非理想情况下电容上的电压与电流

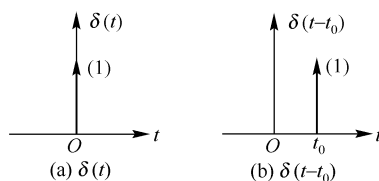


图 2.3-9 单位冲激函数

单位冲激函数  $\delta(t)$  可以定义为，在  $t \neq 0$  时函数值均为零，而在  $t=0$  处函数值为无限大，且函数面积为 1。即可定义为

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (2.3-11)$$

函数面积称为冲激强度。冲激强度为  $E$  的冲激函数，应写为  $E\delta(t)$ 。

上式的定义是狄拉克（Dirac）给出的，因此单位冲激函数  $\delta(t)$  又称为狄拉克函数，也称

为  $\delta$  函数。冲激函数用一带箭头的竖线表示，它出现的时间表示冲激发生的时刻，箭头旁边括号内的数字表示冲激强度。图 2.3-9(a) 是表示发生在  $t = 0$  时刻的单位冲激函数；而图 2.3-9(b) 则表示发生在  $t = t_0$  时刻的单位冲激函数，其数学表达式为

$$\begin{cases} \delta(t - t_0) = 0 & t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1 \end{cases} \quad (2.3-12)$$

狄拉克用式(2.3-11)和式(2.3-12)给出了单位冲激函数的定义。从上述讨论过程中可以看出，单位冲激函数  $\delta(t)$  是面积为 1 的单边矩形脉冲系列的极限，因此单位冲激函数可以定义为

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [u(t) - u(t - \tau)] \quad (2.3-13)$$

应指出，这种极限不同于一般的极限概念，可称为广义极限。因此，冲激函数又称为广义函数 (generalized function)，它的定义方法也不是唯一的。其实，单位冲激函数  $\delta(t)$  也可以利用其他形式的规则函数系列的极限来定义，在求极限的过程中只要函数面积保持为 1。这些规则函数可以是对称矩形脉冲、对称三角形脉冲、双边指数函数和抽样函数等，如图 2.3-10 所示。利用这些规则函数系列极限给出单位冲激函数的表达式如下：

- 对称矩形脉冲 
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[ u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \quad (2.3-14)$$

- 对称三角形脉冲 
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{|t|}{\tau} \right) [u(t + \tau) - u(t - \tau)] \quad (2.3-15)$$

- 双边指数函数 
$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{2\tau} e^{-|t|/\tau} \right] \quad (2.3-16)$$

- 抽样函数 
$$\delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[ \frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt) \right] \quad (2.3-17)$$

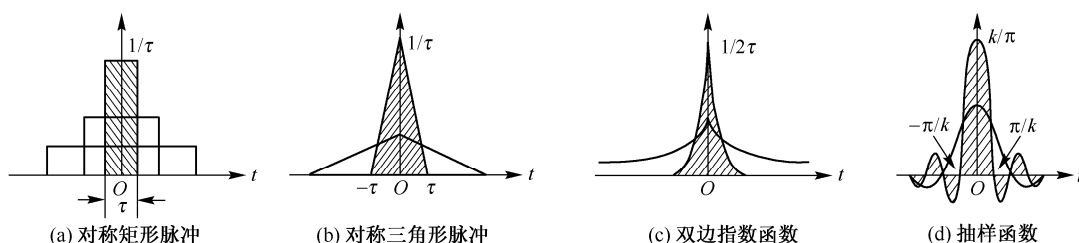


图 2.3-10 规则函数演变为冲激函数

冲激函数具有如下重要性质。

(1) 取样特性 (sampling property)。一个在  $t = 0$  处连续 (且处处有界) 的信号与单位冲激信号  $\delta(t)$  相乘，则其乘积仅在  $t = 0$  处得到  $f(0)\delta(t)$ ，而其余各点之乘积均为零，即

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (2.3-18)$$

于是有 
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0) \quad (2.3-19)$$

类似地，对延时的单位冲激信号有

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0) \quad (2.3-20)$$

$$\text{和} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \quad (2.3-21)$$

这里要求信号  $f(t)$  在  $t=t_0$  处连续且处处有界。

式(2.3-19)和式(2.3-21)表明了冲激信号的取样特性，也称为“筛选”特性。连续时间信号  $f(t)$  与单位冲激信号  $\delta(t)$  或  $\delta(t-t_0)$  相乘，并在  $-\infty$  到  $\infty$  时间内取积分，可以将冲激所在位置处的函数值  $f(0)$  或  $f(t_0)$  抽取（筛选）出来。这样可以用式(2.3-19)和式(2.3-21)来定义冲激函数  $\delta(t)$  或  $\delta(t-t_0)$ 。

(2) 冲激函数  $\delta(t)$  是偶函数，即

$$\delta(t) = \delta(-t) \quad (2.3-22)$$

(3) 冲激函数的积分等于阶跃函数。由式(2.3-11)可知，冲激函数的积分为

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)dt = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

将上式与  $u(t)$  的定义式(2.3-3)比较，就可得到如下重要关系：单位冲激函数的积分等于单位阶跃函数，即

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)dt = u(t) \quad (2.3-23)$$

反之，单位阶跃函数的导数等于单位冲激函数，即

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (2.3-24)$$

上式解释如下：阶跃函数在除  $t=0$  以外的各点都取固定值，其变化率都等于零，即导数为零。而在  $t=0$  处有不连续点，此跳变点的微分就产生冲激函数  $\delta(t)$ 。也就是说，对于函数的跳变点处的微分，就在跳变处出现一冲激函数。

## 2.3.4 冲激偶信号

冲激信号的微分称为冲激偶信号（impulse doublet signal），以  $\delta'(t)$  表示。同样可以利用规

则函数系列取极限的概念引出  $\delta'(t)$ 。这里以三角形脉冲  $s(t)$ ，其底宽为  $2\tau$ 、幅度为  $1/\tau$ ，当  $\tau \rightarrow 0$  时， $s(t)$  成为单位冲

激函数  $\delta(t)$ 。首先对  $s(t)$  求一阶导数，其导数  $\frac{ds(t)}{dt}$  的波

形如图 2.3-11(c)所示，它是正、负极性的两个矩形脉冲，称为脉冲偶对，其宽度都是  $\tau$ ，幅度分别为  $\pm 1/\tau^2$ ，而面积分别为  $\pm 1/\tau$ 。随着  $\tau$  值逐渐减小，脉冲偶对宽度也逐渐变窄，幅度逐渐增大。当  $\tau \rightarrow 0$  时， $\frac{ds(t)}{dt}$  变成正、负极性

的两个冲激函数，其冲激强度均为无限大，这就形成了冲激偶信号  $\delta'(t)$ ，如图 2.3-11(d)所示。

冲激偶信号具有如下特性：

$$(1) \quad f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t) \quad (2.3-25)$$

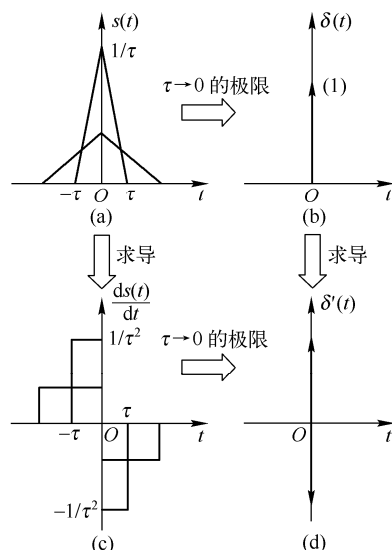


图 2.3-11 冲激偶的形成

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)dt = -f'(0) \quad (2.3-26)$$

这里,  $f'(t)$  在  $t=0$  点连续,  $f'(0)$  为  $f(t)$  的导数在零点的取值。

$$(3) \quad \delta'(t) = -\delta'(-t) \quad (2.3-27)$$

即冲激偶是奇函数 (odd function)。

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)dt = 0 \quad (2.3-28)$$

至此, 我们介绍了斜变信号、阶跃信号、冲激信号及冲激偶信号, 可由依次求导的方法将它们引出。除了以上四种奇异信号之外, 冲激信号的高阶导数, 以及  $t$  的多项式表示的信号, 如  $t^2u(t)$  等也都属于奇异信号, 因以后较少涉及, 故不再一一讨论。

## 2.4 信号的运算

在信号与系统分析中经常要遇到信号的各种运算。本节将介绍连续时间信号的各种运算, 而离散时间信号的运算将放在第 7 章中介绍。

### 1. 信号的加减

两个信号的和 (或差) 信号在任意时刻的值等于两信号在该时刻的值之和 (或差), 即

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) \quad (2.4-1)$$

或 
$$f(t) = f_1(t) - f_2(t) \quad (2.4-2)$$

### 2. 信号的乘法与数乘

两信号的积在任意时刻的值等于两信号在该时刻的值之积, 即

$$f(t) = f_1(t)f_2(t) \quad (2.4-3)$$

信号的数乘运算是指某信号乘以一实常数  $K$ , 它是将原信号每一时刻的值都乘以  $K$ 。

### 3. 信号的反褶、时移与尺度变换

信号  $f(t)$  的反褶就是用  $-t$  替换  $f(t)$  表达式中的所有独立变量  $t$ , 成为  $f(-t)$ 。反褶反映在波形上是将原信号  $f(t)$  的波形以纵轴为轴反转  $180^\circ$ 。

信号  $f(t)$  时移  $t_0$  个单位, 就是用  $t-t_0$  替换  $f(t)$  表达式中所有的独立变量  $t$ 。当  $t_0 > 0$  时, 波形向右移, 这种情况也称为延时; 当  $t_0 < 0$  时, 波形向左移。

信号  $f(t)$  的尺度变换指的是将  $f(t)$  的时间变量  $t$  以正常数  $a$  展缩, 也就是在  $f(t)$  的表达式中, 以  $at$  代替独立变量  $t$ 。当  $a > 1$  时,  $f(at)$  表示将原信号  $f(t)$  在时间轴上压缩; 当  $a < 1$  时,  $f(at)$  则表示将原信号  $f(t)$  在时间轴上扩展。

**例 2.4-1** 已知信号  $f(t)$  如图 2.4-1(a)所示, 求以下信号的表达式, 并画出其波形。

$$(1) f(-t) \quad (2) f(t+1), f(t-1) \quad (3) f(2t), f(t/2) \quad (4) f(-2t+3)$$

**解:** 由图 2.4-1(a)得 
$$f(t) = \begin{cases} t+1, & -1 \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t < 1 \\ 0, & t < -1 \text{ 及 } t > 1 \end{cases}$$

$$(1) \quad f(-t) = \begin{cases} -t+1, & -1 \leq -t \leq 0 \\ 1, & 0 < -t < 1 \\ 0, & -t < -1 \text{ 及 } -t > 1 \end{cases} = \begin{cases} -t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & -1 < t < 0 \\ 0, & t < -1 \text{ 及 } t > 1 \end{cases}$$

其波形如图 2.4-1(b)所示。

$$(2) \quad f(t+1) = \begin{cases} t+2, & -1 \leq t+1 \leq 0 \\ 1, & 0 < t+1 < 1 \\ 0, & t+1 < -1 \text{ 及 } t+1 > 1 \end{cases} = \begin{cases} t+2, & -2 \leq t \leq -1 \\ 1, & -1 < t < 0 \\ 0, & t < -2 \text{ 及 } t > 0 \end{cases}$$

$$f(t-1) = \begin{cases} t, & -1 \leq t-1 \leq 0 \\ 1, & 0 < t-1 < 1 \\ 0, & t-1 < -1 \text{ 及 } t-1 > 1 \end{cases} = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t < 2 \\ 0, & t < 0 \text{ 及 } t > 2 \end{cases}$$

$f(t+1)$  与  $f(t-1)$  的波形分别如图 2.4-1(c)和(d)所示。

$$(3) \quad f(2t) = \begin{cases} 2t+1, & -1 \leq 2t \leq 0 \\ 1, & 0 < 2t < 1 \\ 0, & 2t < -1 \text{ 及 } 2t > 1 \end{cases} = \begin{cases} 2t+1, & -1/2 \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t < 1/2 \\ 0, & t < -1/2 \text{ 及 } t > 1/2 \end{cases}$$

$$f(t/2) = \begin{cases} t/2+1, & -1 \leq t/2 \leq 0 \\ 1, & 0 < t/2 < 1 \\ 0, & t/2 < -1 \text{ 及 } t/2 > 1 \end{cases} = \begin{cases} t/2+1, & -2 \leq t \leq 0 \\ 1, & 0 < t < 2 \\ 0, & t < -2 \text{ 及 } t > 2 \end{cases}$$

$f(2t)$  与  $f(t/2)$  的波形分别如图 2.4-1(e)和(f)所示。

(4) 在信号与系统分析中,经常遇到信号既反褶,又时移,又有尺度变换的情况,此时是用  $-at+b(a>0)$  替换  $f(t)$  中的  $t$ 。于是可得

$$f(-2t+3) = \begin{cases} -2t+4, & -1 \leq -2t+3 \leq 0 \\ 1, & 0 < -2t+3 < 1 \\ 0, & -2t+3 < -1 \text{ 及 } -2t+3 > 1 \end{cases} = \begin{cases} -2t+4, & 3/2 \leq t \leq 2 \\ 1, & 1 < t < 3/2 \\ 0, & t < 1 \text{ 及 } t > 2 \end{cases}$$

其波形如图 2.4-1(g)所示。

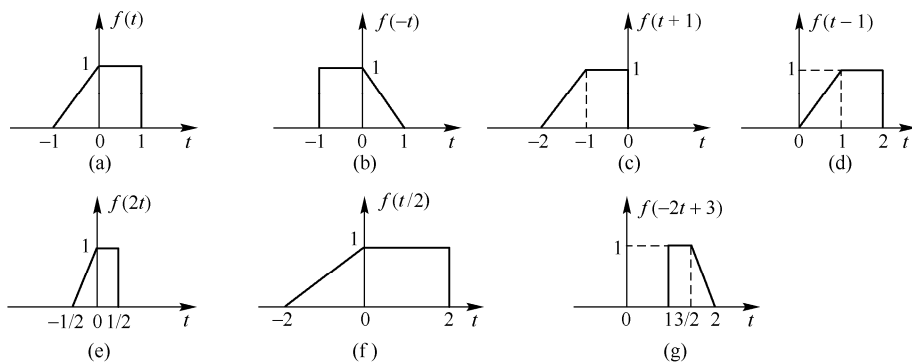


图 2.4-1 例 2.4-1 的图

以上求解过程都是先计算表达式然后画波形。实际上，也可以按照先画波形再写表达式的次序求解。例如，在例 2.4-1(4)中，可以先按照如下次序画波形

$$f(t) \xrightarrow{\text{反褶}} f(-t) \xrightarrow{\text{尺度变换}} f(-2t) \xrightarrow{\text{时移}} f(-2t+3) = f\left[-2\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]$$

$f(-t)$ ,  $f(-2t)$  及  $f(-2t+3)$  的波形分别如图 2.4-2(a)~(c)所示。这样由图 2.4-2(c)可直接写出  $f(-2t+3)$  的表达式。

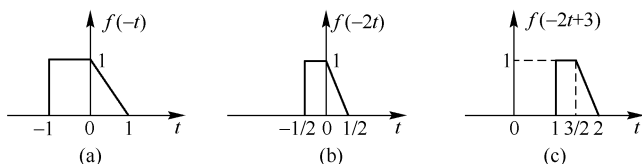


图 2.4-2 例 2.4-1(4)的波形

#### 4. 信号的微分与积分

##### (1) 微分运算

信号  $f(t)$  的微分  $\frac{df(t)}{dt}$  (也可写为  $f'(t)$ ) 表示信号随时间变化的变化率。

由于引入了冲激函数的概念，不仅连续函数可以微分，而且具有跳变点的函数也存在微分，它们在跳变点处的导数是一个冲激函数，其冲激强度为原函数在该处的跳变量，而它们在连续区间的导数即为常规意义上的导数。

**例 2.4-2** 已知  $f(t)$  的波形如图 2.4-3(a)所示，试求  $f'(t)$ ，并画出其波形。

**解：**由图 2.4-3(a)可得  $f(t) = t[u(t) - u(t-1)]$

$$\begin{aligned} \text{所以} \quad f'(t) &= [u(t) - u(t-1)] + t[\delta(t) - \delta(t-1)] \\ &= [u(t) - u(t-1)] - \delta(t-1) \end{aligned}$$

由于  $f(t)$  在  $t=1$  处有一跳变点，跳变量为  $-1$  (从  $1 \rightarrow 0$ )，则在  $t=1$  处出现一冲激函数，其冲激强度为  $-1$ 。 $f'(t)$  的波形如图 2.4-3(b)所示。

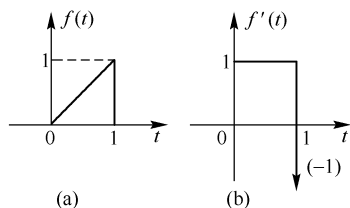


图 2.4-3 信号的微分运算

##### (2) 积分运算

信号  $f(t)$  的积分运算  $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$  (也可写为  $f^{(-1)}(t)$ ) 在  $t$  时刻的值等于从  $-\infty$  到  $t$  区间内  $f(t)$  与时间轴所包围的面积。

**例 2.4-3** 已知  $f(t)$  的波形如图 2.4-4(a)所示，求  $f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ ，并画出其波形。

**解：**由于积分上限  $t$  是变量，它可以从  $-\infty$  变化到  $\infty$ ，并且当  $t$  取不同的值时，积分值也将不同，因此，可分如下区间求解。

① 当  $t < 0$  时， $f^{(-1)}(t) = 0$ 。

② 当  $0 \leq t \leq 1$  时， $f^{(-1)}(t) = \int_0^t 2d\tau = 2t$ 。

③ 当  $t > 1$  时， $f^{(-1)}(t) = \int_0^1 2d\tau = 2$ 。

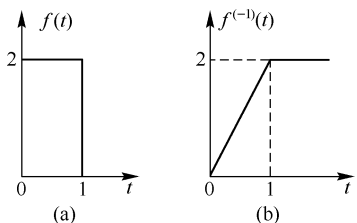


图 2.4-4 信号的积分运算



$$\begin{aligned}
 \text{所以 } f^{(-1)}(t) &= \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 & t > 1 \end{cases} \\
 &= 2t[u(t) - u(t-1)] + 2u(t-1) \\
 &= 2tu(t) - 2(t-1)u(t-1)
 \end{aligned}$$

$f^{(-1)}(t)$  的波形如图 2.4-4(b) 所示。由图可知,  $f^{(-1)}(t)$  在  $t < 0$  时为零; 在  $0 \leq t \leq 1$  时,  $f(t)$  与时间轴所包围的面积随着  $t$  的增加而增大; 当  $t=1$  时, 所包围的面积达到最大值 2; 当  $t > 1$  时, 所包围的面积不再增大仍保持为 2。

## 5. 信号的卷积积分

在信号与系统分析中经常要用到两函数  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  的卷积积分运算 (简称为卷积), 卷积常用符号 “\*” 表示, 其定义为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (2.4-4)$$

一般情况下, 卷积积分的上下限并不都取  $-\infty$  到  $\infty$ , 而是要根据被积函数的具体波形, 采用图解法来确定。

### (1) 卷积积分的图解法

卷积积分的图解法求解可以帮助我们理解卷积的概念, 把一些抽象的关系形象化。

如果给定  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ , 要求这两个函数的卷积积分  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 首先要改变自变量, 即将  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  变为  $f_1(\tau)$  和  $f_2(\tau)$ , 这时函数图形与原来一样, 只是将横坐标  $t$  变为  $\tau$ 。然后再经过如下四个步骤 (称为四步曲):

① 反褶, 即将  $f_2(\tau)$  进行反褶, 变为  $f_2(-\tau)$ ;

② 时移, 即将  $f_2(-\tau)$  时移  $t$ , 变为  $f_2(t-\tau) = f_2[-(\tau-t)]$ , 当  $t > 0$  时, 将  $f_2(-\tau)$  右移  $t$ , 而当  $t < 0$  时, 将  $f_2(-\tau)$  左移  $|t|$ ;

③ 相乘, 即将  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  相乘得到  $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$ ;

④ 积分, 即将乘积  $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$  进行积分, 积分的关键是确定积分限。一般是将  $f_1(\tau) f_2(t-\tau)$  不等于零的区间作为积分的上、下限, 而且当  $t$  取不同的值时, 不为零的区间有所变化, 因此要将  $t$  分成不同的区间来求卷积积分。下面举例说明卷积积分的图解法过程。

**例 2.4-4** 已知  $f_1(t) = u(t)$ ,  $f_2(t) = e^{-t}u(t)$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 并画出  $s(t)$  的波形。

**解:**  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  的波形如图 2.4-5 所示 (图中同时标注了  $f_1(\tau)$  与  $f_2(\tau)$ )。因为

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

所以需要将  $f_2(\tau)$  反褶成  $f_2(-\tau)$ , 如图 2.4-6 所示, 然后进行时移, 当时移量  $t$  为不同的值时, 积分结果是不同的, 为此要分不同的区间进行分析。

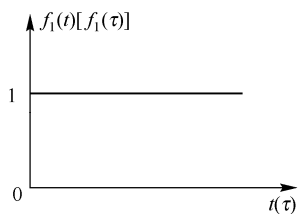


图 2.4-5 例 2.4-4 的信号

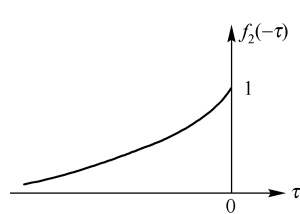
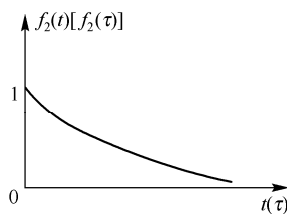


图 2.4-6  $f_2(-\tau)$  的波形

(1) 当  $t \leq 0$  时,  $f_2(t-\tau)$  的波形如图 2.4-7(a) 所示 (图中同时画出了  $f_1(\tau)$  的波形), 这时  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  无重叠部分, 因此  $f_1(\tau) f_2(t-\tau) = 0$ , 从而  $s(t) = f_1(t) * f_2(t) = 0$ 。

(2) 当  $t \geq 0$  时,  $f_2(t-\tau)$  与  $f_1(\tau)$  的波形如图 2.4-7(b) 所示, 这时  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  的重叠区域为  $[0, t]$ , 因此

$$s(t) = \int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t}$$

归纳以上结果得  $s(t) = f_1(t) * f_2(t) = (1 - e^{-t})u(t)$   
 $s(t)$  的波形如图 2.4-8 所示。

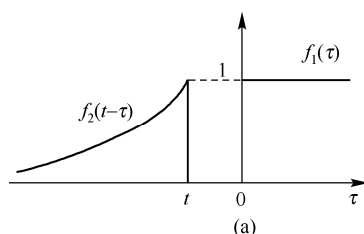


图 2.4-7 卷积积分的图解法过程

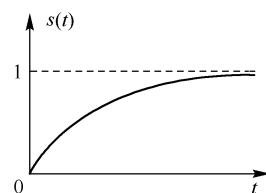
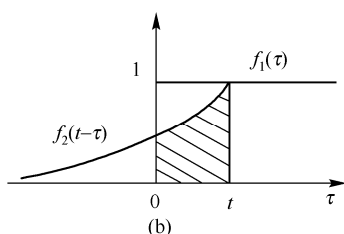


图 2.4-8  $s(t)$  的波形

**例 2.4-5** 已知  $f_1(t) = u(t) - u(t-T)$ ,  $f_2(t) = e^{-t}u(t)$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 并画出  $s(t)$  的波形。

**解:** 图 2.4-9(a), (b) 和 (c) 分别画出了  $f_1(t)$  [ $f_1(\tau)$ ],  $f_2(t)$  [ $f_2(\tau)$ ] 和  $f_2(-\tau)$  的波形。按  $t$  的不同取值可按如下区间进行分析。

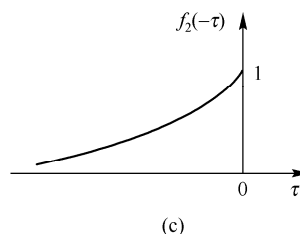
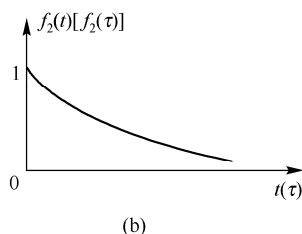
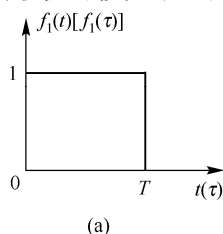


图 2.4-9 例 2.4-5 的信号波形

(1) 当  $t \leq 0$  时,  $f_2(t-\tau)$  及  $f_1(\tau)$  的波形如图 2.4-10(a) 所示, 由图可知, 此时  $f_2(t-\tau)$  与  $f_1(\tau)$  没有重叠部分, 所以  $f_1(\tau) f_2(t-\tau) = 0$ , 即  $s(t) = 0$ 。

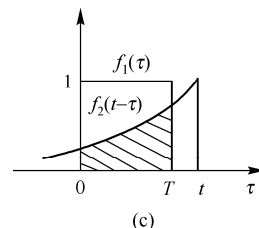
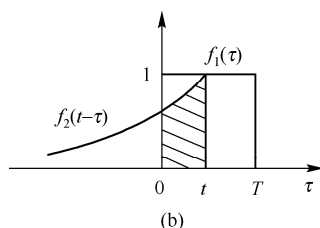
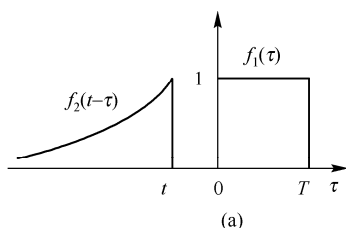


图 2.4-10 卷积积分的图解法过程

(2) 当  $0 \leq t \leq T$  时,  $f_2(t-\tau)$  及  $f_1(\tau)$  的波形如图 2.4-10(b) 所示, 此时  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  的重叠区域为  $[0, t]$ , 所以

$$s(t) = \int_0^t 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = 1 - e^{-t}$$

(3) 当  $t \geq T$  时,  $f_2(t-\tau)$  与  $f_1(\tau)$  的波形如图 2.4-10(c) 所示, 此时  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  的重叠

区域为 $[0, T]$ ，所以

$$s(t) = \int_0^T 1 \cdot e^{-(t-\tau)} d\tau = e^{-(t-T)} - e^{-t}$$

归纳以上结果得

$$s(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t} & 0 \leq t \leq T \\ e^{-(t-T)} - e^{-t} & t \geq T \end{cases}$$

$$= (1 - e^{-t})[u(t) - u(t - T)] + [e^{-(t-T)} - e^{-t}]u(t - T)$$

$$= (1 - e^{-t})u(t) - [1 - e^{-(t-T)}]u(t - T)$$

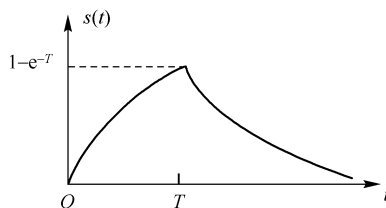


图 2.4-11  $s(t)$  的波形

$s(t)$  的波形如图 2.4-11 所示。

**例 2.4-6** 已知  $f_1(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u(t - 2)$ ,  $f_2(t) = 2t[u(t) - u(t - 1)]$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

**解:** 图 2.4-12 给出了  $f_1(t)$  [ $f_1(\tau)$ ],  $f_2(t)$  [ $f_2(\tau)$ ],  $f_2(-\tau)$  和  $f_2(t - \tau)$  的波形。然后将  $t$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  变化, 求  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t - \tau)$  相乘后不为零的区间, 并求二信号相乘后的函数  $f_1(\tau) f_2(t - \tau)$  的线下面积, 注意在不同  $t$  值时不为零的区间的变化。卷积积分的结果如下:

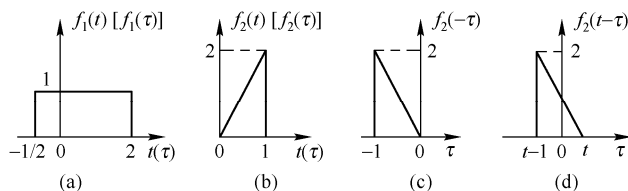


图 2.4-12 例 2.4-6 的信号及反褶、时移信号的波形

(1) 当  $t < -1/2$  时, 如图 2.4-13 (a) 所示。由于  $f_1(\tau) f_2(t - \tau) = 0$ , 所以,  $s(t) = 0$ 。

(2) 当  $t \geq -1/2$  和  $t - 1 \leq -1/2$ , 即  $-1/2 \leq t \leq 1/2$  时, 如图 2.4-13 (b) 所示。  $f_1(\tau) f_2(t - \tau)$  不为零的区间为  $-1/2 \leq \tau \leq t$ , 有

$$s(t) = \int_{-1/2}^t 2(t - \tau) d\tau = (2t\tau - \tau^2) \Big|_{-1/2}^t = t^2 + t + \frac{1}{4}$$

(3) 当  $t \leq 2$  和  $t - 1 \geq -1/2$ , 即  $1/2 \leq t \leq 2$  时, 如图 2.4-13 (c) 所示。  $f_1(\tau) f_2(t - \tau)$  不为零的区间为  $t - 1 \leq \tau \leq t$ , 有

$$s(t) = \int_{t-1}^t 2(t - \tau) d\tau = (2t\tau - \tau^2) \Big|_{t-1}^t = 1$$

(4) 当  $t \geq 2$  和  $t - 1 \leq 2$ , 即  $2 \leq t \leq 3$  时, 如图 2.4-13 (d) 所示。  $f_1(\tau) f_2(t - \tau)$  不为零的区间为  $t - 1 \leq \tau \leq 2$ , 有

$$s(t) = \int_{t-1}^2 2(t - \tau) d\tau = (2t\tau - \tau^2) \Big|_{t-1}^2 = -t^2 + 4t - 3$$

(5) 当  $t - 1 > 2$ , 即  $t > 3$  时, 如图 2.4-13 (e) 所示。有

$$f_1(\tau) f_2(t - \tau) = 0, \quad s(t) = 0$$

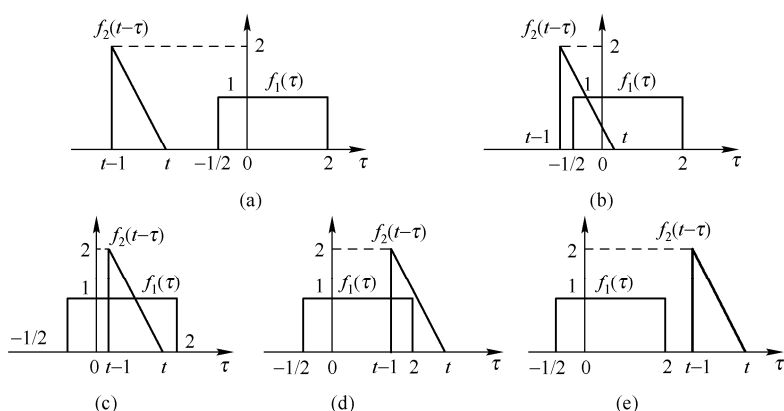


图 2.4-13 卷积积分的图解法求解过程

所以

$$s(t) = \begin{cases} t^2 + t + 1/4, & -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq t \leq 2 \\ -t^2 + 4t - 3, & 2 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$s(t)$  的波形如图 2.4-14 所示。

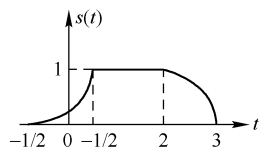


图 2.4-14  $s(t)$  的波形

**例 2.4-7** 已知  $f_1(t) = e^{2t}u(-t)$ ,  $f_2(t) = u(t-3)$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

**解：**图 2.4-15(a), (b)和(c)分别画出了  $f_1(t)$  [ $f_1(\tau)$ ],  $f_2(t)$  [ $f_2(\tau)$ ]及  $f_2(-\tau)$  的波形。注意  $f_2(-\tau)$  时移的起始点是-3, 这不同于前几例的情况。按  $t$  的不同取值可按如下区间进行分析。

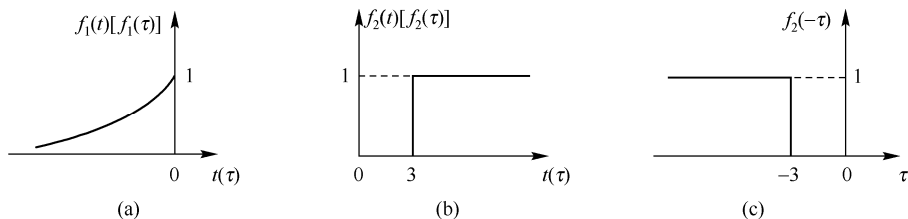


图 2.4-15 例 2.4-7 的信号及反褶信号的波形

(1) 当  $t-3 \leq 0$ , 即  $t \leq 3$  时, 如图 2.4-16(a)所示。

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t-3} e^{2\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{2(t-3)}$$

(2) 当  $t-3 \geq 0$ , 即  $t \geq 3$  时, 如图 2.4-16(b)所示。

$$s(t) = \int_{-\infty}^0 e^{2\tau} d\tau = 1/2$$

所以

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{2(t-3)}, & t \leq 3 \\ 1/2, & t \geq 3 \end{cases}$$

$s(t)$  的波形如图 2.4-17 所示。

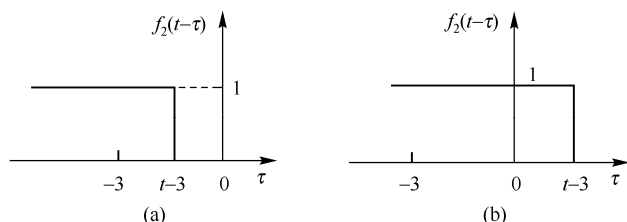


图 2.4-16 卷积积分的图解求解过程

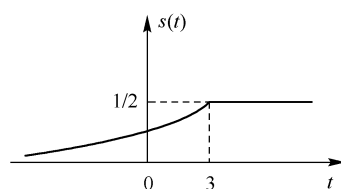


图 2.4-17  $s(t)$  的波形

## (2) 卷积积分的性质

卷积积分有许多重要性质，利用这些性质可以使某些运算简化。

### ① 代数性质

#### ● 交换律 (commutative law)

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \quad (2.4-5)$$

此性质采用积分变量代换即可方便证明。该性质说明，函数在卷积积分中的次序是可以任意交换的。即保持  $f_1(\tau)$  不变，而将  $f_2(\tau)$  进行反褶并时移，这样  $f_1(\tau)$  与  $f_2(t-\tau)$  相乘以后所得函数的线下面积，与保持  $f_2(\tau)$  不变、而将  $f_1(\tau)$  进行反褶并时移再相乘以后所得函数  $f_2(\tau) f_1(t-\tau)$  的线下面积相同，即卷积积分相等。

#### ● 分配律 (distributive law)

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t) \quad (2.4-6)$$

#### ● 结合律 (associative law)

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)] \quad (2.4-7)$$

根据卷积的定义很容易证明分配律和结合律。

### ② 微分与积分

两函数卷积后的微分等于其中一个函数的微分与另一个函数的卷积，其表达式为

$$\frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{df_1(t)}{dt} * f_2(t) = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt} \quad (2.4-8)$$

$$\text{证明: } \frac{d}{dt}[f_1(t) * f_2(t)] = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \frac{df_2(t-\tau)}{dt} d\tau = f_1(t) * \frac{df_2(t)}{dt}$$

利用交换律同样可以证明另一式。

两函数卷积后的积分等于其中一个函数的积分与另一函数的卷积，即

$$\int_{-\infty}^t [f_1(\lambda) * f_2(\lambda)] d\lambda = f_1(t) * \left[ \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \right] = \left[ \int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda \right] * f_2(t) \quad (2.4-9)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \int_{-\infty}^t [f_1(\lambda) * f_2(\lambda)] d\lambda &= \int_{-\infty}^t \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(\lambda-\tau) d\tau \right] d\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^t f_2(\lambda-\tau) d\lambda \right] d\tau \\ &= f_1(t) * \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \end{aligned}$$

利用交换律同样可证另一式。

经过类似的推导, 可以导出卷积积分的高阶导数或多重积分之运算规律。

设  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 则

$$s^{(i)}(t) = f_1^{(j)}(t) * f_2^{(i-j)}(t) \quad (2.4-10)$$

这里,  $i, j$  取正整数时为导数的阶次, 取负整数时为重积分的次数。一个常用的例子是

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{df_1(t)}{dt} * \left[ \int_{-\infty}^t f_2(\lambda) d\lambda \right] = \left[ \int_{-\infty}^t f_1(\lambda) d\lambda \right] * \frac{df_2(t)}{dt} \quad (2.4-11)$$

### ③ 与冲激函数或阶跃函数的卷积

函数  $f(t)$  与冲激信号  $\delta(t)$  的卷积仍为  $f(t)$  本身, 即

$$f(t) * \delta(t) = f(t) \quad (2.4-12)$$

类似地还有

$$f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0) \quad (2.4-13)$$

即信号  $f(t)$  与  $\delta(t - t_0)$  的卷积相当于把信号  $f(t)$  延迟  $t_0$ 。利用卷积定义和冲激信号的取样特性很容易证明以上两式。

此外, 利用卷积的微分、积分特性可得到以下结论:

$$\text{与单位阶跃函数 } u(t) \text{ 的卷积} \quad f(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \quad (2.4-14)$$

$$\text{推广到一般情况可得} \quad f(t) * \delta^{(k)}(t) = f^{(k)}(t) \quad (2.4-15)$$

$$f(t) * \delta^{(k)}(t - t_0) = f^{(k)}(t - t_0) \quad (2.4-16)$$

式中,  $k$  表示求导或求重积分的次数, 当  $k$  取正整数时表示导数阶次,  $k$  取负整数为重积分的次数。

利用信号  $f(t)$  与冲激函数的卷积的特性[式(2.4-12)及式(2.4-13)], 以及微积分特性[式(2.4-11)], 可以使卷积积分的计算变得比较简单。下面举例说明。

**例 2.4-8** 已知  $f_1(t) = u(t) - u(t - 2)$ ,  $f_2(t) = 2[u(t) - u(t - 3)]$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ 。

**解:**  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  的波形如图 2.4-18 所示。

对  $f_1(t)$  进行微分, 而对  $f_2(t)$  进行积分, 得

$$\frac{df_1(t)}{dt} = \delta(t) - \delta(t - 2)$$

$$F_2(t) = \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau = 2t[u(t) - u(t - 3)] + 6u(t - 3)$$

$\frac{df_1(t)}{dt}$  及  $F_2(t)$  的波形如图 2.4-19 所示, 则

$$\begin{aligned} s(t) &= f_1(t) * f_2(t) = \frac{df_1(t)}{dt} * \int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau \\ &= [\delta(t) - \delta(t - 2)] * F_2(t) = F_2(t) - F_2(t - 2) \end{aligned}$$

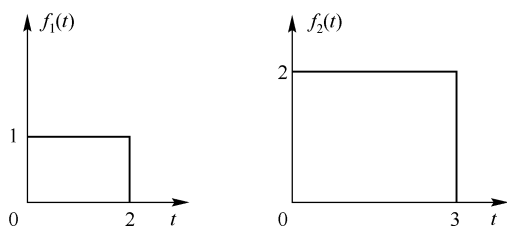


图 2.4-18 例 2.4-8 的信号波形

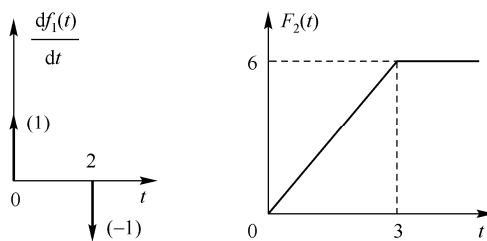


图 2.4-19 二信号微分和积分的波形

则合成波形如图 2.4-20 所示。

从例 2.4-8 可以看出, 利用式(2.4-11)来间接计算两函数的卷积比较简单。但要注意, 式(2.4-11)并不适合于任何函数。只有当需要求导数的函数(例如  $f_1(t)$ )经求导为  $\frac{df_1(t)}{dt}$ , 再经积分  $\int_{-\infty}^t \frac{df_1(\tau)}{d\tau} d\tau$  后, 能够得到原函数  $f_1(t)$  的情况下, 才能使用式(2.4-11)来求两函数的卷积, 否则就不能直接使用该式。

#### ④ 时移特性

若  $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 则

$$f_1(t-t_1) * f_2(t-t_2) = f_1(t-t_2) * f_2(t-t_1) = f(t-t_1-t_2) \quad (2.4-17)$$

**例 2.4-9** 已知  $f_1(t) = u(t)$ ,  $f_2(t) = e^{-(t-1)}u(t-1)$ , 求  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ , 并画出  $s(t)$  的波形。

**解:** 该例与例 2.4-4 做比较可知, 本例中的  $f_1(t)$  与例 2.4-4 中的  $f_1(t)$  相同, 而本例中的  $f_2(t)$  是将例 2.4-4 中的  $f_2(t)$  右移 1 得到的, 所以根据卷积的时移特性及例 2.4-4 的结果, 可以直接写出  $s(t)$  的表达式

$$s(t) = [1 - e^{-(t-1)}]u(t-1)$$

$s(t)$  的波形如图 2.4-21 所示。

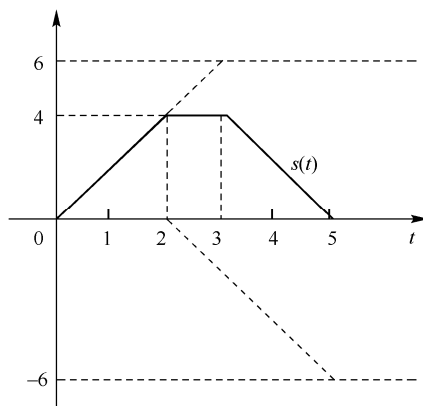


图 2.4-20 波形的合成

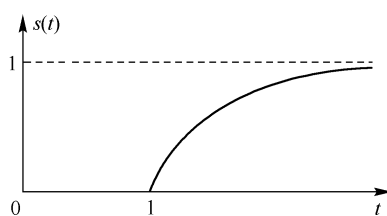


图 2.4-21  $s(t)$  的波形

## 2.5 信号的分解

在进行信号分析与处理的过程中, 往往将一些比较复杂的信号分解为简单信号之和。就像在力学中, 根据需要可将任一方向的力分解为几个分力一样。

### 1. 偶分量与奇分量

偶分量 (even component) 的定义为

$$f_e(t) = f_e(-t) \quad (2.5-1)$$

奇分量 (odd component) 的定义为

$$f_o(t) = -f_o(-t) \quad (2.5-2)$$

任何信号都可分解为偶分量与奇分量两部分之和, 即

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t) \quad (2.5-3)$$

为了求出偶分量与奇分量的表达式, 为此, 将式(2.5-3)中的  $t$  用  $-t$  代替, 则

$$f(-t) = f_e(-t) + f_o(-t) = f_e(t) - f_o(t) \quad (2.5-4)$$

由式(2.5-3)与式(2.5-4)可求得

$$f_e(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \quad (2.5-5)$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)] \quad (2.5-6)$$

图 2.5-1 示出了信号分解为偶分量与奇分量的实例。

## 2. 脉冲分量

图 2.5-2(a)所示的光滑曲线为任意信号  $f(t)$ ，可以用一系列矩形脉冲相叠加的阶梯信号来近似表示。这种分割方法称为纵向分割。将时间轴等分为小区间  $\Delta t$  作为各矩形脉冲的宽度，各脉冲的高度分别等于它左侧边界对应的函数值。这种分割法所产生的误差完全取决于时间间隔  $\Delta t$  的大小。 $\Delta t$  越小，误差则越小，当  $\Delta t \rightarrow 0$  的极限情况下，误差也趋于零，阶梯信号就变成了光滑曲线  $f(t)$ 。

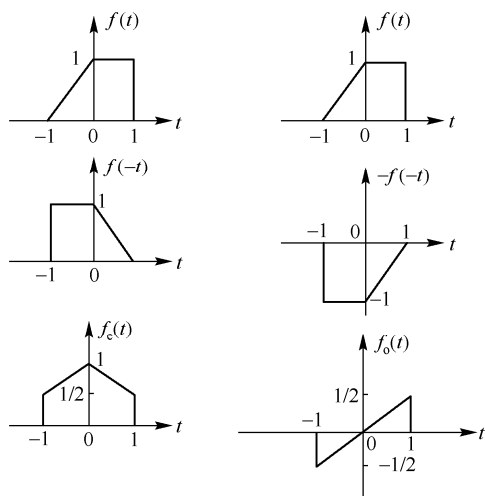


图 2.5-1 信号的偶分量与奇分量

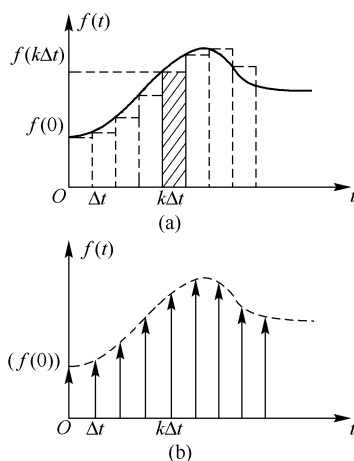


图 2.5-2 信号分解为冲激信号之和

当  $t = 0$  时，对应的矩形脉冲表达式为

$$f(0)[u(t) - u(t - \Delta t)]$$

将上式分子、分母同乘以  $\Delta t$ ，并取  $\Delta t \rightarrow 0$  的极限，则有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(0)[u(t) - u(t - \Delta t)]}{\Delta t} \Delta t$$

注意到  $\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [u(t) - u(t - \Delta t)]$ ，所以

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(0)[u(t) - u(t - \Delta t)]}{\Delta t} \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(0) \delta(t) \Delta t$$

上式说明  $t = 0$  时的矩形脉冲在  $\Delta t \rightarrow 0$  时转化成了冲激信号。

当  $t = k\Delta t$  时，对应的矩形脉冲表达式为

$$f(k\Delta t)\{u(t - k\Delta t) - u[t - (k+1)\Delta t]\}$$

上式分子、分母同乘以  $\Delta t$ ，并取  $\Delta t \rightarrow 0$  的极限

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(k\Delta t)\{u(t - k\Delta t) - u[t - (k+1)\Delta t]\}}{\Delta t} \Delta t$$



$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \Delta t \quad (2.5-7)$$

注意上式中  $\delta(t - k\Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{u(t - k\Delta t) - u[t - (k+1)\Delta t]\}$

式(2.5-7)说明,  $t = k\Delta t$  处的矩形脉冲在  $\Delta t \rightarrow 0$  时也转换成了冲激信号。

最后, 将上述无穷多个矩形脉冲 (即冲激信号) 叠加就得到  $f(t)$  的表达式, 即

$$f(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \Delta t \quad (2.5-8)$$

上式说明,  $f(t)$  可以表示成一系列冲激函数之和, 在波形上表现为当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 图 2.5-2(a) 中的各矩形脉冲就转化为图 2.5-2(b) 中的冲激信号。

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 可将  $\Delta t$  写成  $d\tau$ , 而  $k\Delta t$  写成  $\tau$ , 同时对各项取和将转化为取积分, 即

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (2.5-9)$$

式(2.5-9)就是将任意信号表示为无限多个冲激函数叠加的积分。

### 3. 阶跃分量

图 2.5-3 中的光滑曲线代表任意函数  $f(t)$ 。图中将  $f(t)$  分解为一系列的阶跃函数之和来逼近。也就是说, 用图中的阶梯信号来近似地表示  $f(t)$ 。这种分割方法称为横向分割。

当  $t = 0$  时,  $f(t)$  的起始值是  $f(0)$ , 所以第一个阶跃函数为  $f_0(t) = f(0)u(t)$ 。

当  $t = \Delta t$  时, 在第一个阶跃之上叠加第二个阶跃, 其阶跃高度是  $f(\Delta t) - f(0)$ , 所以, 第二个阶跃函数为

$$\begin{aligned} f_1(t) &= [f(\Delta t) - f(0)]u(t - \Delta t) = \frac{f(\Delta t) - f(0)}{\Delta t} \Delta t u(t - \Delta t) \\ &= \left. \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} \right|_{t=\Delta t} \Delta t u(t - \Delta t) \end{aligned}$$

同理, 当  $t = k\Delta t$  时, 第  $k+1$  个阶跃函数为

$$\begin{aligned} f_k(t) &= [f(k\Delta t) - f(k\Delta t - \Delta t)]u(t - k\Delta t) \\ &= \frac{f(k\Delta t) - f(k\Delta t - \Delta t)}{\Delta t} \Delta t u(t - k\Delta t) \\ &= \left. \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} \right|_{t=k\Delta t} \Delta t u(t - k\Delta t) \end{aligned}$$

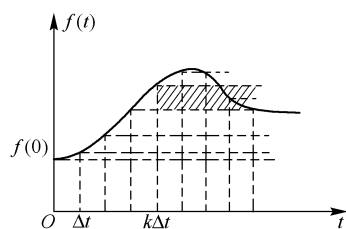


图 2.5-3 信号分解为阶跃信号之和

将上述各阶跃函数  $f_0(t), f_1(t), \dots, f_k(t), \dots, f_n(t)$  叠加起来, 就是  $f(t)$  的近似表达式, 即

$$f(t) \approx f(0)u(t) + \sum_{k=1}^n \left. \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} \right|_{t=k\Delta t} \Delta t u(t - k\Delta t) \quad (2.5-10)$$

这样, 利用上式就将任意信号近似地表示为阶跃信号的叠加形式, 所产生的误差完全取决于时间间隔  $\Delta t$  的大小,  $\Delta t$  越小, 误差则越小。当  $\Delta t \rightarrow 0$  的极限情况下, 误差也趋于零, 阶跃信号就变成了光滑曲线  $f(t)$ 。

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 可将  $\Delta t$  写成  $d\tau$ , 而式(2.5-10)中的不连续变量  $k\Delta t$  将变为连续变量  $\tau$ , 代表阶跃高度的函数增量  $\Delta f(t)$  将成为无穷小量  $df(\tau)$ , 这样在式(2.5-10)中  $\left. \frac{\Delta f(t)}{\Delta t} \right|_{t=k\Delta t} \rightarrow \frac{df(\tau)}{d\tau}$ 。

同时，对各项求和则变为求积分，与此同时近似式变为等式，即

$$f(t) = f(0)u(t) + \int_{0^+}^t \frac{df(\tau)}{d\tau} u(t-\tau) d\tau \quad (2.5-11)$$

上式中积分下限之所以取  $0^+$ ，是因为在  $t=0$  处的阶跃  $f(0)u(t)$  已单独写出。

式(2.5-11)表示在时域中可将任意函数表示为无限多个阶跃函数相叠加的叠加积分。

#### 4. 正交函数分量

如果用正交函数集 (set of orthogonal function) 来表示一个信号，那么，组成信号的分量就是相互正交的。例如，各次谐波的正弦与余弦信号构成的三角函数集就是正交函数集。任何周期信号  $\tilde{f}(t)$  只要满足狄里赫利条件，就可以由这些三角函数的线性组合来表示，称为  $\tilde{f}(t)$  的三角形式的傅里叶级数。同理， $\tilde{f}(t)$  还可以展开成正交复指数集构成的指数形式的傅里叶级数。有关傅里叶级数的具体形式将在 3.1 节中叙述。

此外，还存在许多类型的正交函数集，如勒让德 (Legendre) 多项式、沃尔什 (Walsh) 函数集、拉德马赫 (Rademacher) 函数集、雅可比 (Jacobi) 多项式、切比雪夫 (Chebycher) 多项式等。

## 2.6 MATLAB 的操作界面及连续信号的表示

### 1. MATLAB 的操作界面

启动 MATLAB 后，系统将打开如图 2.6-1 所示的默认操作界面 (Desktop)。与大多数 Windows 软件相似，同样存在标题栏、菜单栏、工具栏和状态栏，它为用户提供了集成的交互式图形界面。

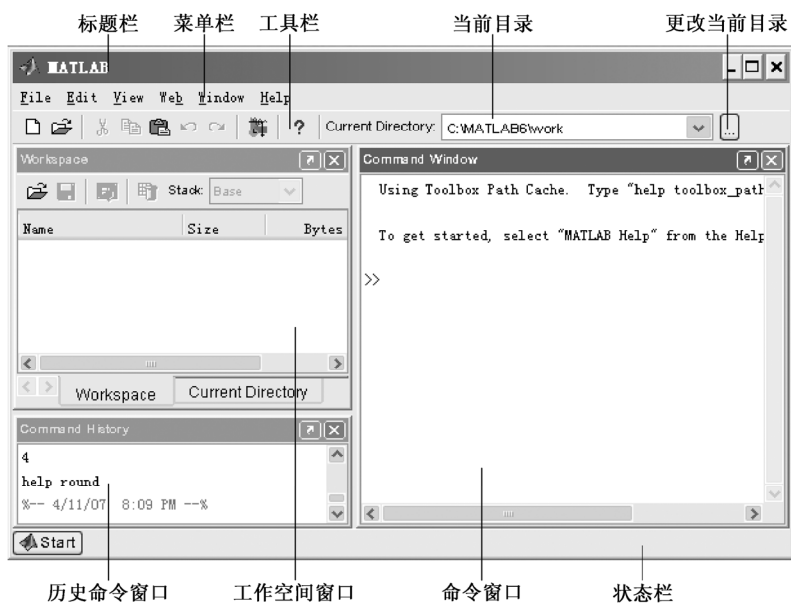


图 2.6-1 MATLAB 的操作界面

在 MATLAB 操作界面中，窗口是 MATLAB 操作界面的重要组成部分，由命令窗口（Command Window）、工作空间窗口（Workspace）、当前目录窗口（Current Directory）和历史命令窗口（Command History）组成。MATLAB 的其他窗口可以通过界面的 View 菜单设置。

工作空间是 MATLAB 为保存工作过程中的变量和数据而在内存开辟的一块存储区域。工作空间窗口列出了当前工作空间中所有变量的详细信息，包括矩阵的大小、字节数和类型，在工作空间中双击指定的变量，并对各元素进行浏览和编辑。工作空间在 MATLAB 启动时空，退出时，工作空间的内容将不再保留。为了保存工作空间的数据，可以用文件菜单中的“Save Workspace As”实现，下次启动 MATLAB 时，用文件菜单中的“Import Data”加载到当前工作空间。

当前目录窗口列出了当前工作目录下的所有文件，用户可以在此窗口中更改和设置 MATLAB 的当前工作目录。

命令历史窗口会列出用户前面所执行过的 MATLAB 命令，在该窗口中双击选定的命令，即可重复执行该命令。

命令窗口是用户使用 MATLAB 的主要窗口。MATLAB 通过命令窗口为用户提供交互式的工作环境，用户可随时输入命令，MATLAB 即时给出运算结果。

## 2. MATLAB 语言及 M 文件方式

MATLAB 语言是 MATLAB 系统的组成部分，它是一个基于矩阵运算的快速解释性高级语言。它不用经过编译和链接，可以直接运行，其效率远远高于其他高级语言。

MATLAB 通过运行 MATLAB 语句来执行用户的操作。它可以提供两种基本的工作方式：

- 命令行方式可以完成简单的用户任务，它是一种交互式的工作方式。用户在命令窗口直接输入 MATLAB 命令并按回车后，系统执行该命令同时给出结果。若需要多条命令才能完成，则需在命令窗口中逐条输入相应命令才行。
- M 文件方式是指用户需要运行的一组命令，以 MATLAB 的专用文件格式——M 文件格式进行保存，用户通过 M 文件来执行相应的命令。M 文件是 MATLAB 专用的 ASCII 码文本文件，用来保存用户需要一次执行的多条 MATLAB 命令。对已存在的 M 文件，用户可以在命令窗口直接输入文件名并回车，系统将搜索并逐一运行该文件中的命令。

M 文件分为 M 脚本文件（Script file）和 M 函数文件两种类型，相当于 C 语言中的主程序（主函数）和子程序（子函数）。

M 脚本文件由 MATLAB 的命令行构成 ASCII 码文本文件。运行 M 脚本文件相当于在命令窗口中按 M 脚本文件的顺序逐条输入并运行；M 脚本文件在运行过程中生成的所有变量均驻留在工作空间中，所有的命令和文件共享这些变量；M 脚本文件的扩展名为“\*.m”。

M 函数文件也是由 MATLAB 的命令行构成的 ASCII 码文本文件，扩展名为“\*.m”，用户可以通过输入参量和输出参量来调用 M 函数文件。它由四个部分组成：

① 函数说明语句：位于 M 函数文件的第一行，必须以关键字“function”开头，格式如下：

```
function [输出参数 1, 输出参数 2, ...] = 函数名 (输入参数 1, 输入参数 2, ...)
```

M 函数文件保存的文件名应与用户定义的函数名一致，输入参数和输出参数并不是必需的。

② 帮助文本行：是紧随函数说明语句之后以注释符%开头的第一注释行。该行包括大写体的函数名和函数功能的简要描述。

③ 在线帮助文本区：在帮助文本行之后以%开头的若干注释行。所有注释行通过 help 命令进行函数在线帮助查询时显示。

④ 函数体：是实现该 M 函数文件功能的 MATLAB 命令组合。

M 函数文件所定义的变量为内部变量，又称局部变量，函数运行结束后，函数中定义的变量不再保存；若用户需要在多个 M 函数文件中使用相同的变量，可以定义全局变量，由指令“global”实现。

MATLAB 为用户提供了专用的 M 文件编辑器，用户可以进行 M 文件的创建、保存、编辑和调试等工作。

### 3. 连续信号的波形与运算

从严格意义上说，MATLAB 处理连续信号是采用信号在等间隔点的采样值来近似表示的，当采样间隔足够小时，可以看成连续信号的近似。MATLAB 处理连续信号采用两种方式：一种是用向量的方法表示出信号，另一种是用符号运算的方法来表示。

为了编程方便，在工作目录下，定义函数 Heaviside 表示单位阶跃信号，其函数程序如下：

```
function f = Heaviside(t)
f = (t>0);           % t>0 时 f 为 1，否则为 0
```

**例 2.6-1** 绘制单位阶跃信号  $u(t)$ 、指数信号  $Ae^{at}u(t)$  ( $A=1$ ,  $a=-0.4$ )、正弦信号  $A\sin(\Omega t + \theta)u(t)$  ( $A=5$ ,  $\Omega=0.5\pi$ ,  $\theta=0$ ) 和抽样函数  $Sa(t)$  的时域波形。

**解：**用向量表示法编写程序，完成上述信号的时域波形绘制，其程序 exec201.m 清单如下，时域波形如图 2.6-2 所示。

```
%绘制单位阶跃信号
t = -5:0.01:5;                                %横坐标-5 到 5，量化值为 0.01
y1 = Heaviside(t); subplot(2,2,1);            %调用函数 Heaviside，图形窗口四等分
plot(t,y1); axis([-5,5,-0.5,1.5]);            %plot 函数绘制连续曲线，定义坐标范围
xlabel('t');ylabel('u(t)');title('单位阶跃信号');
%绘制指数信号
t = 0:0.01:10; A = 1; a = -0.4; y2 = A*exp(a*t);
subplot(2,2,2); plot(t,y2); axis([0,10,-0.5,1.5]);
xlabel('t');ylabel('exp(-0.4t)');title('指数信号');
%绘制正弦信号
A = 5; w = 0.5*pi; t = 0:0.01:16; y3 = A*sin(w*t);
subplot(2,2,3); plot(t,y3); title('正弦信号');
xlabel('t');ylabel('5sin(Omegat)'); axis([0,16,-5,5]);
line([0,16], [0,0]);                          %画横坐标
%绘制抽样信号
t = -15:0.01:15; t1 = t/pi; y4 = sinc(t1);
subplot(2,2,4); plot(t,y4); title('抽样信号'); xlabel('t');
ylabel('sinc(t)'); axis([-15,15,-0.3,1.1]); line([-15,15], [0,0]);
```

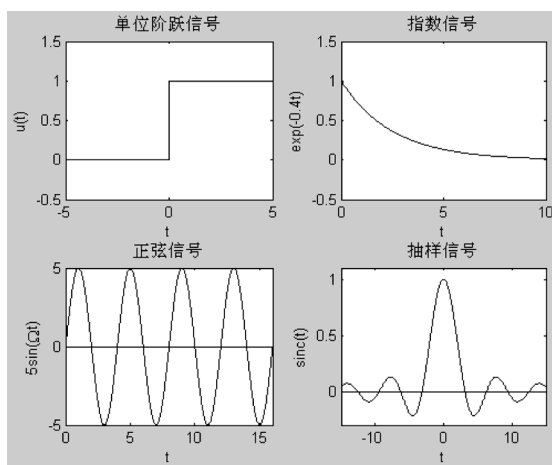


图 2.6-2 典型信号的时域波形

**例 2.6-2** 两个信号分别为： $f_1(t) = 0.5t[u(t) - u(t-4)]$ ， $f_2(t) = \sin(4\pi t)$ ，用 MATLAB 绘制这两个信号，同时绘制两信号的和与积的波形。

**解：**用符号运算方法绘制上述时域波形，程序 exec202.m 清单如下，波形如图 2.6-3 所示。

```
syms t;                                %定义符号变量
f1 = 0.5*t*sym('Heaviside (t)- Heaviside (t-4)'); %信号 f1(t)的符号表达式
f2 = sym('sin(4*pi*t)');               %信号 f2(t)的符号表达式
f3 = f1+f2;f4 = f1*f2;                 %两信号相加、相乘
subplot(2,2,1);ezplot(f1,-1,6);        %符号函数二维作图
title('f1(t)=0.5t[u(t)-u(t-4)]');axis([-1,6,-0.2,2.2]);
subplot(2,2,2);ezplot(f2);title('f2(t) = sin(4*pi*t)');
subplot(2,2,3);ezplot(f3);title('f1(t)+f2(t)');
subplot(2,2,4);ezplot(f4);title('f1(t)*f2(t)');
axis([-6,6,-2,2]);
```

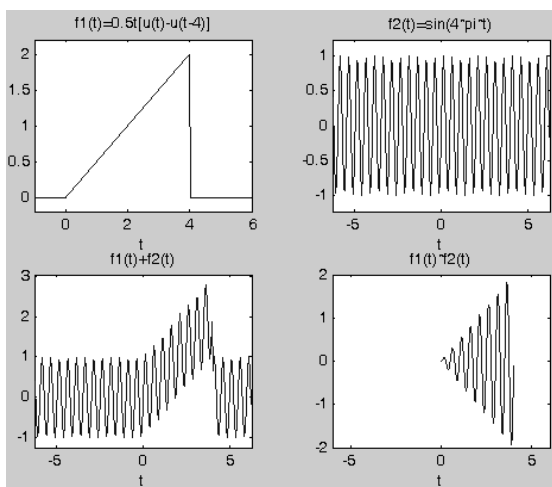


图 2.6-3 信号运算的时域波形

**例 2.6-3** 已知连续信号  $f(t)$  的时域波形如图 2.6-4 所示，用 MATLAB 绘制以下时域变换信号的时域波形： $2f(0.5t)$ ， $f(-2t+3)$ ， $\frac{df(t)}{dt}$ ， $\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$ 。

解：由于  $f(t)$  求导后会出现无法直接绘图的冲激信号，只能先计算其导数，再绘图。其他三种信号可以用符号运算方法绘制其时域波形，程序 exec203.m 清单如下，波形如图 2.6-5 所示。

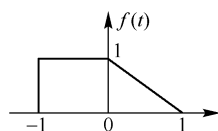


图 2.6-4 连续信号的波形

```
syms t;
f = sym('Heaviside(t+1)-t* Heaviside (t)+(t-1)* Heaviside (t-1)');
f1 = 2*subs(f,t,0.5*t); %符号函数变量替换
subplot(2,2,1);ezplot(f1,[-3,3]);title('f1(t) = 2f(0.5t)');
f2 = subs(f,t,-2*t+3); %符号函数变量替换
subplot(2,2,2);ezplot(f2,[0,3]);title('f2(t) = f(-2t+3)');
f3 = sym('- Heaviside (t)+ Heaviside (t-1)');subplot(2,2,3);ezplot(f3,[-2,2]);
line([-1,-1],[0,1]);axis([-2,2,-1.5,1.5]);title('f3(t) = df(t)/dt');
f4 = int(f); %积分函数
subplot(2,2,4);ezplot(f4,[-2,3]);title('f4(t) = ∫f(τ)dτ');
```

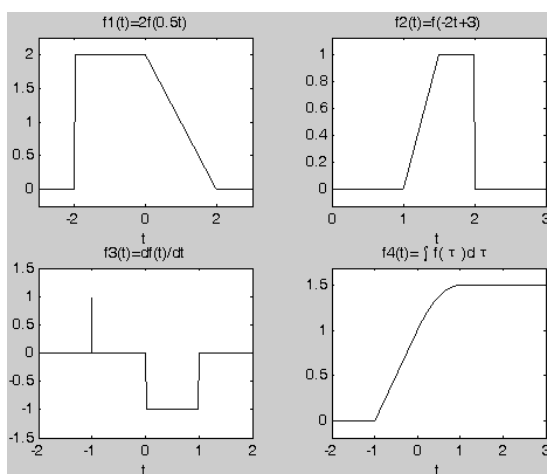


图 2.6-5 连续信号时域变换波形

## 习 题

2-1 绘出下列各时间函数的波形图。

(1)  $f_1(t) = u(t) - 2u(t-1) + u(t-2)$

(2)  $f_2(t) = -(t-1)[u(t) - u(t-1)]$

(3)  $f_3(t) = e^{-t} \cos 10\pi t [u(t-1) - u(t-2)]$

(4)  $f_4(t) = \frac{\sin 2(t - \pi/2)}{2(t - \pi/2)}$

2-2 绘出下列时间函数的波形图，注意它们的区别。

(1)  $f_1(t) = \sin t \cdot u(t)$

(2)  $f_2(t) = \sin(t-1) \cdot u(t)$

(3)  $f_3(t) = \sin t \cdot u(t-1)$

(4)  $f_4(t) = \sin(t-1) \cdot u(t-1)$

2-3 写出图题 2-3 所示各波形的函数式（用阶跃信号表示）。

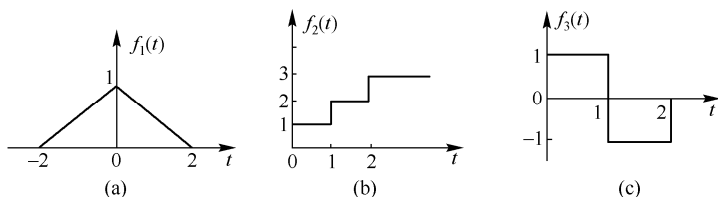


图 题 2-3

2-4 已知  $f(t)$  波形如图题 2-4 所示, 画出下列信号的波形图。

- (1)  $f_1(t) = f(3t - 6)$       (2)  $f_2(t) = f(-3t + 6)$       (3)  $f_3(t) = f(3t + 6)$   
 (4)  $f_4(t) = f\left(\frac{1}{3}t - \frac{1}{6}\right)$       (5)  $f_5(t) = f\left(-\frac{1}{3}t - \frac{1}{6}\right)$       (6)  $f_6(t) = f\left(\frac{1}{3}t + \frac{1}{6}\right)$

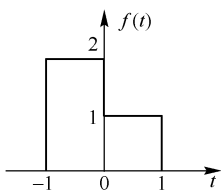


图 题 2-4

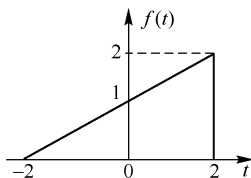


图 题 2-5

2-5 已知  $f(t)$  波形如图题 2-5 所示, 画出下列信号的波形图。

- (1)  $f_1(t) = f(t)u(t)$       (2)  $f_2(t) = f(t-3)u(t)$       (3)  $f_3(t) = f(2-t)$   
 (4)  $f_4(t) = f(2-t)u(2-t)$       (5)  $f_5(t) = f(-2-t)u(-t)$       (6)  $f_6(t) = f(t-1)[u(t)-u(t-2)]$

2-6 计算下列各式。

- (1)  $f(t+t_0)\delta(t)$       (2)  $\int_{-4}^2 e^t \delta(t+3)dt$       (3)  $\int_0^\infty e^{-t} \sin t \delta(t+1)dt$   
 (4)  $\frac{d}{dt}[e^{-t}\delta(t)]$       (5)  $\int_{-\infty}^\infty \delta(t-t_0)u(t-2t_0)dt$       (6)  $\int_{-\infty}^\infty e^{-j\Omega t}[\delta(t)-\delta(t-t_0)]dt$   
 (7)  $\int_{-\infty}^\infty e^{-t}[\delta(t)+\delta'(t)]dt$       (8)  $\int_{-\infty}^\infty (1-\cos t)u(t) \cdot \delta(t-\pi/2)dt$

2-7 已知  $f(2-t/2)$  的波形如图题 2-7 所示, 画出  $f(t)$  的波形图。

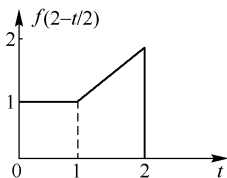


图 题 2-7

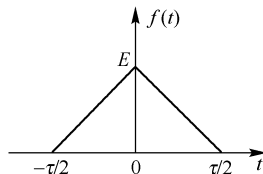


图 题 2-8

2-9 已知  $f(t) = e^{-t}u(t)$ , 求  $f'(t)$  的表达式, 并画出  $f'(t)$  的波形图。

\*\*2-10 画出下列各信号的波形, 并求各信号的一阶导数  $f'(t)$ 。

- (1)  $f_1(t) = |t|$       (2)  $f_2(t) = e^{|t|}$       (3)  $f_3(t) = \sin|t|$       (4)  $f_4(t) = e^{|t|} \sin|t|$

2-11 对下列函数进行积分运算:  $\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau$ , 并画出积分后的波形图。

- (1)  $f_1(t) = u(t-1) - u(t-3)$       (2)  $f_2(t) = \delta(t-1)$       (3)  $f_3(t) = \sin \pi t u(t)$

2-12 试求下列各函数  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  的卷积  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$

- (1)  $f_1(t) = e^{-at}u(t)$ ,  $f_2(t) = \sin t \cdot u(t)$   
 (2)  $f_1(t) = (1+t)[u(t)-u(t-1)]$ ,  $f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$

2-13 已知  $f_1(t) = u(t) - u(t-1)$ ,  $f_2(t) = u(t-1) - u(t-2)$ , 分别求  $s_1(t) = f_1(t) * f_1(t)$  和  $s_2(t) = f_2(t) * f_2(t)$ , 并画出  $s_1(t)$  和  $s_2(t)$  的波形。

2-14 已知  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  如图题 2-14 所示, 求  $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ , 并画出  $s(t)$  的波形。

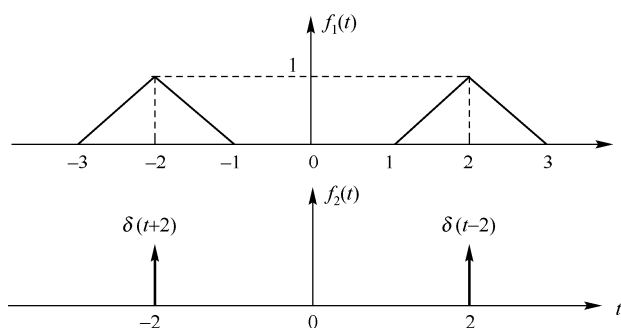


图 题 2-14

\*\*2-15 对图题 2-15 所示的各组信号, 求二信号的卷积  $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ , 并绘出  $s(t)$  的波形。

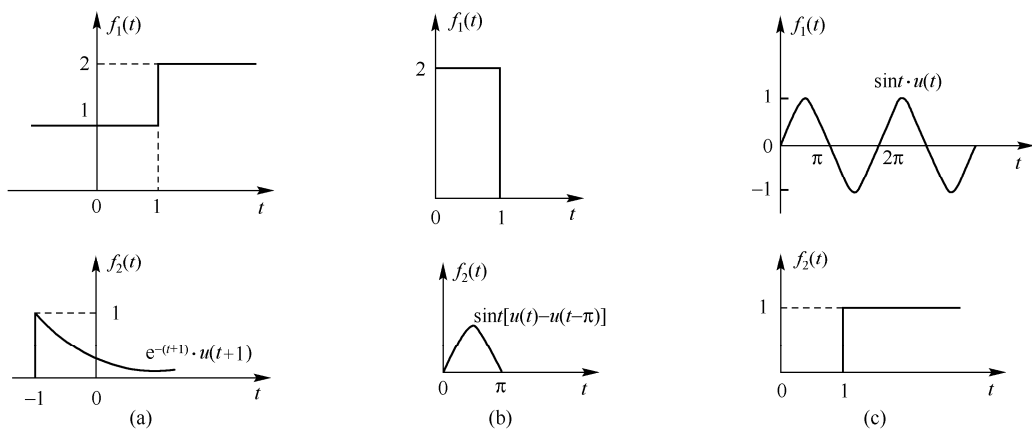


图 题 2-15

\*\*2-16 对图题 2-16 所示的各组信号, 求二信号的卷积  $s(t)=f_1(t)*f_2(t)$ , 并绘出  $s(t)$  的波形。

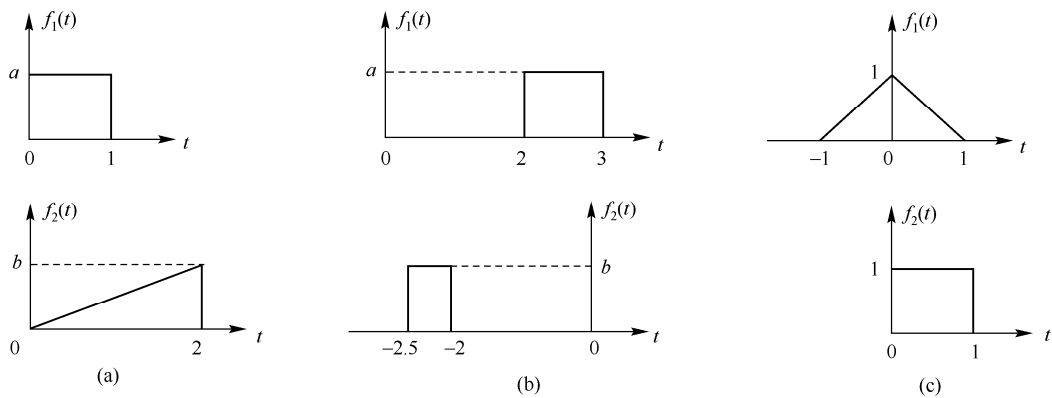


图 题 2-16

2-17 画出图题 2-17 所示各信号的偶分量和奇分量的波形。



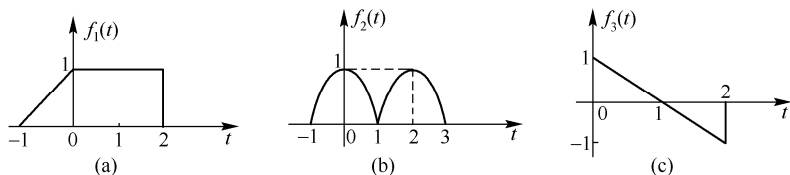


图 题 2-17

以下为 MATLAB 习题

2-18 利用 MATLAB 的向量表示法绘制下列连续信号的时域波形。

- (1)  $x_1(t) = u(t+2) - u(t-3)$                       (2)  $x_2(t) = \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$   
 (3)  $x_3(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})u(t-1)$                       (4)  $x_4(t) = (0.2t - 2)u(t)$

2-19 利用 MATLAB 的符号运算功能绘制上题连续信号的时域波形。

2-20 已知  $x(t) = \text{Sa}(t)$ ，试用 MATLAB 编程绘制下列信号的时域波形。

- (1)  $x_1(t) = x(2-2t)$                       (2)  $x_2(t) = x(2t+2)$   
 (3)  $x_3(t) = x(0.5t-1)$                       (4)  $x_4(t) = (1-0.5t)$

2-21 已知连续信号  $x(t)$  的时域波形如图题 2-21 所示，用 MATLAB 绘制下列时域变换信号的时域波形：

$$2x(3t), \quad x(-0.5t-1), \quad \frac{dx(t)}{dt}, \quad \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau.$$

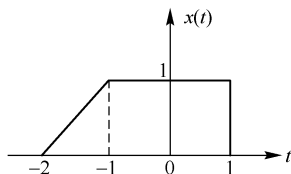


图 题 2-21

## 第3章 连续时间信号的变换域分析

在第2章中,我们讨论了连续时间信号的时域分析。在那里以冲激函数为基本信号,任意输入信号可分解为一系列冲激函数之和。本章将介绍连续时间信号的变换域分析,即傅里叶变换(Fourier transform)分析和拉普拉斯变换(Laplace transform)分析。傅里叶变换分析也称为频谱(frequency spectrum)分析或频域(frequency domain)分析,它以正弦函数(包括余弦函数)或复指数函数 $e^{j\Omega t}$ 为基本信号,任意信号可分解为一系列不同频率的正弦函数或复指数函数之和(对于周期信号)或积分(对于非周期信号),分解后的变量是频率 $f$ (或角频率 $\Omega$ )。而拉普拉斯变换分析又称为复频域分析或 $s$ 域分析,它是傅里叶变换分析的进一步推广。傅里叶变换是将时间信号 $f(t)$ 分解为无穷多项复指数信号 $e^{j\Omega t}$ 之和;而拉普拉斯变换是将任意信号分解为无穷多项复指数信号 $e^{st}$ 之和,其中 $s=\sigma+j\Omega$ ,称为复频率。

1822年法国数学家傅里叶(J. Fourier, 1768—1830)在研究热传导理论时发表了《热的分析理论》著作,提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理,奠定了傅里叶级数的理论基础。当今,傅里叶分析法已经成为信号分析与系统设计不可缺少的重要工具。傅里叶分析法不仅应用于电子工程及无线电技术领域之中,而且在力学、光学、量子物理等工程技术领域中也得到广泛应用。

19世纪末,英国工程师海维赛德(O. Heaviside)以其出色的工作成为拉普拉斯变换的先驱。后来人们在法国数学家拉普拉斯(B.S. Laplace)的著作中找到了依据,为此取名为拉普拉斯变换(简称拉氏变换)。拉氏变换分析法是分析连续线性时不变系统的有效工具,它具有如下突出优点:它把微分方程变换成代数方程(algebraic equation),并且可以自动引入起始状态,求出系统的全响应。拉氏变换还把时域中两函数的卷积运算转换成 $s$ 域中两函数的乘法运算。

### 3.1 周期信号的频谱分析——傅里叶级数

任何周期函数在满足狄里赫利条件下,均可以展开成用正交函数线性组合表示的无穷级数。如果正交函数集是三角函数集 $\{\cos n\Omega_1 t, \sin n\Omega_1 t\}$ 或复指数函数集 $\{e^{jn\Omega_1 t}\}$ ,则周期函数所展开的级数称为傅里叶级数(Fourier series)(简称傅氏级数)。前者称为三角形式的傅里叶级数(trigonometric Fourier series),后者称为指数形式的傅里叶级数(exponential Fourier series),它们是傅里叶级数两种不同的表示形式。下面将利用这一数学工具研究周期信号的频域特性,建立“信号频谱”的概念。

#### 3.1.1 三角形式的傅里叶级数

若周期信号 $\tilde{f}(t)$ (周期为 $T_1$ ,角频率 $\Omega_1=2\pi f_1=2\pi/T_1$ )满足狄里赫利条件,则它可以展开成三角形式的傅里叶级数,即

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(t) &= a_0 + a_1 \cos \Omega_1 t + a_2 \cos 2\Omega_1 t + \cdots + a_n \cos n\Omega_1 t + \cdots + \\
&\quad b_1 \sin \Omega_1 t + b_2 \sin 2\Omega_1 t + \cdots + b_n \sin n\Omega_1 t + \cdots \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t)
\end{aligned} \tag{3.1-1}$$

上式中的系数  $a_n$  和  $b_n$  称为傅里叶级数的系数，简称为傅里叶系数（Fourier coefficient），有

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \tilde{f}(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \tilde{f}(t) \cos n\Omega_1 t dt \\ b_n = \frac{2}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \tilde{f}(t) \sin n\Omega_1 t dt \end{cases} \tag{3.1-2}$$

其中  $n=1, 2, 3, \dots$ 。

为方便起见，通常积分区间  $(t_0, t_0 + T_1)$  取为  $(0, T_1)$  或  $(-T_1/2, T_1/2)$ 。

式(3.1-1)中的  $a_0$  实际上就是函数  $\tilde{f}(t)$  的平均值，也即直流分量(direct component)。当  $n=1$  时， $a_1 \cos \Omega_1 t$  和  $b_1 \sin \Omega_1 t$  合成一个角频率<sup>①</sup>为  $\Omega_1 = 2\pi/T_1$  的正弦分量，称为基波分量(fundamental component)， $\Omega_1$  称为基波频率。当  $n$  大于 1 时， $a_n \cos n\Omega_1 t$  和  $b_n \sin n\Omega_1 t$  合成一个角频率为  $n\Omega_1$  的正弦分量，称为  $n$  次谐波分量 (nth harmonic component)， $n\Omega_1$  称为  $n$  次谐波频率。

通常可将式(3.1-1)中同频率的正弦项与余弦项加以合并，得到另一种三角形式的傅里叶级数

$$\tilde{f}(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\Omega_1 t + \varphi_n) \tag{3.1-3}$$

比较式(3.1-1)和式(3.1-3)，可得傅里叶系数之间的关系

$$\begin{cases} c_0 = a_0 \\ c_n^2 = a_n^2 + b_n^2 \\ \varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) \end{cases} \tag{3.1-4}$$

式中， $n=1, 2, 3, \dots$ 。由式(3.1-1)或式(3.1-3)可以清楚地看出，任何周期信号只要满足狄里赫利条件，就可以分解成直流分量及一系列谐波分量之和。而式(3.1-2)及式(3.1-4)则为直流分量和各次谐波分量的振幅和相位。

### 3.1.2 指数形式的傅里叶级数

若周期信号  $\tilde{f}(t)$ （周期为  $T_1$ ，角频率  $\Omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T_1$ ）满足狄里赫利条件，则它也可以展开成指数形式的傅里叶级数，即

<sup>①</sup> 频率为周期之倒数，即  $f=1/T$ ，角频率为频率的  $2\pi$  倍，即  $\Omega=2\pi f$ 。在进行理论分析时，往往用角频率  $\Omega$  比较方便。为简单起见，常省去“角”字，而简称为频率。

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= F_0 + F_1 e^{j\Omega_1 t} + F_2 e^{j2\Omega_1 t} + \cdots + F_n e^{jn\Omega_1 t} + \cdots + F_{-1} e^{-j\Omega_1 t} + F_{-2} e^{-j2\Omega_1 t} + \cdots + F_{-n} e^{-jn\Omega_1 t} + \cdots \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t}\end{aligned}\quad (3.1-5)$$

式中，傅里叶系数为

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} \tilde{f}(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt \quad (3.1-6)$$

同样，积分区间  $(t_0, t_0 + T_1)$  可取  $(0, T_1)$  或  $(-T_1/2, T_1/2)$ 。由式(3.1-6)可看出， $F_n$  是  $n\Omega_1$  的函数。一般情况下， $F_n$  是复数，称为复振幅 (complex amplitude)，它可以由模和相位两个参数来表示，即  $F_n = |F_n| e^{j\varphi_n}$ 。

实际上，三角形式的傅里叶级数与指数形式的傅里叶级数并不是相互独立的，其中一种级数可由另一种级数直接导出。

根据欧拉公式  $e^{-jn\Omega_1 t} = \cos n\Omega_1 t - j \sin n\Omega_1 t$ ，将此式代入式(3.1-6)，可得两种形式的傅里叶级数系数之间的关系为

$$\begin{cases} F_0 = a_0 = c_0 \\ F_n = |F_n| e^{j\varphi_n} = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \\ |F_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \varphi_n = \arctan \left( -\frac{b_n}{a_n} \right) \end{cases} \quad (3.1-7)$$

由上述讨论可知，同一个信号，既可以展开成三角形式的傅里叶级数，又可展开成指数形式的傅里叶级数。二者形式虽不同，实质则完全是一致的。指数形式傅里叶级数中有负频率项，这只是数学运算的结果，并不表示真正存在以负的频率进行振荡的分量，负的频率项与相应的正的频率项合起来才代表一个振荡分量。由式(3.1-7)还可看出， $|F_n|$  是  $n\Omega_1$  的偶函数，而  $\varphi_n$  为  $n\Omega_1$  的奇函数。

### 3.1.3 周期信号的频谱及其特点

由上述讨论可知，任意周期信号可用傅里叶级数来表示。可以为式(3.1-1)和式(3.1-3)的三角形式的级数，或为式(3.1-5)的指数形式的级数。在求取代表各次谐波的各级数项时，只要利用式(3.1-2)和式(3.1-4)求得各分量的振幅和相位，或者利用式(3.1-6)求得各分量的复振幅，则各项也就完全确定了。这样一种数学表达式，虽然详尽而确切地表示了信号分解的结果，但往往不够直观，不能一目了然。为了能既方便又明白地表示一个信号中含有哪些频率分量，各分量所占的比重怎样，可直观地画出信号的频谱图 (spectrum plot (diagram))。

对于式(3.1-3)所示的三角形式的傅里叶级数， $c_n$  表示  $n$  次谐波的幅度，而  $\varphi_n$  则表示  $n$  次谐波的相位。如果以频率为横轴，以幅度或相位为纵轴，绘出  $c_n$  及  $\varphi_n$  等的变化关系，便可直观地看出各频率分量的相对大小和相位情况。这样的图就称为由三角形式傅氏级数表示的信号的幅度频谱 (amplitude spectrum, 简称幅度谱) 和相位频谱 (phase spectrum, 简称相位谱)。例如，在将要讨论的例 3.1-1 中，画出了周期矩形脉冲信号的幅度谱与相位谱，如图 3.1-2 所示。其中每条竖线代表一个频率分量的幅度或相位，叫做谱线。连接各谱线顶点的曲线 (图中虚线) 称为频谱包络 (envelop)，这是各频率分量的幅度与相位变化的轮廓。

同理, 对于式(3.1-5)所示的指数形式的傅里叶级数, 也可以画出指数形式傅氏级数所对应的信号频谱。因为  $F_n$  一般是复函数, 根据  $F_n = |F_n|e^{j\varphi_n}$ , 可以画出幅度谱  $|F_n|$  与相位谱  $\varphi_n$ 。例 3.1-1 中信号的指数形式频谱如图 3.1-3 所示。

**例 3.1-1** 求图 3.1-1 所示周期矩形脉冲信号的三角形式与指数形式的傅里叶级数, 并画出各自的频谱图。

**解:** 信号在一个周期  $(0, T_1)$  内的表达式为

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} E/2 & 0 < t < T_1/2 \\ -E/2 & T_1/2 < t < T_1 \end{cases}$$

利用式(3.1-1)或式(3.1-3), 可将  $\tilde{f}(t)$  展开成三角形式的傅里叶级数

$$\tilde{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t)$$

或 
$$\tilde{f}(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\Omega_1 t + \varphi_n)$$

式中,  $\Omega_1 = 2\pi/T_1$ 。根据式(3.1-2)求出各系数

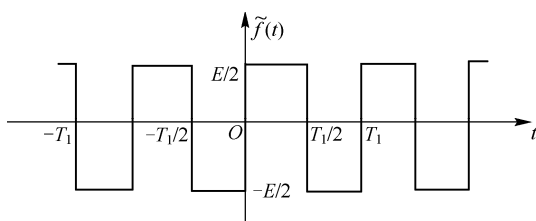


图 3.1-1 周期矩形脉冲信号

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \tilde{f}(t) dt = 0 \quad (\text{无直流分量})$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \tilde{f}(t) \cos n\Omega_1 t dt = 0 \quad (\text{无余弦分量})$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} \tilde{f}(t) \sin n\Omega_1 t dt = \frac{2}{T_1} \left[ \int_0^{T_1/2} \frac{E}{2} \sin n\Omega_1 t dt + \int_{T_1/2}^{T_1} \left(-\frac{E}{2}\right) \sin n\Omega_1 t dt \right]$$

$$= \begin{cases} \frac{2E}{n\pi} & n = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

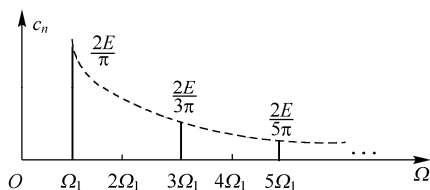
因此  $c_n = b_n$   $\varphi_n = \arctan(-b_n/a_n) = -\pi/2$   $n = 1, 3, 5, \dots$

这样, 三角形式的傅里叶级数为

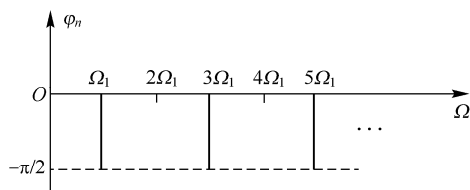
$$\tilde{f}(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\Omega_1 t = \frac{2E}{\pi} \left( \sin \Omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega_1 t + \dots \right)$$

或 
$$\tilde{f}(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(n\Omega_1 t - \frac{\pi}{2})$$

根据  $c_n$  及  $\varphi_n$  的表达式可画出幅度谱  $c_n$  及相位谱  $\varphi_n$ , 如图 3.1-2 所示。



(a) 幅度谱



(b) 相位谱

图 3.1-2 周期矩形脉冲信号的单边频谱

根据式(3.1-5)可将  $\tilde{f}(t)$  展开成指数形式的傅里叶级数

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t}$$

其中系数  $F_n$  可由式(3.1-6)求出, 也可由式(3.1-7)求出, 即

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = -j\frac{b_n}{2} = \begin{cases} -\frac{jE}{n\pi} & n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots \\ 0 & n = \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots \end{cases}$$

这样, 指数形式的傅里叶级数为

$$\tilde{f}(t) = -\frac{jE}{\pi} e^{j\Omega_1 t} - \frac{jE}{3\pi} e^{j3\Omega_1 t} - \dots + \frac{jE}{\pi} e^{-j\Omega_1 t} + \frac{jE}{3\pi} e^{-j3\Omega_1 t} + \dots$$

由于  $F_n$  为复数, 因此需求出它的模  $|F_n|$  与相位  $\varphi_n$ 。

$$|F_n| = \left| \frac{E}{n\pi} \right| \quad n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots; \quad \varphi_n = \begin{cases} -\pi/2 & n = 1, 3, 5, \dots \\ \pi/2 & n = -1, -3, -5, \dots \end{cases}$$

根据  $|F_n|$  及  $\varphi_n$  的表达式, 可画出幅度谱  $|F_n|$  与相位谱  $\varphi_n$ , 如图 3.1-3 所示。

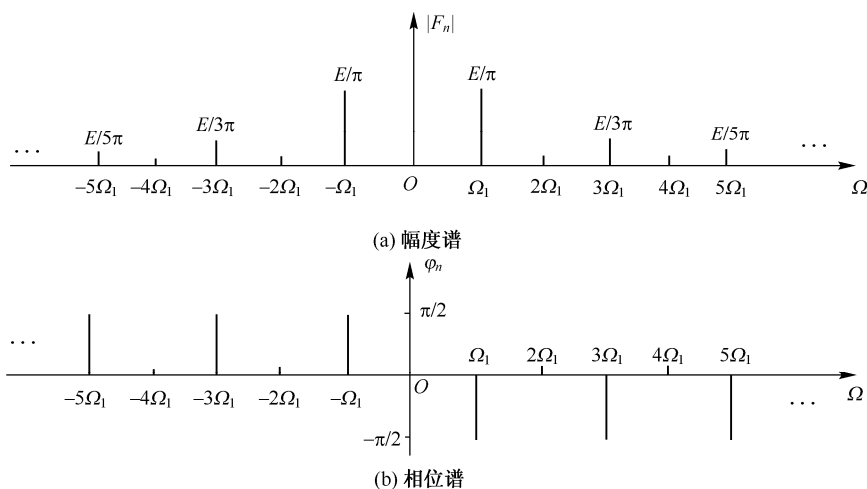


图 3.1-3 周期矩形脉冲信号的双边频谱

比较图 3.1-2 和图 3.1-3 可看出, 图 3.1-2 对应于三角形式的傅里叶级数, 由于各分量的角频率恒为正值 ( $n > 0$ ), 所以图形是单边的, 称为单边频谱。图 3.1-3 对应于指数形式的傅里叶级数, 由于各分量的角频率有正有负 ( $-\infty < n < \infty$ ), 所以图形为双边的, 称为双边频谱。又由于  $|F_n|$  是  $n\Omega_1$  的偶函数,  $\varphi_n$  是  $n\Omega_1$  的奇函数, 所以在双边频谱图中, 幅度谱呈偶对称, 而相位谱呈奇对称。这两种频谱表示方法实质上是一样的, 其不同之处仅在于图 3.1-2(a) 中每条谱线代表一个谐波分量的幅度, 而图 3.1-3(a) 中每个谐波分量的幅度一分为二, 在正、负相对应的谐波频率位置上各为一半。所以, 只有把正、负频率上对应的这两条谱线加起来才代表一个谐波分量的幅度。在指数形式傅氏级数的频谱中出现的负频率是由于将  $\sin n\Omega_1 t$ 、 $\cos n\Omega_1 t$  写成指数形式时, 从数学的观点自然分成  $e^{jn\Omega_1 t}$  和  $e^{-jn\Omega_1 t}$  两项, 因而引入了负频率项。因此, 负频率的出现完全是数学运算的结果, 并没有任何物理意义。在实际中, 只有把负频率项与相应的正频率项成对地合并起来, 才是实际的谐波分量。

通过例 3.1-1 的分析, 可以总结出任何周期信号的频谱都具有如下特点:

- ① 离散性 (discrete property)。频谱是离散的而不是连续的, 这种频谱称为离散频谱。
- ② 谐波性 (harmonic property)。谱线出现在基波频率  $\Omega_1$  的整数倍上 (例 3.1-1 的谱线出现在基波频率的奇数倍上)。
- ③ 收敛性 (convergence property)。幅度谱的谱线幅度随着  $n \rightarrow \infty$  而逐渐衰减为零。

### 3.1.4 波形的对称性与谐波特性的关系

周期信号的波形与其谐波特性是对应的。将信号  $\tilde{f}(t)$  展开成傅里叶级数时, 如果  $\tilde{f}(t)$  为实函数, 且其波形具有某些对称特性, 则在傅里叶级数中某些系数等于零, 即其谐波特性将变得简单。波形的对称性有两类, 一类是整周期对称, 如偶函数和奇函数; 另一类是半周期对称, 如奇谐函数和偶谐函数。前者决定级数展开式中只含有余弦项或正弦项; 而后者决定级数展开式中只含有奇次谐波项或偶次谐波项。

#### 1. 偶函数 (even function)

若信号波形相对于纵轴是对称的, 即满足  $\tilde{f}(t) = \tilde{f}(-t)$ , 则  $\tilde{f}(t)$  为偶函数, 如图 3.1-4 所示的周期三角脉冲信号就是偶函数。

这样, 式(3.1-2)中的  $\tilde{f}(t)\cos n\Omega_1 t$  为偶函数, 而  $\tilde{f}(t)\sin n\Omega_1 t$  为奇函数, 于是级数中的各系数为

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) dt \\ a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) \cos n\Omega_1 t dt \\ b_n = 0 \end{cases} \quad (3.1-8)$$

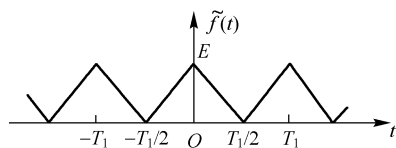


图 3.1-4 偶函数举例

于是, 偶函数的傅里叶级数中不含有正弦分量, 只可能含有直流分量和余弦分量。注意, 并不是所有的偶函数都存在直流分量。波形是否含有直流分量, 可从波形直观地判断。以横坐标为界, 其波形的上下面积若相等, 则无直流分量, 否则有直流分量。后面介绍偶谐函数时, 也是如此。

对于图 3.1-4 所示的周期三角脉冲信号, 它的傅里叶级数如下式所示

$$\tilde{f}(t) = \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left( \cos \Omega_1 t + \frac{1}{9} \cos 3\Omega_1 t + \frac{1}{25} \cos 5\Omega_1 t + \cdots \right)$$

显然不含正弦分量, 而只含有直流分量和余弦分量。

#### 2. 奇函数 (odd function)

若信号波形对称于原点, 即满足  $\tilde{f}(t) = -\tilde{f}(-t)$ , 则  $\tilde{f}(t)$  为奇函数。如图 3.1-5 所示的周期锯齿脉冲信号就是奇函数。

这样, 式(3.1-2)中的  $\tilde{f}(t)\cos n\Omega_1 t$  为奇函数, 而  $\tilde{f}(t)\sin n\Omega_1 t$  为偶函数, 于是级数中的各系数为

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) \sin n\Omega_1 t dt \end{cases} \quad (3.1-9)$$

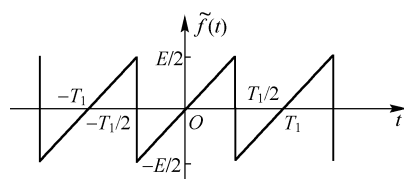


图 3.1-5 奇函数举例

所以，在奇函数的傅里叶级数中不会含有直流分量和余弦分量，只可能含有正弦分量。例 3.1-1 的对称周期矩形信号就是奇函数。

对于图 3.1-5 所示的周期锯齿脉冲信号，其傅里叶级数为

$$\tilde{f}(t) = \frac{E}{\pi} \left( \sin \Omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\Omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega_1 t - \frac{1}{4} \sin 4\Omega_1 t + \cdots \right)$$

显然不含直流分量和余弦分量，而只含有正弦分量。

这里还需指出，若将奇函数加上直流分量，它不再是奇函数，但在它的级数中仍然不会含有余弦项。

### 3. 奇谐函数 (odd harmonic function)

如果信号波形沿时间轴向左或向右平移半个周期，并进行上下翻转后得出的波形与原波形重合，即满足

$$\tilde{f}(t \pm T_1/2) = -\tilde{f}(t) \quad (3.1-10)$$

则称此函数为奇谐函数。图 3.1-6 示出了一种奇谐函数的例子。

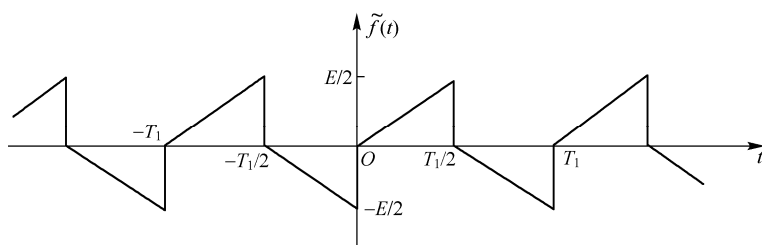


图 3.1-6 奇谐函数举例

对于奇谐函数，其傅里叶系数为

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \tilde{f}(t) dt = \frac{1}{T_1} \left[ \int_{-T_1/2}^0 \tilde{f}(t) dt + \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) dt \right] = \frac{1}{T_1} \left[ \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t - T_1/2) dt + \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) dt \right]$$

注意到

$$\tilde{f}(t - T_1/2) = -\tilde{f}(t)$$

所以

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \left[ -\int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) dt + \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) dt \right] = 0 \quad (3.1-11)$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \tilde{f}(t) \cos n\Omega_1 t dt \\ &= \frac{2}{T_1} \left[ \int_{-T_1/2}^0 \tilde{f}(t) \cos n\Omega_1 t dt + \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) \cos n\Omega_1 t dt \right] \\ &= \frac{2}{T_1} \left[ \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t - T_1/2) \cos n\Omega_1 (t - T_1/2) dt + \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) \cos n\Omega_1 t dt \right] \end{aligned}$$



注意到

$$\tilde{f}(t - T_1/2) = -\tilde{f}(t)$$

$$\cos n\Omega_1(t - T_1/2) = \begin{cases} \cos n\Omega_1 t & n = 2, 4, 6, \dots \\ -\cos n\Omega_1 t & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

可求出

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) \cos n\Omega_1 t dt & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.1-12)$$

同理可求出

$$b_n = \begin{cases} 0 & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) \sin n\Omega_1 t dt & n = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (3.1-13)$$

由上述计算可以看出, 奇谐函数的傅里叶展开式中只含有奇次谐波分量, 而不含直流及偶次谐波分量。

#### 4. 偶谐函数 (even harmonic function)

如果信号波形沿时间轴向左或向右平移半个周期后得到的波形与原波形重合, 即满足

$$\tilde{f}(t \pm T_1/2) = \tilde{f}(t) \quad (3.1-14)$$

则称此函数为偶谐函数。偶谐函数的一个例子是经过全波整流后得到的电流, 如图 3.1-7 所示。

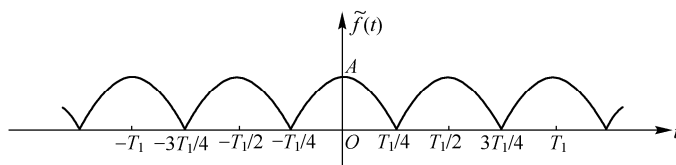


图 3.1-7 偶谐函数举例

用与推导奇谐函数的傅里叶系数相类似的方法可以求出偶谐函数的傅里叶系数, 即

$$a_0 = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) dt \quad (3.1-15)$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) \cos n\Omega_1 t dt & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.1-16)$$

$$b_n = \begin{cases} 0 & n = 1, 3, 5, \dots \\ \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) \sin n\Omega_1 t dt & n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.1-17)$$

所以, 偶谐函数的傅里叶展开式中将只可能含有直流分量和偶次谐波分量。

图 3.1-7 所示的信号既是偶函数, 又是偶谐函数, 所以其傅里叶展开式中只含有直流分量及偶次谐波的余弦分量。

熟悉了函数的奇、偶性和奇谐、偶谐等对称性后, 对于一些波形所包含的谐波分量常可迅速做出判断, 并便于迅速计算傅里叶系数。

**例 3.1-2** 定性分析图 3.1-8(a)所示的周期信号  $\tilde{f}(t)$  的傅里叶级数中所含有的频率分量。

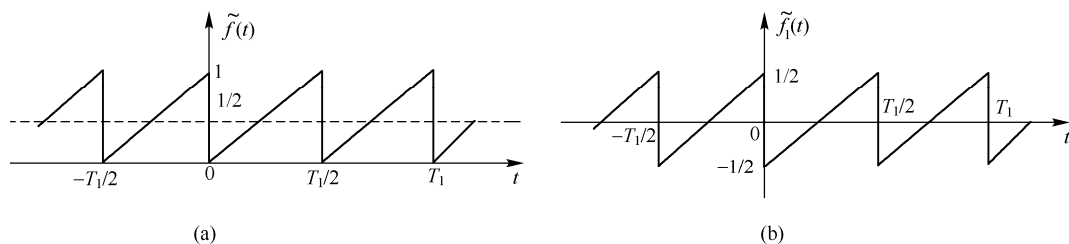


图 3.1-8 例 3.1-2 的波形

**解：**从图 3.1-8(a)看出， $\tilde{f}(t)$  为偶谐函数，所以它的傅氏级数中包含直流分量与偶次谐波分量。而且从图 3.1-8(a)很容易看出它的直流分量为  $1/2$ ，如果将此直流分量  $1/2$  从  $\tilde{f}(t)$  的波形中除去，即将横坐标轴上移  $1/2$  得到新波形  $\tilde{f}_1(t)$ ，如图 3.1-8(b)所示，很显然  $\tilde{f}_1(t)$  为奇函数。也就是说图 3.1-8(a)中的信号  $\tilde{f}(t)$  去掉直流后成为了奇函数。综合以上分析可知， $\tilde{f}(t)$  的傅氏级数中只含有直流和偶次谐波的正弦分量。

### 3.1.5 吉伯斯现象

在例 3.1-1 中，我们已经求出了图 3.1-1 所示的对称周期矩形脉冲信号的傅里叶级数

$$\tilde{f}(t) = \frac{2E}{\pi} \left( \sin \Omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega_1 t + \dots \right)$$

即将基波、三次谐波、五次谐波等无穷多项正弦分量叠加后可以完全恢复  $\tilde{f}(t)$ 。但实际中往往只考虑有限项谐波分量的叠加来近似表示  $\tilde{f}(t)$ ，这样，叠加波形与  $\tilde{f}(t)$  相比较一定会产生误差。

图 3.1-9 画出了对称周期矩形脉冲信号在只取有限项时合成的波形。图中画出了以下三种情况：① 只取基波分量，即  $\frac{2E}{\pi} \sin \Omega_1 t$ ；② 取基波和三次谐波两项，即  $\frac{2E}{\pi} \left( \sin \Omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega_1 t \right)$ ；③ 取基波、三次谐波和五次谐波三项，即  $\frac{2E}{\pi} \left( \sin \Omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega_1 t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega_1 t \right)$ 。上述三种情况分别示于图 3.1-9 中对应于  $n=1, n=3$  和  $n=5$  的三条曲线。从图 3.1-9 可以看出：① 傅里叶级数所取项数  $n$  越多，相加后的波形越逼近原信号  $\tilde{f}(t)$ 。显然，当  $n \rightarrow \infty$  时，合成波形必然等于  $\tilde{f}(t)$ ；② 当信号  $\tilde{f}(t)$  是脉冲信号时，其高频分量主要影响脉冲的跳变沿，而低频分量主要影响脉冲的幅度。所以  $\tilde{f}(t)$  波形变化越剧烈，所包含的高频分量越丰富。

从图 3.1-9 还可以看出如下现象：选取傅里叶有限级数的项数越多，在所合成的波形中出现的峰值越靠近  $\tilde{f}(t)$  的不连续点。但无论  $n$  取的多大（只要不是无限大），该峰值均趋于一个常数，它大约等于跳变值的 8.9%，并从不断

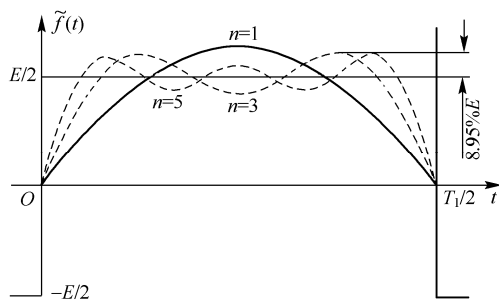


图 3.1-9 吉伯斯现象

续点开始以起伏振荡的形式逐渐衰减下去。这种现象称为吉伯斯现象（Gibbs phenomenon），如图 3.1-9 所示。

在 6.1 节中将证明吉伯斯现象的存在，并解释产生吉伯斯现象的原因。

## 3.2 典型周期信号的频谱

在周期信号的频谱分析中，周期矩形脉冲信号的频谱分析具有典型的意义，得到广泛应用。本节将对它的频谱进行详细的分析。在此基础上，还给出了一些其他典型周期信号频谱分析的结果。

### 3.2.1 周期矩形脉冲信号

#### 1. 周期矩形脉冲信号（periodic rectangular pulse signal）的傅里叶级数

设周期矩形脉冲信号  $\tilde{f}(t)$  的脉冲宽度为  $\tau$ ，脉冲幅度为  $E$ ，重复周期为  $T_1$ （角频率  $\Omega_1 = 2\pi/T_1$ ），如图 3.2-1 所示。该信号在一个周期内  $(-T_1/2, T_1/2)$  的表达式为

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} E & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

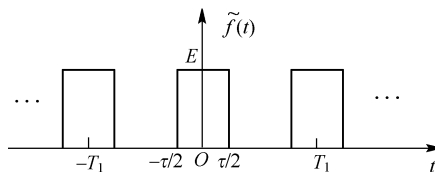


图 3.2-1 周期矩形脉冲信号的波形

利用式(3.1-1)或式(3.1-3)，可将周期矩形脉冲信号  $\tilde{f}(t)$  展开成如下三角形式的傅里叶级数

$$\tilde{f}(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega_1 t + b_n \sin n\Omega_1 t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\Omega_1 t + \varphi_n)$$

其中各系数可由式(3.1-2)求出。

由于  $\tilde{f}(t)$  是偶函数，所以

$$b_n = 0 \quad (3.2-1)$$

直流分量

$$a_0 = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) dt = \frac{2}{T_1} \int_0^{\tau/2} E dt = \frac{E\tau}{T_1} \quad (3.2-2)$$

余弦分量的幅度

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T_1} \int_0^{T_1/2} \tilde{f}(t) \cos n\Omega_1 t dt = \frac{4}{T_1} \int_0^{\tau/2} E \cos n\Omega_1 t dt \\ &= \frac{2E}{n\pi} \sin \frac{n\Omega_1 \tau}{2} = \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa} \left( \frac{n\Omega_1 \tau}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.2-3)$$

这样，周期矩形脉冲信号的三角形式傅里叶级数为

$$\tilde{f}(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{2E\tau}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Sa} \left( \frac{n\Omega_1 \tau}{2} \right) \cos n\Omega_1 t \quad (3.2-4)$$

同理，可将  $\tilde{f}(t)$  展开成指数形式的傅里叶级数

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t}$$

其中系数  $F_n$  可根据式(3.1-6)或式(3.1-7)求出

$$F_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) = \frac{a_n}{2} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right) \quad (3.2-5)$$

所以，周期矩形脉冲信号的指数形式的傅里叶级数为

$$\tilde{f}(t) = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right) e^{jn\Omega_1 t} \quad (3.2-6)$$

对于式(3.2-4)，若给定  $\tau, T_1$ （或  $\Omega_1$ ）和  $E$  就可以求出直流分量与各次谐波分量的幅度

$$c_0 = a_0 = E\tau/T_1 \quad (3.2-7)$$

$$c_n = a_n = \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right) \quad (3.2-8)$$

## 2. 频谱图

根据式(3.2-7)、式(3.2-8)及式(3.2-5)可以分别画出周期矩形脉冲信号的三角形式表示的频谱图和指数形式表示的频谱图。由于  $c_n$  及  $F_n$  都是实数，因此，可将幅度谱与相位谱合画在一起，也可将幅度谱与相位谱分开画。以上各频谱图如图 3.2-2 所示。

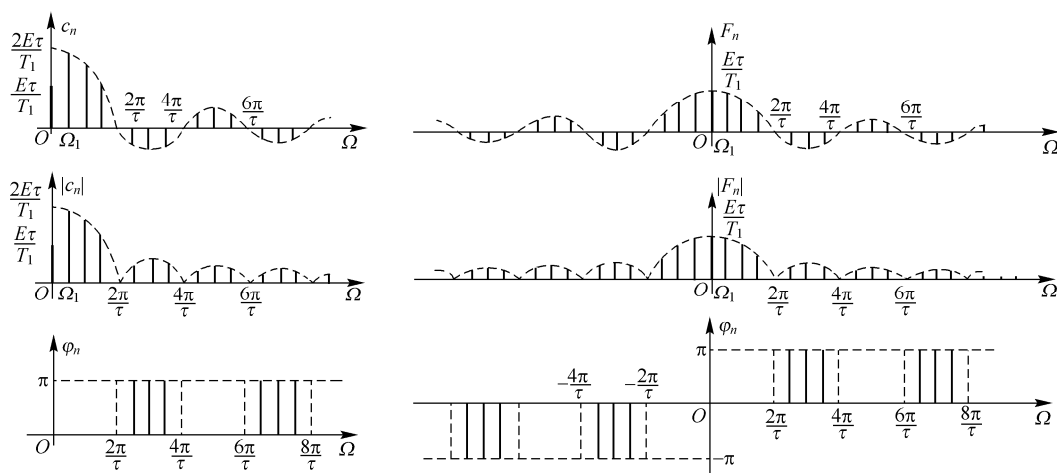


图 3.2-2 周期矩形脉冲信号的频谱

从图 3.2-2 所示的频谱图可以总结出以下几点：

① 周期矩形脉冲信号如同一般的周期信号那样，它的频谱是离散的，谱线只出现在  $\Omega_1$  的整数倍频率（即各次谐波频率）上。谱线的间隔为  $\Omega_1 = 2\pi/T_1$ ，谱线间隔与脉冲重复周期  $T_1$  成反比， $T_1$  越大，谱线越密集。

② 直流分量及各次谐波分量的大小正比于脉冲幅度  $E$  和脉冲宽度  $\tau$ ，反比于周期  $T_1$ 。

各谱线的幅度包络线按抽样函数  $\text{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right)$  的规律变化。当  $\frac{n\Omega_1\tau}{2}$  为  $\pi$  的整数倍，即

$\Omega = m \frac{2\pi}{\tau}$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) 时，谱线的包络线经过零点。

③ 频率  $\Omega$  从零到第一个零值点之间, 或任意两个相邻的零值点之间的谱线条数是与信号的脉宽与周期的比值有关的。实际上图 3.2-2 所示的频谱图是对应着  $\frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{4}$  的情况。因为

$\Omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{4\tau} = \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi}{\tau} \right)$ , 而  $2\pi/\tau$  是第一个零值点处的频率, 所以, 频率  $\Omega$  在  $0 \sim 2\pi/\tau$  内有三根谱线。因此可推广出如下规律: 若  $\frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{n}$ , 则频率  $\Omega$  从 0 到第一个零值点之间或任意

两个相邻的零值点之间就有  $n-1$  条谱线。

④ 周期矩形脉冲信号包含无穷多条谱线。也就是说, 它可以分解成无穷多个频率分量。随着频率的增高, 谱线幅度变化的总趋势收敛于零。但它的主要能量集中在第一个零值点之内。实际上, 在允许一定失真的条件下, 可以舍弃  $\Omega > 2\pi/\tau$  的频率分量, 而把  $\Omega = 0 \sim 2\pi/\tau$  这段频率范围称为矩形脉冲信号的频带宽度, 记为  $B_\Omega$  或  $B_f$ , 于是

$$B_\Omega = 2\pi/\tau \quad (3.2-9)$$

或 
$$B_f = 1/\tau \quad (3.2-10)$$

显然, 频带宽度只与脉冲宽度  $\tau$  有关, 而且成反比关系。对于其他任意信号频带宽度的确定, 具有一定的随意性。例如, 对于单调衰减的频谱函数, 可以取幅度衰减到最大值的  $1/\sqrt{2}$ ,  $1/10$  或  $1/100$  的频率来确定其频带宽度。

### 3. 频谱结构与波形参数 $(T_1, \tau)$ 之间的关系

为了说明在不同的脉冲宽度  $\tau$  和不同的周期  $T_1$  的情况下周期矩形脉冲信号的变化规律, 在图 3.2-3 中画出了当  $\tau$  保持不变, 而  $T_1 = 5\tau$  和  $T_1 = 10\tau$  两种情况时的频谱。在图 3.2-4 中画出了当  $T_1$  保持不变, 而  $\tau = T_1/5$  和  $\tau = T_1/10$  两种情况时的频谱。从图 3.2-3 和图 3.2-4 可看出如下规律: 谱线的间隔  $\Omega_1 = 2\pi/T_1$  只与周期  $T_1$  有关, 且与  $T_1$  成反比; 零值点频率  $2\pi/\tau$  只与脉宽  $\tau$  有关, 且与  $\tau$  成反比; 而谱线幅度与  $T_1$  和  $\tau$  都有关系, 且与  $T_1$  成反比、与  $\tau$  成正比。

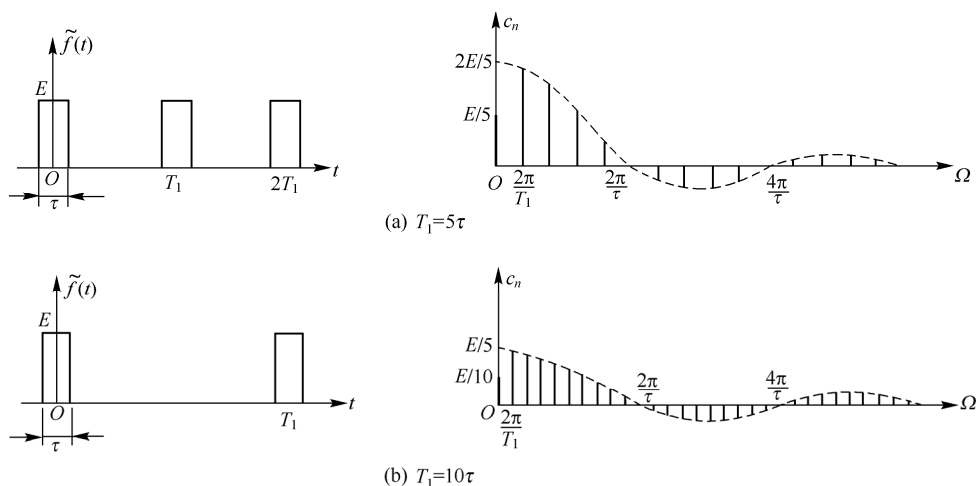


图 3.2-3 不同  $T_1$  值下周期矩形脉冲信号的频谱

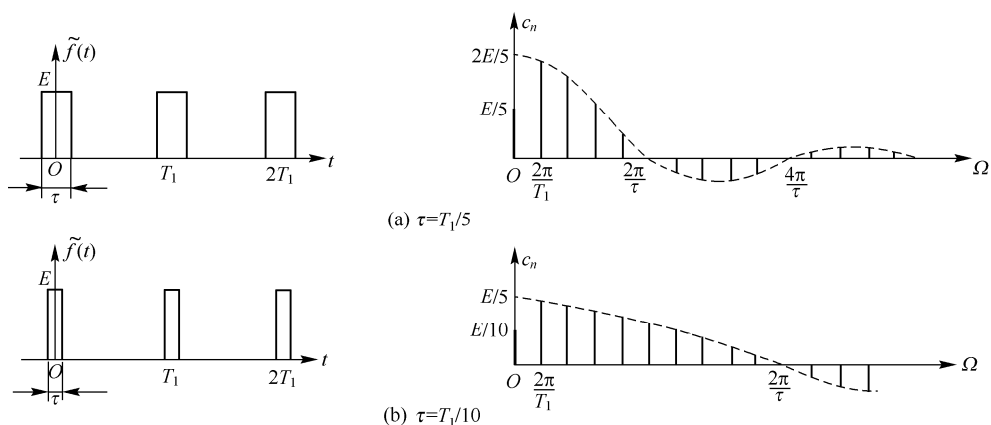


图 3.2-4 不同  $\tau$  值下周期矩形脉冲信号的频谱

### 3.2.2 周期锯齿脉冲信号

周期锯齿脉冲信号 (periodic sawtooth pulse signal) 如图 3.2-5 所示, 它是奇函数, 因而  $a_0 = 0, a_n = 0$ , 傅里叶级数为

$$\tilde{f}(t) = \frac{E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin n\Omega_1 t = \frac{E}{\pi} \left( \sin \Omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\Omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega_1 t - \frac{1}{4} \sin 4\Omega_1 t + \cdots \right) \quad (3.2-11)$$

周期锯齿脉冲信号的频谱只包含正弦分量, 谐波的幅度以  $1/n$  的规律收敛。

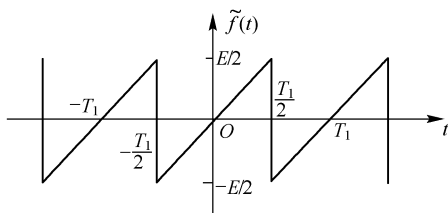


图 3.2-5 周期锯齿脉冲信号的波形

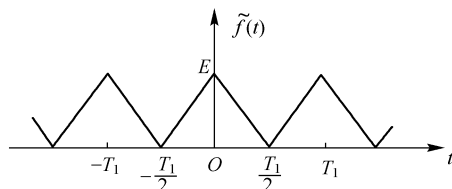


图 3.2-6 周期三角脉冲信号的波形

### 3.2.3 周期三角脉冲信号

周期三角脉冲信号 (periodic triangular pulse signal) 如图 3.2-6 所示。它是偶函数, 因而  $b_n = 0$ , 傅里叶级数为

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \cos n\Omega_1 t \\ &= \frac{E}{2} + \frac{4E}{\pi^2} \left( \cos \Omega_1 t + \frac{1}{9} \cos 3\Omega_1 t + \frac{1}{25} \cos 5\Omega_1 t + \cdots \right) \end{aligned} \quad (3.2-12)$$

周期三角脉冲信号的频谱只包含直流、奇次谐波的余弦分量, 谐波的幅度以  $1/n^2$  的规律收敛。

### 3.2.4 周期半波余弦信号

周期半波余弦信号 (periodic half-wave cosine signal) 如图 3.2-7 所示。它是偶函数, 因而  $b_n = 0$ , 傅里叶级数为

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t) &= \frac{E}{\pi} - \frac{2E}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} \cos \frac{n\pi}{2} \cos n\Omega_1 t \\ &= \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \left( \cos \Omega_1 t + \frac{4}{3\pi} \cos 2\Omega_1 t - \frac{4}{15\pi} \cos 4\Omega_1 t + \dots \right)\end{aligned}\quad (3.2-13)$$

周期半波余弦信号的频谱只含有直流、基波和偶次谐波的余弦分量。谐波幅度以  $1/n^2$  的规律收敛。

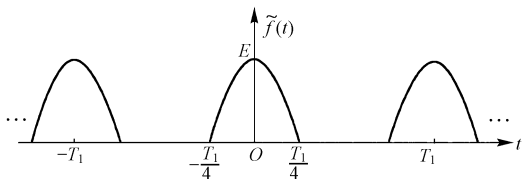


图 3.2-7 周期半波余弦信号的波形

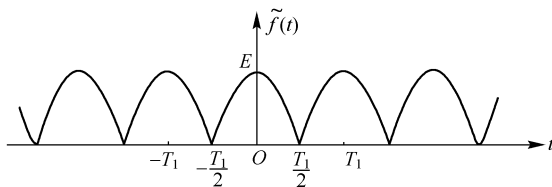


图 3.2-8 周期全波余弦信号的波形

### 3.2.5 周期全波余弦信号

若余弦信号  $\tilde{f}_1(t) = E \cos \Omega_0 t$ 。其中  $\Omega_0 = 2\pi/T_0$ ，则周期全波余弦信号（periodic full-wave cosine signal）为

$$\tilde{f}(t) = |\tilde{f}_1(t)| = E |\cos \Omega_0 t|$$

如图 3.2-8 所示。它是偶函数，因而  $b_n = 0$ 。而且  $\tilde{f}(t)$  的周期  $T_1$  是  $\tilde{f}_1(t)$  的周期  $T_0$  的一半，即  $T_1 = T_0/2$ ，频率  $\Omega_1 = 2\pi/T_1 = 2\Omega_0$ 。以全波余弦信号的参数  $\Omega_1$  求出傅里叶级数为

$$\tilde{f}(t) = \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi} \left( \frac{1}{3} \cos \Omega_1 t - \frac{1}{15} \cos 2\Omega_1 t + \frac{1}{35} \cos 3\Omega_1 t - \dots \right) \quad (3.2-14)$$

若用余弦信号  $f_1(t)$  的参数  $\Omega_0$  表示，则傅里叶级数为

$$\tilde{f}(t) = \frac{2E}{\pi} + \frac{4E}{\pi} \left( \frac{1}{3} \cos 2\Omega_0 t - \frac{1}{15} \cos 4\Omega_0 t + \frac{1}{35} \cos 6\Omega_0 t - \dots \right) \quad (3.2-15)$$

可见，周期全波余弦信号的频谱包含直流分量及  $\Omega_1$  的各次谐波分量；或者说，只包含直流分量及  $\Omega_0$  的偶次谐波分量。谐波的幅度以  $1/n^2$  的规律收敛。

## 3.3 非周期信号的频谱分析——傅里叶变换

### 3.3.1 傅里叶变换及傅里叶逆变换

前几节讨论了周期信号的傅里叶级数，并得到了它的离散频谱。本节将上述傅里叶分析方法推广到非周期信号中去，导出傅里叶变换（Fourier transform）。

考虑图 3.3-1 所示的周期矩形脉冲信号，当周期  $T_1$  无限增大时，周期的脉冲序列中相邻的脉冲将在  $t$  等于  $\pm\infty$  处才出现，则周期信号就转化为非周期的单脉冲信号。换句话说，可以把非周期信号看成是周期  $T_1$  趋于无限大的周期信号。在 3.2 节中已经指出，当周期信号的周期  $T_1$  增大时，谱线的间隔  $\Omega_1 = 2\pi/T_1$  变小；若周期  $T_1$  趋于无限大，则谱线的间隔趋于无限小，

这样周期信号的离散频谱就变成了非周期信号的连续频谱了(演变过程如图 3.3-1 所示)。同时由于周期  $T_1$  趋于无限大, 由式(3.1-6)可知, 谱线的幅度  $F_n$  趋于零, 这样, 就不能再用式(3.1-6)来表示非周期信号的频谱了。这时, 信号中各频率分量的振幅虽然都是无穷小量, 但是, 这些无穷小量之间仍然保持一定的比例关系。为了表示非周期信号的频谱特性, 有必要引出频谱密度的概念。

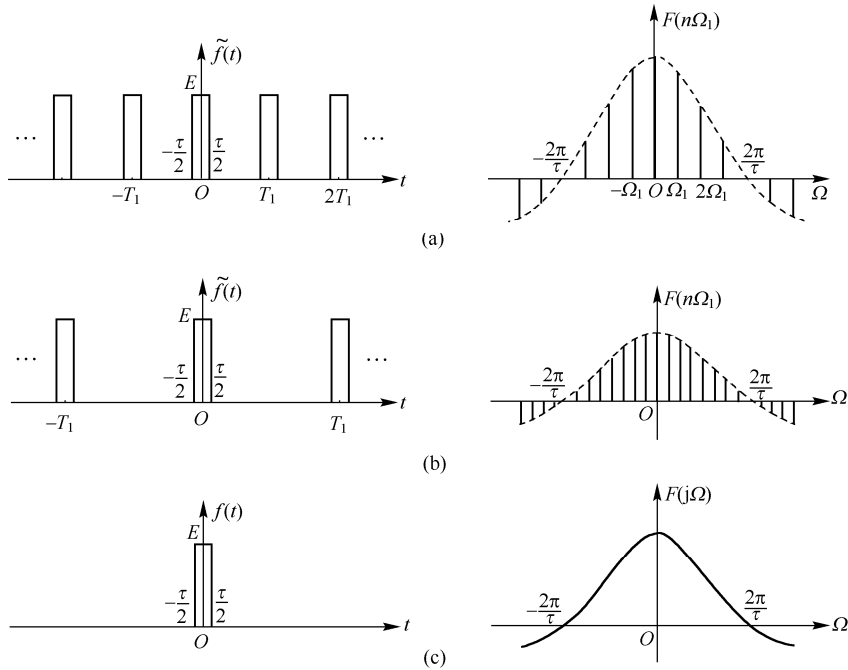


图 3.3-1 从周期信号的离散谱到非周期信号的连续谱

在式(3.1-6)所表示的复振幅  $F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \tilde{f}(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt$  中, 如果等式两边都乘以  $T_1$ , 则当  $T_1$  趋于无限大时, 这个量可以不趋于零, 这个极限量用符号  $F(j\Omega)$  来表示; 当周期  $T_1$  趋于无限大时, 周期信号  $\tilde{f}(t)$  转变为非周期信号  $f(t)$ , 谱线间隔  $\Omega_1 \rightarrow d\Omega$ , 而离散频率  $n\Omega_1$  变为连续频率  $\Omega$ , 则

$$F(j\Omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} T_1 F_n = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \tilde{f}(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt$$

则得

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt \quad (3.3-1)$$

由式(3.1-5)可知, 一个周期信号可以展开成指数形式的傅里叶级数

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t} \quad (3.3-2)$$

其中

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \tilde{f}(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt \quad (3.3-3)$$

将式(3.3-3)代入式(3.3-2)可得

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \tilde{f}(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt \right] e^{jn\Omega_1 t}$$



当周期  $T_1 \rightarrow \infty$  时, 周期信号  $\tilde{f}(t)$  转化为非周期信号  $f(t)$ ,  $\Omega_1 \rightarrow d\Omega$ ,  $n\Omega_1 \rightarrow \Omega$ ,  $T_1 = 2\pi/\Omega_1 \rightarrow 2\pi/d\Omega$ , 在这种极限情况下, 上式的求和运算将转化为积分运算

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt \right] e^{j\Omega t} d\Omega$$

由式(3.3-1)可知, 方括号里的量就是  $F(j\Omega)$ , 故得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (3.3-4)$$

式(3.3-1)与式(3.3-4)构成了傅里叶变换对

$$\begin{cases} F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \end{cases} \quad (3.3-5a)$$

$$\quad (3.3-5b)$$

式(3.3-5a)称为傅里叶变换, 简称为傅氏变换, 而式(3.3-5b)称为傅里叶逆变换 (inverse Fourier transform), 简称为傅氏逆变换。可分别记为

$$\begin{cases} F(j\Omega) = \mathcal{F}[f(t)] \\ f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\Omega)] \end{cases} \quad (3.3-6a)$$

$$(3.3-6b)$$

傅里叶变换对也可简记为

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{F.T.}} F(j\Omega) \quad (3.3-7)$$

有时为了强调频率变量仅仅是  $\Omega$ , 傅里叶变换可写为  $F(\Omega)$ 。

非周期信号的傅里叶变换也应该满足一定的条件才能存在。这种条件类似于傅里叶级数的狄里赫利条件, 不同之处仅仅在于时间范围从一个周期扩展为无限区间, 条件  $\int_{-T_1/2}^{T_1/2} |f(t)| dt < \infty$  变为  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$ , 即要求信号  $f(t)$  在无限区间内绝对可积。但这仅是充分条件, 而不是必要条件。自从引入了广义函数的概念以后, 对于许多并不满足绝对可积条件的函数 (如阶跃函数、符号函数及周期函数等), 其傅里叶变换可以有确定的表达式。

### 3.3.2 傅里叶变换的物理意义——频谱和频谱密度函数

因为

$$F(j\Omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} T_1 F_n = \lim_{\Omega_1 \rightarrow 0} \frac{F_n 2\pi}{\Omega_1} = \frac{F_n 2\pi}{d\Omega} = \frac{F_n}{df}$$

从上式可以看出,  $F(j\Omega)$  具有单位频带复振幅的量纲, 因此这个新的量  $F(j\Omega)$  称为原函数  $f(t)$  的频谱密度函数 (spectrum density function), 简称频谱函数。一般情况下, 频谱函数是一个复函数, 它可以写成  $F(j\Omega) = |F(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)}$ 。  $|F(j\Omega)|$  也称为幅度频谱, 它是频率的函数, 代表信号中各频率分量的相对大小, 而各频率分量的实际幅度是  $\frac{F(j\Omega)d\Omega}{2\pi}$ , 它是一无穷小量。  $\varphi(\Omega)$  称为相位频谱, 它也是频率的函数, 代表有关频率分量的相位。

和周期信号一样, 这里也可以把函数  $f(t)$  写成三角函数的形式

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\Omega)| e^{j[\Omega t + \varphi(\Omega)]} d\Omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\Omega)| \cos[\Omega t + \varphi(\Omega)] d\Omega + \frac{j}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\Omega)| \sin[\Omega t + \varphi(\Omega)] d\Omega
 \end{aligned}$$

因为  $|F(j\Omega)|$  是频率  $\Omega$  的偶函数，而  $\varphi(\Omega)$  是  $\Omega$  的奇函数，所以上式第二个积分的被积函数是奇函数，积分值应为零；第一个积分的被积函数是偶函数，故有

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\Omega)| \cos[\Omega t + \varphi(\Omega)] d\Omega \quad (3.3-8)$$

可见，非周期信号也和周期信号一样，可以分解为许多不同频率的正弦分量。所不同的是，由于非周期信号的周期趋于无限大，基波频率就趋于无限小，因此，它包含了从零到无穷大之间的所有频率。同时随着周期的无限增大，各频率分量的振幅  $\frac{|F(j\Omega)| d\Omega}{2\pi}$  则无限减小，所以频谱不能直接用振幅来表示，而必须用它的密度函数来表示。密度函数的模量  $|F(j\Omega)|$  对频率  $\Omega$  作出的连续曲线代表信号的幅度频谱；密度函数的相角  $\varphi(\Omega)$  对频率  $\Omega$  作出的连续曲线则是信号的相位频谱。

### 3.4 典型非周期信号的频谱

#### 1. 对称矩形脉冲信号

对称矩形脉冲信号（symmetry rectangular pulse signal）的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} E & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases} \quad (3.4-1)$$

式中， $E$  为脉冲幅度， $\tau$  为脉冲宽度。它的傅里叶变换为

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-j\Omega t} dt = \frac{2E}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \quad (3.4-2)$$

$f(t)$  的波形及频谱如图 3.4-1 所示。其中，图(a)为波形；图(b)为频谱  $F(j\Omega)$ ，它既包含了幅度信息，也包含了相位信息。也可将图(b)的  $F(j\Omega)$  画成两张图，其一是幅度谱，如图(c)所示，其二是相位谱，如图(d)所示。

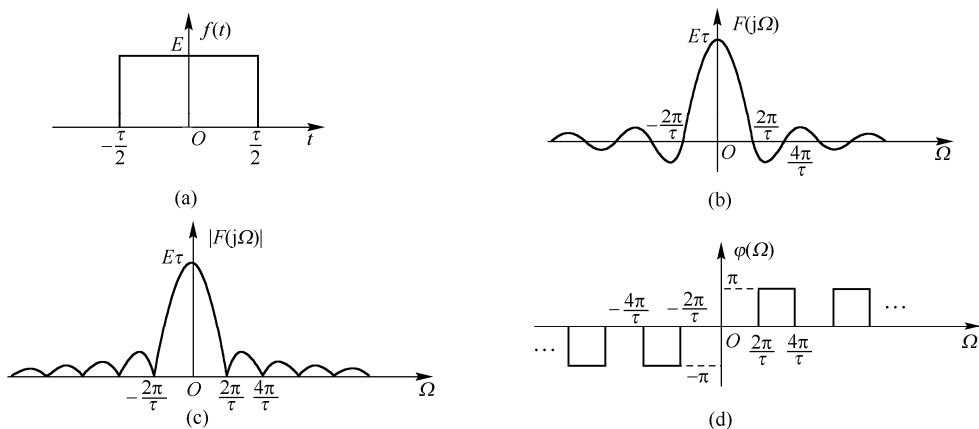


图 3.4-1 对称矩形脉冲信号的波形和频谱

比较图 3.4-1 与图 3.2-2 可以看出, 非周期矩形单脉冲的频谱函数曲线与周期矩形脉冲离散频谱的包络线形状相同, 都具有抽样函数的形状。和周期矩形脉冲的频谱一样, 矩形单脉冲频谱也具有收敛性, 信号的绝大部分能量集中在  $f = 0 \sim 1/\tau$  频率范围内。因而, 通常认为这种信号占有的频率范围 (即频带宽度 (band width))  $B_f \approx 1/\tau$ 。

## 2. 单边指数信号

单边指数信号 (single-sided exponential signal) 的表达式为

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3.4-3)$$

其中  $\alpha > 0$ 。它的傅里叶变换为

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\Omega)t} dt = \frac{1}{\alpha + j\Omega} \quad (3.4-4)$$

从而 
$$|F(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \Omega^2}} \quad (3.4-5)$$

$$\varphi(\Omega) = -\arctan\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right) \quad (3.4-6)$$

单边指数信号的波形  $f(t)$ 、幅度谱  $|F(j\Omega)|$  和相位谱  $\varphi(\Omega)$  如图 3.4-2 所示。

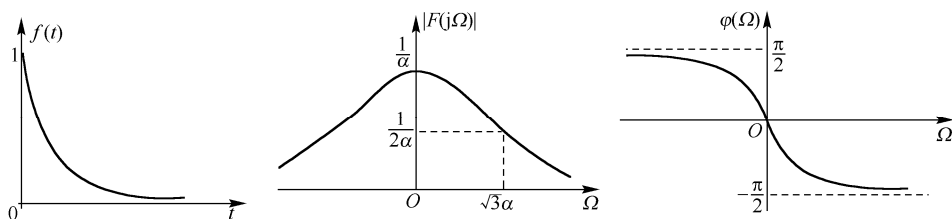


图 3.4-2 单边指数信号的波形和频谱

## 3. 双边指数信号

双边指数信号 (two-sided exponential signal) 的表达式为

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} \quad -\infty < t < \infty \quad (3.4-7)$$

式中,  $\alpha > 0$ 。它的傅里叶变换为

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} e^{-j\Omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\Omega t} dt = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2} \quad (3.4-8)$$

从而 
$$|F(j\Omega)| = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2} \quad (3.4-9)$$

$$\varphi(\Omega) = 0 \quad (3.4-10)$$

双边指数信号的波形  $f(t)$ 、频谱  $F(j\Omega)$  如图 3.4-3 所示。

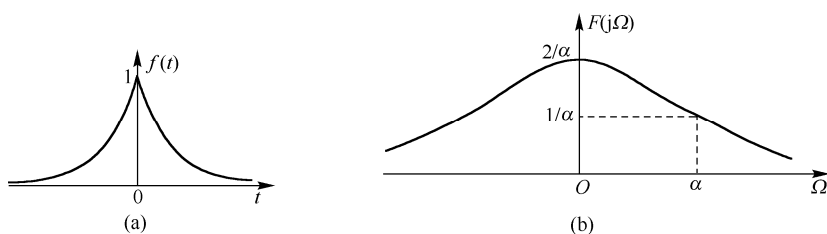


图 3.4-3 双边指数信号的波形和频谱

#### 4. 符号函数

符号函数的表达式为

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (3.4-11)$$

显然，符号函数不满足绝对可积的条件，但它存在傅里叶变换，可以借助于符号函数与双边指数函数  $f(t)$  相乘，先求出此乘积信号  $f_1(t)$  的频谱，然后取极限，从而得出符号函数  $\text{sgn}(t)$  的频谱。

双边指数函数的表达式为

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} = e^{\alpha t}u(-t) + e^{-\alpha t}u(t)$$

式中， $\alpha > 0$ 。其波形如图 3.4-3(a)所示。而乘积信号

$$f_1(t) = \text{sgn}(t)f(t) = -e^{\alpha t}u(-t) + e^{-\alpha t}u(t)$$

$f_1(t)$  的波形如图 3.4-4 所示。其傅里叶变换为

$$F_1(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^0 -e^{\alpha t}e^{-j\Omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t}e^{-j\Omega t} dt = \frac{-j2\Omega}{\alpha^2 + \Omega^2}$$

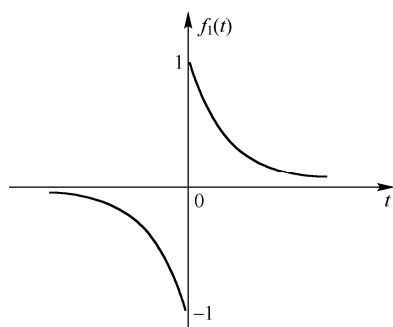


图 3.4-4  $f_1(t)$  的波形

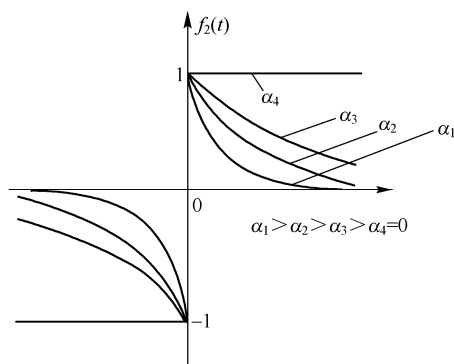


图 3.4-5 从  $f_1(t)$  演变到  $\text{sgn}(t)$  的过程

符号函数可看做是当  $\alpha \rightarrow 0$  时  $f_1(t)$  的极限，如图 3.4-5 所示。因此，它的频谱函数也是  $f_1(t)$  的频谱函数  $F_1(j\Omega)$  在  $\alpha \rightarrow 0$  时的极限。所以

$$F(j\Omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_1(j\Omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-j2\Omega}{\alpha^2 + \Omega^2} = \frac{2}{j\Omega} \quad (3.4-12)$$

从而

$$|F(j\Omega)| = 2/|\Omega| \quad (3.4-13)$$

$$\varphi(\Omega) = \begin{cases} -\pi/2 & \Omega > 0 \\ \pi/2 & \Omega < 0 \end{cases} \quad (3.4-14)$$

其波形和频谱如图 3.4-6 所示。

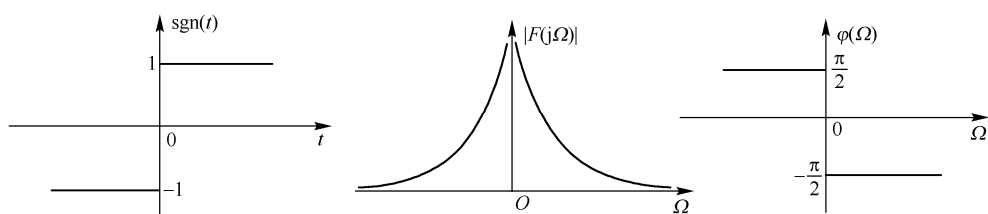


图 3.4-6 符号函数的波形和频谱

## 5. 冲激函数和冲激偶函数

### (1) 冲激函数的傅里叶变换

根据傅里叶变换的定义式(3.3-1), 以及冲激函数的取样性质, 可求出单位冲激函数  $\delta(t)$  的傅里叶变换

$$F(j\Omega) = \mathcal{F}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\Omega t} dt = 1 \quad (3.4-15)$$

即单位冲激函数的频谱是常数 1, 在整个频率范围内频谱是均匀分布的, 也就是说它的频带宽度为无穷大。因此常常称这种频谱为均匀频谱或白色频谱, 如图 3.4-7 所示。

冲激函数的傅里叶变换也可以用矩形脉冲的傅里叶变换取极限得到。图 3.4-8(a)所示的矩形脉冲  $f_1(t)$  的表达式为

$$f_1(t) = \frac{1}{\tau} \left[ u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

它的频谱为 
$$F_1(j\Omega) = \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \quad (3.4-16)$$

如图 3.4-8(b)所示。

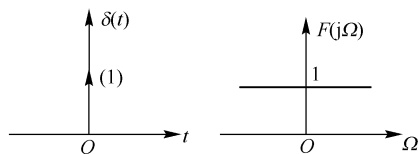


图 3.4-7 单位冲激函数的波形和频谱

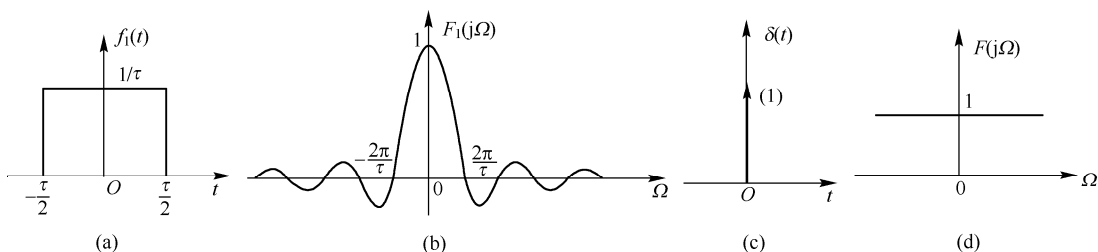


图 3.4-8 用极限法求单位冲激函数的频谱的过程

令矩形脉冲的宽度  $\tau \rightarrow 0$ , 则矩形脉冲就变为冲激函数, 相应地只要令式(3.4-16)中的  $\tau \rightarrow 0$ , 则  $F_1(j\Omega)$  就成为单位冲激函数的频谱, 即

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \lim_{\tau \rightarrow 0} F_1(j\Omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) = 1$$

从频谱图上也可看出, 当  $\tau \rightarrow 0$  时, 图 3.4-8(b)中的第一个零值点  $2\pi/\tau \rightarrow \infty$ , 其频谱也变成常数 1。

## (2) 冲激函数的傅里叶逆变换

冲激函数的频谱等于常数, 那么怎样的时间函数其频谱是冲激函数呢? 也就是说需要求  $\delta(\Omega)$  的傅里叶逆变换。

由傅里叶逆变换的定义式(3.3-4)容易求得

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \quad (3.4-17)$$

上式也可写为

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{2\pi}\right] = \delta(\Omega) \quad (3.4-18)$$

或

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\Omega) \quad (3.4-19)$$

此结果表明, 直流信号的频谱是冲激函数。或者反过来说, 若某时间函数的频谱中包含有冲激函数  $\delta(\Omega)$ , 则它所对应的时间函数中必包含有直流分量。

也可以利用求极限的方法来求直流信号的频谱。因为直流信号 1 可以看成是幅度为 1、宽度为  $\tau$  的矩形脉冲取  $\tau \rightarrow \infty$  的极限的结果, 即

$$1 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[ u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$

$$\text{从而} \quad \mathcal{F}[1] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \mathcal{F}\left[ u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \quad (3.4-20)$$

$$\text{由式(2.3-17)知} \quad \delta(\Omega) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}(k\Omega) \quad (3.4-21)$$

若令  $k = \tau/2$ , 比较式(3.4-20)与式(3.4-21)可得到

$$\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\Omega) \quad (3.4-22)$$

可见, 直流信号的频谱是位于  $\Omega = 0$  的冲激函数。

## (3) 冲激偶的傅里叶变换

$$\text{因为 } \mathcal{F}[\delta(t)] = 1, \text{ 所以} \quad \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$\text{将上式两边对 } t \text{ 求导} \quad \frac{d}{dt} \delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

$$\text{所以} \quad \mathcal{F}\left[\frac{d}{dt} \delta(t)\right] = \mathcal{F}[\delta'(t)] = j\Omega \quad (3.4-23)$$

$$\text{同理可得} \quad \mathcal{F}[\delta^{(n)}(t)] = (j\Omega)^n \quad (3.4-24)$$

在 3.5 节中将要讨论时域微分特性, 在那里可以直接得到式(3.4-24)的结果。

## 6. 阶跃信号

单位阶跃信号  $u(t)$  虽然不满足绝对可积条件, 但它仍存在傅里叶变换。可将  $u(t)$  看成是幅度为 1/2 的直流信号与幅度为 1/2 的符号函数之和, 即

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$

上式两边进行傅里叶变换可得  $\mathcal{F}[u(t)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(t)]$

由式(3.4-22)和式(3.4-12)可得  $u(t)$  的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} \quad (3.4-25)$$

单位阶跃信号  $u(t)$  及幅度谱、相位谱如图 3.4-9 所示。

可见，单位阶跃信号  $u(t)$  的频谱在  $\Omega = 0$  点存在一个冲激函数  $\pi\delta(\Omega)$ ，这就说明  $u(t)$  含有直流分量  $1/2$ 。

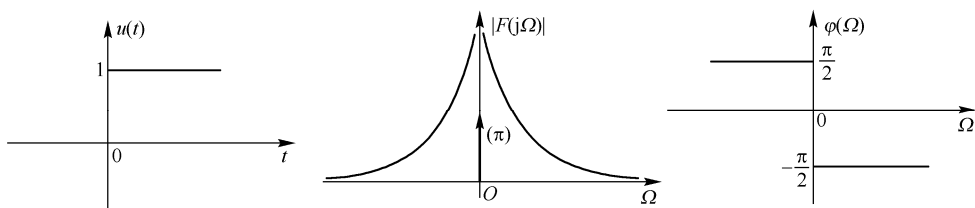


图 3.4-9 单位阶跃函数的波形和频谱

一些常用信号的傅里叶变换如附录 A 所示。

## 3.5 傅里叶变换的基本性质

前面已经讨论了信号的时间函数和频谱函数之间用傅里叶正逆变换互求的一般关系。如果进一步研究傅里叶正逆变换式，还可以得出两者之间的若干特定对应关系。下面将研究傅里叶变换的一些常用性质。

### 1. 线性 (linearity) 特性

若  $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(j\Omega)$ ， $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(j\Omega)$ ，则对于任意常数  $a_1$  和  $a_2$ ，有

$$\mathcal{F}[a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)] = a_1 F_1(j\Omega) + a_2 F_2(j\Omega) \quad (3.5-1)$$

由傅里叶变换的定义很容易证明上述结论。对于多个信号的情况也是如此，即有

$$\mathcal{F}\left[\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{F}[f_i(t)] = \sum_{i=1}^n a_i F_i(j\Omega) \quad (3.5-2)$$

式中， $a_i$  为任意常数。

### 2. 对称性 (symmetry)

根据傅里叶变换的定义，信号  $f(t)$  的傅里叶变换

$$F(j\Omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt$$

在一般情况下是频率  $\Omega$  的复函数，它可以用幅度频谱  $|F(j\Omega)|$  和相位频谱  $\varphi(\Omega)$  的形式来表

示, 即

$$F(j\Omega) = |F(j\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)}$$

也可以表示成实部  $R(\Omega)$  和虚部  $X(\Omega)$  的形式, 即有

$$F(j\Omega) = \operatorname{Re}[F(j\Omega)] + j\operatorname{Im}[F(j\Omega)] = R(\Omega) + jX(\Omega) \quad (3.5-3)$$

且有

$$|F(j\Omega)| = \sqrt{R^2(\Omega) + X^2(\Omega)} \quad (3.5-4)$$

$$\varphi(\Omega) = \arctan \frac{X(\Omega)}{R(\Omega)} \quad (3.5-5)$$

信号  $f(t)$  的傅里叶变换  $F(j\Omega)$  的对称性表现在下列各式

$$\mathcal{F}[f(-t)] = F(-j\Omega) \quad (3.5-6)$$

$$\mathcal{F}[f^*(t)] = F^*(-j\Omega) \quad (3.5-7)$$

$$\mathcal{F}[f^*(-t)] = F^*(j\Omega) \quad (3.5-8)$$

式(3.5-6)至式(3.5-8)无论信号  $f(t)$  是实函数还是复函数皆成立。下面对于信号  $f(t)$  是实函数和虚函数两种特定情况讨论它们的对称性。

● 若  $f(t)$  是实函数, 则  $F(j\Omega)$  的实部  $R(\Omega)$  是偶函数, 虚部  $X(\Omega)$  是奇函数。

证明: 因为

$$\begin{aligned} F(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\Omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\Omega t dt \\ &= R(\Omega) + jX(\Omega) \end{aligned}$$

显然, 其实部是偶函数:

$$R(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\Omega t dt = R(-\Omega)$$

其虚部是奇函数:

$$X(\Omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\Omega t dt = -X(-\Omega)$$

由于  $R(\Omega)$  是偶函数、 $X(\Omega)$  是奇函数, 利用式(3.5-4)和式(3.5-5)可以证明,  $|F(j\Omega)|$  是偶函数,  $\varphi(\Omega)$  是奇函数。

当  $f(t)$  是实偶函数时, 有

$$F(j\Omega) = R(\Omega), \quad X(\Omega) = 0 \quad (3.5-9)$$

表明, 实偶函数的频谱函数也是实偶函数。

当  $f(t)$  是实奇函数时, 有

$$F(j\Omega) = jX(\Omega), \quad R(\Omega) = 0 \quad (3.5-10)$$

表明, 实奇函数的频谱函数是虚奇函数。

● 若  $f(t)$  是虚函数, 则  $F(j\Omega)$  的实部  $R(\Omega)$  是奇函数, 虚部  $X(\Omega)$  是偶函数。

证明: 令  $f(t) = jx(t)$ , 这里  $x(t) = x^*(t)$ , 则  $f(t)$  的傅里叶变换可写为

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} jx(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\Omega t dt + j \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\Omega t dt$$

显然, 其实部是奇函数:

$$R(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin\Omega t dt = -R(-\Omega)$$

其虚部是偶函数:

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos\Omega t dt = X(-\Omega)$$



当  $f(t)$  是虚函数时, 由式(3.5-4)和式(3.5-5)可知, 其幅度频谱  $|F(j\Omega)|$  仍为偶函数, 相位频谱  $\varphi(\Omega)$  仍为奇函数。

### 3. 对偶性 (duality)

$$\text{若 } \mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega), \text{ 则 } \mathcal{F}[F(jt)] = 2\pi f(-\Omega) \quad (3.5-11)$$

对偶性表明, 与信号  $f(t)$  的频谱函数  $F(j\Omega)$  形式相同的时间函数  $F(jt)$  的傅里叶变换为  $2\pi f(-\Omega)$ 。这里的  $f(-\Omega)$  与原信号  $f(t)$  有相同的形式。

**证明:** 因为傅里叶逆变换式(3.3-5b)为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

将上式中的自变量  $t$  换为  $-t$ , 得

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) e^{-j\Omega t} d\Omega$$

再将上式中的  $t$  换为  $\Omega$ , 并将原来的  $\Omega$  换为  $t$ , 得

$$f(-\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\Omega t} dt$$

或

$$2\pi f(-\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(jt) e^{-j\Omega t} dt$$

即有

$$\mathcal{F}[F(jt)] = 2\pi f(-\Omega)$$

当  $f(t)$  是实偶函数时, 由式(3.5-9)知, 它的频谱函数也是实偶函数, 即有

$$F(j\Omega) = R(\Omega) = R(-\Omega)$$

于是对偶性可写成

$$\mathcal{F}[R(t)] = 2\pi f(\Omega) \quad (3.5-12)$$

例如, 单位冲激信号  $\delta(t)$  是实偶函数, 它的傅里叶变换是常数 1, 即

$$\delta(t) \xleftrightarrow{\text{F.T.}} 1$$

根据式(3.5-12)可知, 在时域中常数 1 (直流信号), 其频谱函数应是  $2\pi\delta(\Omega)$ , 即

$$1 \xleftrightarrow{\text{F.T.}} 2\pi\delta(\Omega)$$

这与式(3.4-19)的结果完全一致。该对偶特性如图 3.5-1 所示。

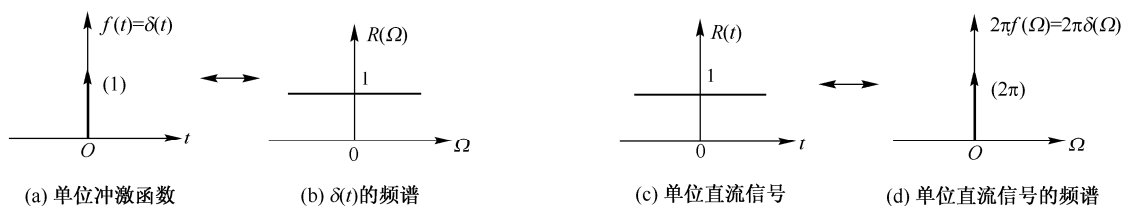


图 3.5-1 傅里叶变换的对偶性

当  $f(t)$  是实奇函数时, 由式(3.5-10)可知, 它的频谱函数是虚奇函数, 即有

$$F(j\Omega) = jX(\Omega) = -jX(-\Omega)$$

$$\text{于是, 对偶性可写成} \quad \mathcal{F}[jX(t)] = 2\pi f(-\Omega) = -2\pi f(\Omega) \quad (3.5-13a)$$

$$\text{或} \quad \mathcal{F}[X(t)] = -j2\pi f(-\Omega) = j2\pi f(\Omega) \quad (3.5-13b)$$

例如, 符号函数  $\text{sgn}(t)$  是奇函数, 它的傅里叶变换是虚奇函数  $\frac{2}{j\Omega}$ , 即

$$\text{sgn}(t) \xleftrightarrow{\text{F.T.}} \frac{2}{j\Omega}$$

$$\text{根据式(3.5-13)可以求得} \quad 1/t \xleftrightarrow{\text{F.T.}} j\pi \text{sgn}(-\Omega) = -j\pi \text{sgn}(\Omega)$$

利用对偶性, 可以将求傅里叶逆变换的问题转化为求傅里叶变换来进行。

$$\text{因为根据对偶性, 若} \quad \mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega)$$

$$\text{则} \quad \mathcal{F}[F(jt)] = 2\pi f(-\Omega)$$

现在要求的逆变换是  $f(t)$ , 需要先求出  $F(jt)$  的傅里叶变换, 根据上式可得到

$$f(-\Omega) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[F(jt)]$$

所以, 只要在上式中令  $\Omega = -t$ , 即可求出  $F(j\Omega)$  的逆变换  $f(t)$ , 即

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[F(jt)] \Big|_{\Omega=-t} \quad (3.5-14)$$

**例 3.5-1** 求  $\mathcal{F}^{-1}[j\pi \text{sgn}(\Omega)]$ 。

$$\text{解:} \quad \mathcal{F}^{-1}[j\pi \text{sgn}(\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[j\pi \text{sgn}(t)] \Big|_{\Omega=-t} = \frac{1}{2\pi} \left[ j\pi \cdot \frac{2}{j\Omega} \right] \Big|_{\Omega=-t} = -\frac{1}{t}$$

**例 3.5-2** 已知信号  $f(t)$  的傅里叶变换为

$$F(j\Omega) = \begin{cases} 2\pi A & |\Omega| < \tau/2 \\ 0 & |\Omega| > \tau/2 \end{cases}$$

如图 3.5-2(a)所示, 试求其逆变换  $f(t)$ 。

**解:** 将给出的  $F(j\Omega)$  的  $\Omega$  改换成  $t$ , 则有

$$F(jt) = \begin{cases} 2\pi A, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

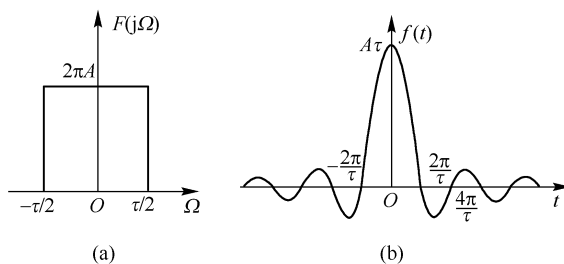


图 3.5-2 抽样函数及其频谱函数

这是一个幅度为  $2\pi A$ , 宽度为  $\tau$  的矩形脉冲。它的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[F(jt)] = 2\pi A\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

$$\text{所以} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[F(jt)] \Big|_{\Omega=-t} = \frac{1}{2\pi} \left[ 2\pi A\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \right] \Big|_{\Omega=-t} = A\tau \text{Sa}\left(\frac{t\tau}{2}\right)$$

从该例看出, 矩形脉冲形式的频谱函数对应的时间函数  $f(t)$  为抽样函数, 如图3.5-2(b)所示。由式(3.4-2)得知, 矩形脉冲信号的频谱函数是抽样函数。这充分说明傅里叶变换具有对偶性。

#### 4. 位移性 (shifting property)

位移性包括时移 (time-shifting) 和频移 (frequency-shifting) 两个特性。

##### (1) 时移特性

$$\text{若 } \mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega), \text{ 则 } \mathcal{F}[f(t-t_0)] = F(j\Omega)e^{-j\Omega t_0} \quad (3.5-15)$$

证明: 根据傅里叶变换定义, 有

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-j\Omega t} dt$$

$$\begin{aligned} \text{令 } x = t - t_0, \text{ 则有 } \mathcal{F}[f(t-t_0)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\Omega(x+t_0)} dx = e^{-j\Omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\Omega x} dx \\ &= F(j\Omega)e^{-j\Omega t_0} \end{aligned}$$

$$\text{同理, 有 } \mathcal{F}[f(t+t_0)] = F(j\Omega)e^{j\Omega t_0} \quad (3.5-16)$$

时移特性表明, 信号  $f(t)$  在时域中沿时间轴右移  $t_0$ , 等效于在频域中乘以相位因子  $e^{-j\Omega t_0}$ 。或者说, 信号  $f(t)$  在时域中沿时间轴右移  $t_0$  后, 其幅度谱不变, 而相位谱产生  $-\Omega t_0$  的变化。

例 3.5-3 求图 3.5-3(a)所示的单边矩形脉冲信号的频谱函数。

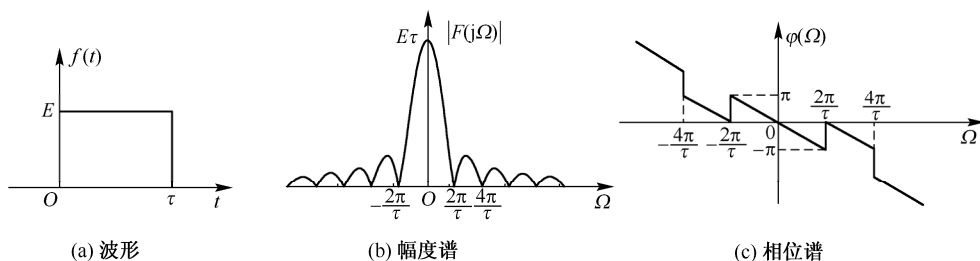


图 3.5-3 单边矩形脉冲及频谱函数

解: 图 3.5-3(a)所示的单边矩形脉冲可以看做是将图 3.4-1(a)所示的对称矩形脉冲在时间上延迟  $\tau/2$  得到的。于是根据时移特性, 单边矩形脉冲信号的频谱函数等于式(3.4-2)乘以  $e^{-j\Omega \frac{\tau}{2}}$ , 即为

$$F(j\Omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)e^{-j\Omega \frac{\tau}{2}}$$

显然, 它的幅度谱与图 3.4-1(c)完全一样, 将其重画在图 3.5-3(b)中, 而它的相位谱要在图 3.4-1(d)所示的相位谱基础上增加一附加相位  $-\Omega\tau/2$ , 如图 3.5-3(c)所示。

##### (2) 频移特性 (或称调制定理 (modulation theorem))

$$\text{若 } \mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega), \text{ 则 } \mathcal{F}[f(t)e^{j\Omega_0 t}] = F[j(\Omega - \Omega_0)] \quad (3.5-17)$$

式中,  $\Omega_0$  为常数。

**证明:** 根据傅里叶变换定义, 有

$$\mathcal{F}\left[f(t)e^{j\Omega_0 t}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\Omega_0 t} e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\Omega - \Omega_0)t} dt = F[j(\Omega - \Omega_0)]$$

$$\text{同理可证} \quad \mathcal{F}\left[f(t)e^{-j\Omega_0 t}\right] = F[j(\Omega + \Omega_0)] \quad (3.5-18)$$

频移特性表明, 信号  $f(t)$  在时域中乘以  $e^{j\Omega_0 t}$ , 等效于  $f(t)$  的频谱  $F(j\Omega)$  在频域中沿频率轴右移  $\Omega_0$ 。也就是说, 如果  $f(t)$  的频谱原来在  $\Omega = 0$  附近 (基带信号), 将  $f(t)$  乘以  $e^{j\Omega_0 t}$ , 就可以使其频谱搬移到  $\Omega = \Omega_0$  附近。在通信中, 这样的过程叫做调制 (modulation), 在 6.4 节中, 将对调制信号进行较详细的研究。反之, 如果  $f(t)$  的频谱原来在  $\Omega = \Omega_0$  附近 (高频信号), 若将  $f(t)$  乘以  $e^{-j\Omega_0 t}$ , 就可以使其频谱搬移到  $\Omega = 0$  附近。在通信中, 这样的过程叫做解调 (demodulation)。而如果  $f(t)$  的频谱原来在  $\Omega = \Omega_c$  附近, 将  $f(t)$  乘以  $e^{j\Omega_0 t}$  后, 其频谱将搬移到  $\Omega = \Omega_c + \Omega_0$  附近, 这样的过程称为变频 (frequency conversion)。

由于实际中不可能获得复指数信号, 因此频谱搬移的实现原理是, 将信号  $f(t)$  乘以载波信号  $\cos \Omega_0 t$  或  $\sin \Omega_0 t$ , 下面分析这种相乘作用引起的频谱搬移。

因为  $\cos \Omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t})$ ,  $\sin \Omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\Omega_0 t} - e^{-j\Omega_0 t})$ , 可以推导出

$$\mathcal{F}\left[f(t)\cos \Omega_0 t\right] = \frac{1}{2}\left\{F[j(\Omega + \Omega_0)] + F[j(\Omega - \Omega_0)]\right\} \quad (3.5-19)$$

$$\mathcal{F}\left[f(t)\sin \Omega_0 t\right] = \frac{j}{2}\left\{F[j(\Omega + \Omega_0)] - F[j(\Omega - \Omega_0)]\right\} \quad (3.5-20)$$

式(3.5-19)表明, 将时间信号  $f(t)$  乘以  $\cos \Omega_0 t$ , 等效于将  $f(t)$  的频谱  $F(j\Omega)$  一分为二, 沿频率轴向左、向右各平移  $\Omega_0$ 。式(3.5-20)亦类似。

**例 3.5-4** 求  $e^{j\Omega_0 t}$ ,  $\cos \Omega_0 t$  及  $\sin \Omega_0 t$  的频谱。

**解:** 由  $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\Omega)$ , 以及式(3.5-18)、式(3.5-19)和式(3.5-20)可以求出

$$\mathcal{F}[e^{j\Omega_0 t}] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \quad (3.5-21)$$

$$\mathcal{F}[\cos \Omega_0 t] = \pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)] \quad (3.5-22)$$

$$\mathcal{F}[\sin \Omega_0 t] = j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)] \quad (3.5-23)$$

**例 3.5-5** 求图 3.5-4(a)所示的矩形脉冲调幅信号的频谱。

**解:** 该矩形脉冲调幅信号可看成是对称矩形脉冲信号  $G(t)$  与余弦函数  $\cos \Omega_0 t$  的乘积, 即

$$f(t) = G(t)\cos \Omega_0 t$$

其中

$$G(t) = \begin{cases} E & |t| < \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

$G(t)$  的频谱为  $G(j\Omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$

根据式(3.5-19)可求出  $f(t)$  的频谱为

$$\begin{aligned} F(j\Omega) &= \frac{1}{2} \left\{ G[j(\Omega + \Omega_0)] + G[j(\Omega - \Omega_0)] \right\} \\ &= \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[(\Omega + \Omega_0)\frac{\tau}{2}\right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[(\Omega - \Omega_0)\frac{\tau}{2}\right] \end{aligned}$$

可见, 矩形调幅信号的频谱等于将包络线(对称矩形脉冲信号)的频谱一分为二, 沿频率轴向左和向右各移动载频  $\Omega_0$ 。矩形调幅信号的频谱  $F(j\Omega)$  如图 3.5-4(b)

所示(图中  $\Omega_0 \gg \frac{2\pi}{\tau}$ )。

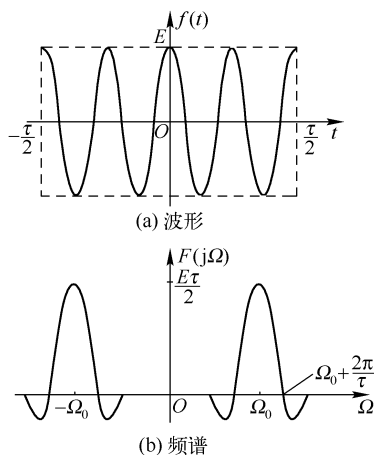


图 3.5-4 矩形脉冲调幅信号

### 5. 尺度变换 (scaling)

若  $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega)$ , 则  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\Omega}{a}\right)$  (3.5-24)

这里,  $a$  为非零常数。

证明: 因为  $\mathcal{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\Omega t} dt$

令  $x = at$ , 则当  $a > 0$  时, 有

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\frac{\Omega}{a}x} dx = \frac{1}{a} F\left(j\frac{\Omega}{a}\right)$$

而当  $a < 0$  时, 有  $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j\frac{\Omega}{a}x} dx$

$$= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\frac{\Omega}{a}x} dx = -\frac{1}{a} F\left(j\frac{\Omega}{a}\right)$$

综合上述两种情况, 得到

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\Omega}{a}\right)$$

特例: 令  $a = -1$ , 可得  $\mathcal{F}[f(-t)] = F(-j\Omega)$  (3.5-25)

此式就是前面介绍过的式(3.5-6)。

尺度变换特性表明, 信号在时域中压缩( $a > 1$ )等效于在频域中扩展; 反之, 信号在时域中扩展( $0 < a < 1$ )则等效于在频域中压缩。上述结论是不难理解的, 因为信号的波形压缩  $a$  倍, 信号随时间变化加快  $a$  倍, 所以它所包含的频率分量增加  $a$  倍, 也就是说, 频谱展宽  $a$  倍。根据能量守恒原理, 各频率分量的大小必然减小  $a$  倍。为了说明尺度变换特性, 在图 3.5-5 中画出了矩形脉冲及其频谱展缩情况。从图中可见,  $f(t)$  沿时间轴扩展成  $f(t/2)$ , 表现为脉冲宽度由  $\tau$  增大为  $2\tau$ ; 对应的频谱  $F(j\Omega)$  则沿频率轴压缩成  $2F(j2\Omega)$ , 表现为第一个零点由  $2\pi/\tau$  变为  $\pi/\tau$ 。如果以频谱主瓣宽度作为矩形脉冲信号的等效频带宽度, 则它与脉冲宽度成反比, 这与前面分析周期矩形脉冲信号的频谱时的情况是一致的。如要压缩信号的持续时间, 就不得不以展宽频带为代价; 而如要压缩信号的频带宽度, 则又不得不以增加信号的持续时间为代价。这就是通信中时长与带宽的矛盾, 或者通信速度与信道容量的矛盾。

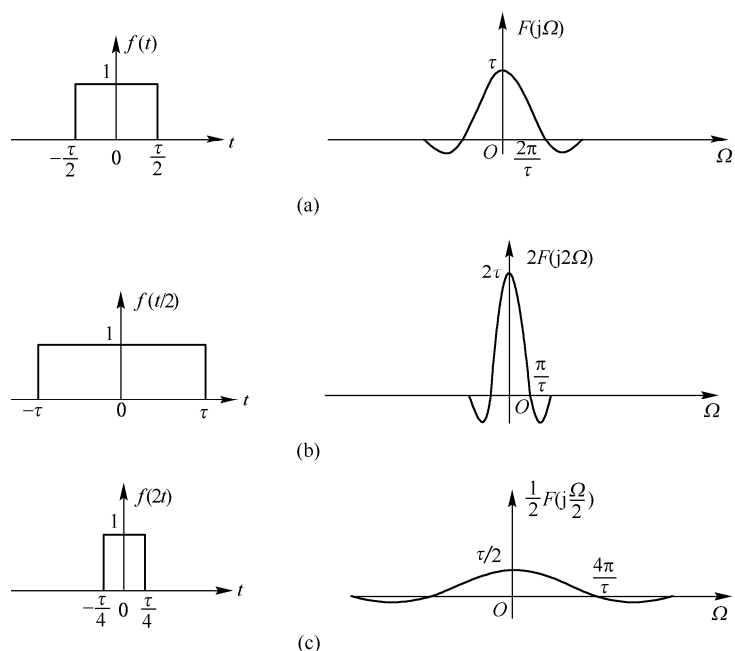


图 3.5-5 矩形脉冲的尺度变换特性

综合时移特性与尺度变换特性，还可以证明以下两式

$$\mathcal{F}[f(at - t_0)] = \frac{1}{|a|} F\left(j\frac{\Omega}{a}\right) e^{-j\frac{\Omega t_0}{a}} \quad (3.5-26)$$

$$\mathcal{F}[f(t_0 - at)] = \frac{1}{|a|} F\left(-j\frac{\Omega}{a}\right) e^{-j\frac{\Omega t_0}{a}} \quad (3.5-27)$$

## 6. 卷积定理

卷积定理包括时域卷积定理和频域卷积定理。

(1) 时域卷积定理 (convolution theorem in the time domain)

若给定两个时间函数  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$ ，并且已知  $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(j\Omega)$ ， $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(j\Omega)$ ，则

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(j\Omega)F_2(j\Omega) \quad (3.5-28)$$

**证明：**根据卷积的定义，可得

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

因为

$$\mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\Omega t} dt$$

交换积分次序，并利用时移特性，得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\Omega t} dt \right] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(j\Omega) e^{-j\Omega \tau} d\tau = F_2(j\Omega) \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) e^{-j\Omega \tau} d\tau \\ &= F_1(j\Omega) F_2(j\Omega) \end{aligned}$$

时域卷积定理表明，两个时间函数卷积的频谱等于各时间函数频谱的乘积，即在时域中两函数的卷积对应于频域中两函数频谱的乘积。

(2) 频域卷积定理 (convolution theorem in the frequency domain)

若  $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(j\Omega)$ ,  $\mathcal{F}[f_2(t)] = F_2(j\Omega)$ , 则

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(j\Omega) * F_2(j\Omega) \quad (3.5-29)$$

其中 
$$F_1(j\Omega) * F_2(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\mu) F_2[j(\Omega - \mu)] d\mu \quad (3.5-30)$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi} F_1(j\Omega) * F_2(j\Omega)\right] &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} [F_1(j\Omega) * F_2(j\Omega)] e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\mu) F_2[j(\Omega - \mu)] d\mu \right\} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\mu) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F_2[j(\Omega - \mu)] e^{j\Omega t} d\Omega \right\} d\mu \end{aligned}$$

令  $x = \Omega - \mu$ , 则  $d\Omega = dx$ , 因此

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi} F_1(j\Omega) * F_2(j\Omega)\right] &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\mu) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} F_2(jx) e^{j(x+\mu)t} dx \right\} d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\mu) e^{j\mu t} d\mu \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(jx) e^{jxt} dx = f_1(t) f_2(t) \end{aligned}$$

即

$$\mathcal{F}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(j\Omega) * F_2(j\Omega)$$

频域卷积定理表明，两时间函数乘积的频谱等于各时间函数频谱的卷积乘以  $\frac{1}{2\pi}$ 。即在时域中两函数的乘积对应于频域中两函数频谱的卷积。

**例 3.5-6** 已知两矩形脉冲信号分别为

$$f_1(t) = 2[u(t+1) - u(t-1)], \quad f_2(t) = u(t+2) - u(t-2)$$

求  $f_1(t) * f_2(t)$  的傅里叶变换  $F(j\Omega) = \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)]$ 。

**解:**  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  的傅里叶变换分别为

$$F_1(j\Omega) = \mathcal{F}[f_1(t)] = 4\text{Sa}(\Omega), \quad F_2(j\Omega) = \mathcal{F}[f_2(t)] = 4\text{Sa}(2\Omega)$$

根据时域卷积定理，即式(3.5-28)，可求出

$$F(j\Omega) = \mathcal{F}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(j\Omega) F_2(j\Omega) = 16\text{Sa}(\Omega)\text{Sa}(2\Omega)$$

**例 3.5-7** 利用频域卷积定理求下式表示的余弦脉冲信号的频谱函数。

$$f(t) = \begin{cases} E \cos \frac{\pi}{\tau} t & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| > \tau/2 \end{cases}$$

解：余弦脉冲  $f(t)$  可以看做是矩形脉冲  $G(t)$  与无限长的余弦函数  $\cos \frac{\pi}{\tau} t$  的乘积，如图 3.5-6(a) 所示，即

$$f(t) = G(t) \cos \frac{\pi}{\tau} t$$

$$G(t) \text{ 的频谱函数为 } G(j\Omega) = \mathcal{F}[G(t)] = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

由式(3.5-22)可得  $\cos \frac{\pi}{\tau} t$  的频谱函数

$$\mathcal{F}\left[\cos \frac{\pi}{\tau} t\right] = \pi \left[ \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{\tau}\right) \right]$$

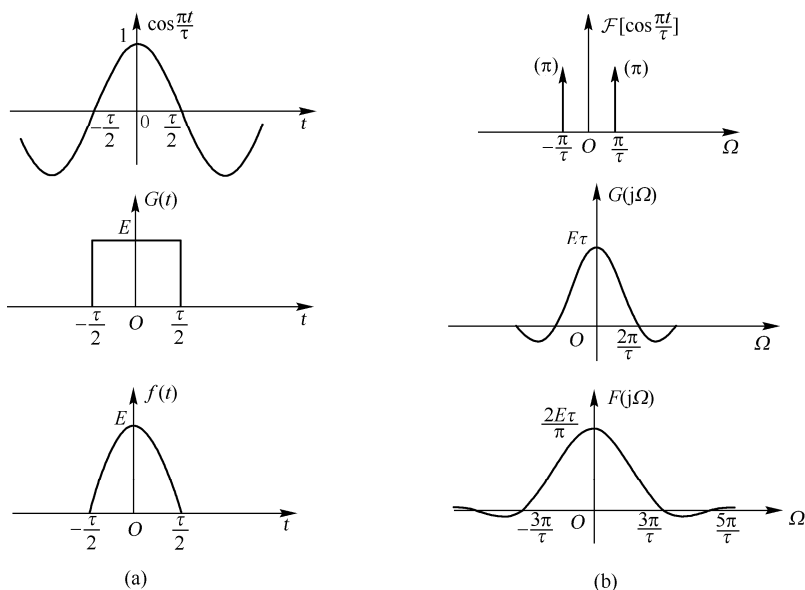


图 3.5-6 利用频域卷积定理求余弦脉冲的频谱

这样，根据频域卷积定理，可以得到  $f(t)$  的频谱函数为

$$\begin{aligned} F(j\Omega) &= \mathcal{F}\left[G(t) \cos \frac{\pi}{\tau} t\right] = \frac{1}{2\pi} G(j\Omega) * \mathcal{F}\left[\cos \frac{\pi}{\tau} t\right] \\ &= \frac{1}{2\pi} E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) * \pi \left[ \delta\left(\Omega + \frac{\pi}{\tau}\right) + \delta\left(\Omega - \frac{\pi}{\tau}\right) \right] \\ &= \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\Omega + \frac{\pi}{\tau}\right) \frac{\tau}{2}\right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\Omega - \frac{\pi}{\tau}\right) \frac{\tau}{2}\right] \end{aligned}$$

将上式化简后可得

$$F(j\Omega) = \frac{2E\tau}{\pi} \frac{\cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\Omega\tau}{\pi}\right)^2\right]}$$

其频谱  $F(j\Omega)$  如图 3.5-6(b) 所示。



## 7. 微分与积分 (differentiation and integration)

微分与积分特性包括时域微分与积分特性和频域微分与积分特性。

### (1) 时域微分 (differentiation in time domain)

$$\text{若 } \mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega), \text{ 则 } \mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\Omega F(j\Omega) \quad (3.5-31)$$

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\Omega)^n F(j\Omega) \quad (3.5-32)$$

证明: 因为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

将上式两边对  $t$  求导数, 得

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [j\Omega F(j\Omega)] e^{j\Omega t} d\Omega$$

所以

$$\mathcal{F}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = j\Omega F(j\Omega)$$

同理可推导出

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = (j\Omega)^n F(j\Omega)$$

利用时域微分特性容易求出一些由定义式不容易求得的函数的傅里叶变换。例如, 由  $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ , 可得

$$\mathcal{F}[\delta'(t)] = j\Omega \quad (3.5-33)$$

以及

$$\mathcal{F}[\delta^{(n)}(t)] = (j\Omega)^n \quad (3.5-34)$$

### (2) 时域积分 (integration in time domain)

若  $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega)$ , 则

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(j\Omega)}{j\Omega} + \pi F(0) \delta(\Omega) \quad (3.5-35)$$

式中,  $F(0) = F(j\Omega)|_{\Omega=0}$ 。

证明: 由傅里叶变换的定义式可知

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t-\tau) d\tau\right] e^{-j\Omega t} dt$$

交换上式中的积分次序, 得

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) e^{-j\Omega t} dt\right] d\tau$$

上式中方括号内是阶跃函数  $u(t-\tau)$  的傅里叶变换。根据时移特性,  $u(t-\tau)$  的频谱函数为

$$\left[\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}\right] e^{-j\Omega\tau} = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega} e^{-j\Omega\tau}$$

代入前式则得

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \pi\delta(\Omega) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{1}{j\Omega} e^{-j\Omega\tau} d\tau \\ &= \frac{F(j\Omega)}{j\Omega} + \pi F(0) \delta(\Omega) \end{aligned}$$

如果  $F(0)=0$ ，则式(3.5-35)变为

$$\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{F(j\Omega)}{j\Omega} \quad (3.5-36)$$

利用积分特性求取信号  $f(t)$  的频谱函数  $F(j\Omega)$  时，可以将信号  $f(t)$  微分，即  $\varphi(t)=\frac{df(t)}{dt}$ ，并求其傅里叶变换  $\Phi(j\Omega)=\mathcal{F}[\varphi(t)]$ ，然后再利用积分特性导出原信号  $f(t)$  的傅里叶变换  $F(j\Omega)$ 。然而应当注意，原信号经微分之后去掉其直流分量，再积分就不一定能恢复原来信号，存在着一个积分常数问题。例如， $u(t)$  和  $\frac{1}{2}\text{sgn}(t)$  的微分都是  $\delta(t)$ ，然而  $\delta(t)$  的积分等于  $u(t)$ ，却不等于  $\frac{1}{2}\text{sgn}(t)$ 。为了利用微分之后的函数  $\varphi(t)=\frac{df(t)}{dt}$  的傅里叶变换  $\Phi(j\Omega)=\mathcal{F}[\varphi(t)]$ ，来直接求取原信号  $f(t)$  的傅里叶变换  $F(j\Omega)=\mathcal{F}[f(t)]$ ，式(3.5-35)的时域积分特性应修正为

$$F(j\Omega)=\frac{\Phi(j\Omega)}{j\Omega}+[f(-\infty)+f(\infty)]\pi\delta(\Omega) \quad (3.5-37)$$

式中， $F(j\Omega)=\mathcal{F}[f(t)]$ ， $\Phi(j\Omega)=\mathcal{F}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=\mathcal{F}[\varphi(t)]$ ， $f(\infty)=\lim_{t\rightarrow\infty}f(t)$ ， $f(-\infty)=\lim_{t\rightarrow-\infty}f(t)$ ，且  $f(\infty)$  和  $f(-\infty)$  应为有限值。式(3.5-37)的证明可查阅有关参考书籍。

由式(3.5-37)可知，当  $f(-\infty)=f(\infty)=0$  时，有

$$F(j\Omega)=\frac{\Phi(j\Omega)}{j\Omega} \quad (3.5-38)$$

前面所举的  $u(t)$  和  $\frac{1}{2}\text{sgn}(t)$  的例子，利用式(3.5-37)就可方便地求得它们的傅里叶变换。它们的  $\varphi(t)=\frac{df(t)}{dt}=\delta(t)$  是相同的，但各自的傅里叶变换却不同。当  $f(t)=u(t)$  时， $\varphi(t)=\frac{df(t)}{dt}=\delta(t)$ ，且知  $\Phi(j\Omega)=1$ ， $f(-\infty)=0$ ， $f(\infty)=1$ ，则由式(3.5-37)可求出  $f(t)=u(t)$  的傅里叶变换为  $\mathcal{F}[u(t)]=\frac{1}{j\Omega}+\pi\delta(\Omega)$ ，与式(3.4-25)结果一致。而当  $f(t)=\frac{1}{2}\text{sgn}(t)$  时， $\varphi(t)=\frac{d}{dt}f(t)=\delta(t)$ ，且知  $\Phi(j\Omega)=1$ ，但  $f(-\infty)=-1/2$ ， $f(\infty)=1/2$ ，则由式(3.5-37)可求出  $f(t)=\frac{1}{2}\text{sgn}(t)$  的傅里叶变换为  $\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\text{sgn}(t)\right]=\frac{1}{j\Omega}$ ，于是有  $\mathcal{F}[\text{sgn}(t)]=\frac{2}{j\Omega}$ ，与式(3.4-12)结果一致。

**例 3.5-8** 求图 3.5-7(a)所示的三角脉冲信号

$$f(t)=\begin{cases} E\left(1-\frac{2}{\tau}|t|\right) & |t|\leq\tau/2 \\ 0 & |t|>\tau/2 \end{cases}$$

的频谱函数  $F(j\Omega)$ 。

**解：**首先求出  $f(t)$  的一阶导数和二阶导数，得到

$$\frac{df(t)}{dt}=\begin{cases} 2E/\tau & -\tau/2<t<0 \\ -2E/\tau & 0<t<\tau/2 \\ 0 & |t|>\tau/2 \end{cases}$$

及

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{2E}{\tau} \left[ \delta(t + \frac{\tau}{2}) + \delta(t - \frac{\tau}{2}) - 2\delta(t) \right]$$

它们的波形分别如图 3.5-7(b)和(c)所示。

利用微分特性，对上式两边取傅氏变换得

$$(j\Omega)^2 F(j\Omega) = \frac{2E}{\tau} \left[ e^{j\Omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\Omega\frac{\tau}{2}} - 2 \right] = -\frac{\Omega^2 E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\Omega\tau}{4}\right)$$

由于  $f(-\infty) = f(\infty) = 0$ ，所以可以利用  $f(t)$  的二阶导数的频谱来求其原函数  $f(t)$  的频谱。于是

$$F(j\Omega) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\Omega\tau}{4}\right)$$

如图 3.5-7(d)所示。

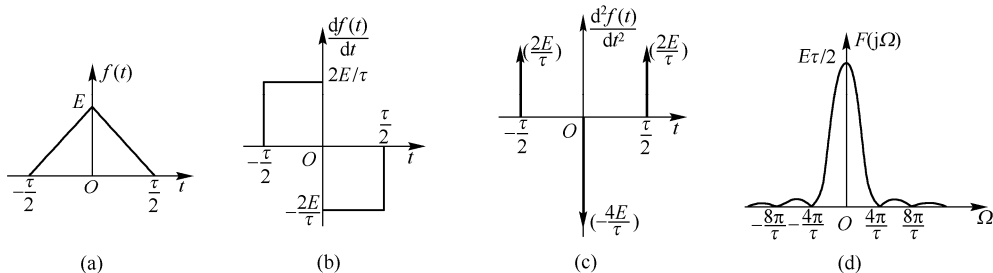


图 3.5-7 三角脉冲信号的波形和频谱

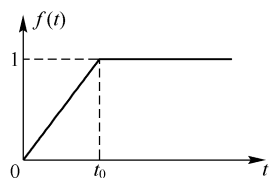
**例 3.5-9** 求图 3.5-8 所示信号  $f(t)$  的频谱函数  $F(j\Omega)$ 。

**解：**由图可写出

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t/t_0 & 0 \leq t \leq t_0 \\ 1 & t > t_0 \end{cases}$$

则

$$\varphi(t) = \frac{df(t)}{dt} = \begin{cases} 1/t_0 & 0 < t < t_0 \\ 0 & t < 0 \text{ 及 } t > t_0 \end{cases}$$



根据对称矩形脉冲的频谱及时移特性，可得  $\varphi(t)$  的频谱为

$$\Phi(j\Omega) = \text{Sa}\left(\frac{\Omega t_0}{2}\right) e^{-j\Omega\frac{t_0}{2}}$$

因为  $f(-\infty) = 0$ ， $f(\infty) = 1$ ，因此，可用式(3.5-37)求得  $f(t)$  的频谱函数为

$$F(j\Omega) = \frac{\Phi(j\Omega)}{j\Omega} + [f(\infty) + f(-\infty)]\pi\delta(\Omega) = \frac{1}{j\Omega} \text{Sa}\left(\frac{\Omega t_0}{2}\right) e^{-j\Omega\frac{t_0}{2}} + \pi\delta(\Omega)$$

显然，当  $t_0 \rightarrow 0$  时， $f(t) \rightarrow u(t)$ ， $\varphi(t) \rightarrow \delta(t)$ ，上式变为

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$$

与式(3.4-25)的结果完全相同。

(3) 频域微分 (differentiation in frequency domain)

若  $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega)$ ，则  $\mathcal{F}[(-jt)f(t)] = \frac{dF(j\Omega)}{d\Omega}$  (3.5-39)

$$\mathcal{F}[(-jt)^n f(t)] = \frac{d^n F(j\Omega)}{d\Omega^n} \quad (3.5-40)$$

证明：由傅里叶变换式

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt$$

两边对  $\Omega$  求导，得

$$\frac{dF(j\Omega)}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)f(t)e^{-j\Omega t} dt$$

所以

$$\mathcal{F}[(-jt)f(t)] = \frac{dF(j\Omega)}{d\Omega}$$

同理可证

$$\mathcal{F}[(-jt)^n f(t)] = \frac{d^n F(j\Omega)}{d\Omega^n}$$

利用频域微分特性可以求得一些在通常意义下不便进行变换的信号的频谱。例如，由  $\mathcal{F}[1] = 2\pi\delta(\Omega)$ ，可得

$$\mathcal{F}[t] = 2\pi j\delta'(\Omega) \quad (3.5-41)$$

$$\mathcal{F}[t^n] = 2\pi j^n \delta^{(n)}(\Omega) \quad (3.5-42)$$

又由  $\mathcal{F}[u(t)] = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{j\Omega}$ ，可得

$$\mathcal{F}[tu(t)] = j\pi\delta'(\Omega) - \frac{1}{\Omega^2} \quad (3.5-43)$$

(4) 频域积分 (integration in frequency domain)

$$\text{若 } \mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega), \text{ 则 } \mathcal{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu)d\mu\right] = \frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t) \quad (3.5-44)$$

证明：因为

$$\int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu)d\mu = \int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu)d\mu * \delta(\Omega)$$

根据 2.4 节介绍的卷积的微分与积分性质，即式(2.4-11)，上式为

$$\int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu)d\mu = F(j\Omega) * u(\Omega)$$

利用频域卷积定理，即式(3.5-29)可得

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu)d\mu\right] = \mathcal{F}^{-1}[F(j\Omega) * u(\Omega)] = 2\pi f(t)\mathcal{F}^{-1}[u(\Omega)] \quad (3.5-45)$$

由于

$$\mathcal{F}[u(t)] = \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega)$$

$$\text{利用对偶性可得 } \mathcal{F}^{-1}[u(\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[u(t)] \Big|_{\Omega=-t} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{j\Omega} + \pi\delta(\Omega) \right] \Big|_{\Omega=-t}$$

$$= \frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jt}$$

将上式代入式(3.5-45)中，即得

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu) d\mu\right] = 2\pi f(t) \left[\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{jt}\right] = \frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t)$$

若  $f(0) = 0$ ，则

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu) d\mu\right] = \frac{f(t)}{-jt} \quad (3.5-46)$$

式中， $f(0)$  是  $f(t)$  在  $t=0$  的值。

傅里叶变换的基本性质列于表 3.5-1 中。

表 3.5-1 傅里叶变换的基本性质

| 性 质          | 时 域 $f(t)$                                                                                            | 频域 $F(j\Omega)$                                                    | 时域频域对应关系 |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|----------|
| 1. 线性        | $\sum_{i=1}^n a_i f_i(t)$                                                                             | $\sum_{i=1}^n a_i F_i(j\Omega)$                                    | 线性叠加     |
| 2. 对称性       | $f(-t)$<br>$f^*(t)$<br>$f^*(-t)$                                                                      | $F(-j\Omega)$<br>$F^*(-j\Omega)$<br>$F^*(j\Omega)$                 |          |
| 3. 对偶性       | $F(jt)$                                                                                               | $2\pi f(-\Omega)$                                                  | 对偶       |
| 4. 时移        | $f(t-t_0)$                                                                                            | $F(j\Omega)e^{-j\Omega t_0}$                                       | 时移与相移    |
| 5. 频移        | $f(t)e^{j\Omega_0 t}$                                                                                 | $F[j(\Omega - \Omega_0)]$                                          | 调制与频移    |
|              | $f(t)\cos \Omega_0 t$                                                                                 | $\frac{1}{2}\{F[j(\Omega + \Omega_0)] + F[j(\Omega - \Omega_0)]\}$ |          |
|              | $f(t)\sin \Omega_0 t$                                                                                 | $\frac{j}{2}\{F[j(\Omega + \Omega_0)] - F[j(\Omega - \Omega_0)]\}$ |          |
| 6. 尺度变换      | $f(at)$                                                                                               | $\frac{1}{ a } F(j\frac{\Omega}{a})$                               | 压缩与展宽    |
| 7. 时域卷积      | $f_1(t) * f_2(t)$                                                                                     | $F_1(j\Omega)F_2(j\Omega)$                                         | 乘积与卷积    |
| 8. 频域卷积      | $f_1(t)f_2(t)$                                                                                        | $\frac{1}{2\pi} F_1(j\Omega) * F_2(j\Omega)$                       |          |
| 9. 时域微分      | $\frac{df(t)}{dt}$                                                                                    | $(j\Omega)F(j\Omega)$                                              |          |
|              | $\frac{d^n f(t)}{dt^n}$                                                                               | $(j\Omega)^n F(j\Omega)$                                           |          |
| 10. 时域积分     | $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$                                                                      | $\frac{F(j\Omega)}{j\Omega} + \pi F(0)\delta(\Omega)$              |          |
| 11. 频域微分     | $(-jt)f(t)$                                                                                           | $\frac{dF(j\Omega)}{d\Omega}$                                      |          |
|              | $(-jt)^n f(t)$                                                                                        | $\frac{d^n F(j\Omega)}{d\Omega^n}$                                 |          |
| 12. 频域积分     | $\frac{f(t)}{-jt} + \pi f(0)\delta(t)$                                                                | $\int_{-\infty}^{\Omega} F(j\mu) d\mu$                             |          |
| 13. 帕斯瓦尔能量定理 | $\int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty}  F(j\Omega) ^2 d\Omega$ |                                                                    | 能量守恒     |

## 3.6 周期信号的傅里叶变换

由以上几节可知，周期信号的频谱可用傅里叶级数表示，而非周期信号的频谱则用傅里叶变换表示。下面再来研究周期信号的频谱可否使用傅里叶变换表示的问题，其目的是力图

把周期信号与非周期信号的分析方法统一起来,使傅里叶变换这一工具得到更广泛的应用。

这里先讨论最常见的周期信号——正弦信号与余弦信号的傅里叶变换,在此基础上再来研究一般周期信号的傅里叶变换。

## 1. 正弦、余弦信号的傅里叶变换

实际上,在例 3.5-4 中,已经求出了复指数信号、正弦和余弦信号的傅里叶变换。即

$$\mathcal{F}[e^{j\Omega_0 t}] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \quad (3.6-1)$$

$$\mathcal{F}[\cos\Omega_0 t] = \pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)] \quad (3.6-2)$$

$$\mathcal{F}[\sin\Omega_0 t] = j\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)] \quad (3.6-3)$$

由以上三式看出,复指数、正弦和余弦信号的频谱只包括位于 $\pm\Omega_0$ 处的冲激函数,它们的频谱如图 3.6-1 所示。

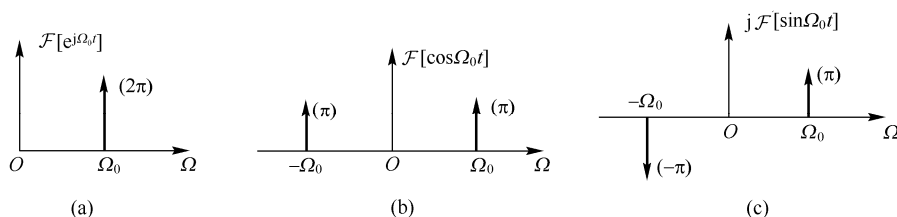


图 3.6-1 复指数、余弦和正弦信号的频谱

## 2. 一般周期信号的傅里叶变换

设周期信号 $\tilde{f}(t)$ 的周期为 $T_1$ ,则角频率为 $\Omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi/T_1$ ,可以将 $\tilde{f}(t)$ 展开成指数形式的傅里叶级数

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t}$$

将上式两边取傅里叶变换  $\mathcal{F}[\tilde{f}(t)] = \mathcal{F}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t}\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \mathcal{F}[e^{jn\Omega_1 t}] \quad (3.6-4)$

由式(3.6-1)知  $\mathcal{F}[e^{jn\Omega_1 t}] = 2\pi\delta(\Omega - n\Omega_1)$

将其代入式(3.6-4),即可求出周期信号 $\tilde{f}(t)$ 的傅里叶变换

$$F(j\Omega) = \mathcal{F}[\tilde{f}(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\Omega - n\Omega_1) \quad (3.6-5)$$

其中, $F_n$ 是 $\tilde{f}(t)$ 的傅里叶级数的系数

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \tilde{f}(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt \quad (3.6-6)$$

式(3.6-5)表明,周期信号 $\tilde{f}(t)$ 的傅里叶变换 $F(j\Omega)$ 是由一系列的冲激函数所组成的。这些冲激位于信号的各次谐波频率( $0, \pm\Omega_1, \pm 2\Omega_1, \dots$ )处,每个冲激的强度等于 $\tilde{f}(t)$ 的指数形式的傅里叶级数的系数 $F_n$ 的 $2\pi$ 倍。

**例 3.6-1** 求图 3.6-2(c)所示的周期单位冲激序列 $\delta_T(t)$ 的傅里叶级数与傅里叶变换。

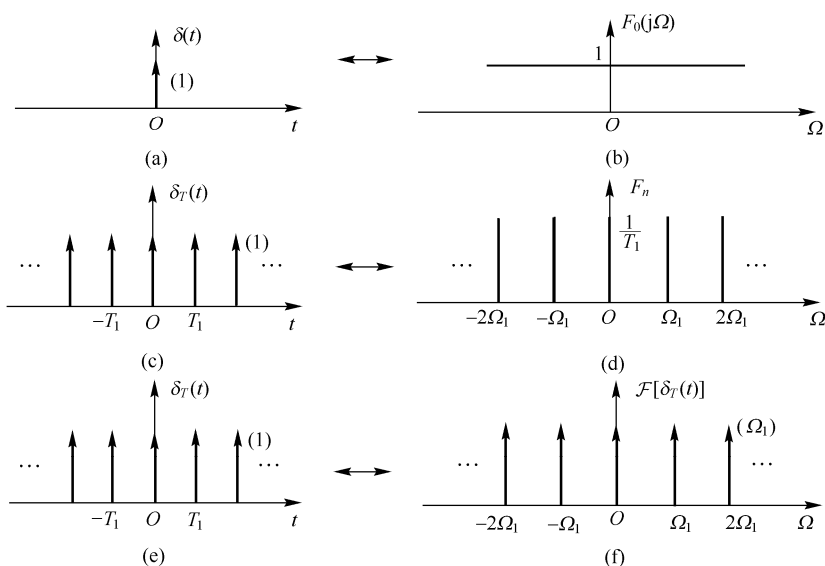


图 3.6-2 周期冲激序列  $\delta_T(t)$  的波形和频谱

解：由图 3.6-2(c)可看出  $\delta_T(t)$  的周期为  $T_1$ ，它的表达式为

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$$

因为  $\delta_T(t)$  是周期函数，所以可以把它展开成傅里叶级数

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t}$$

其中

$$\Omega_1 = 2\pi/T_1$$

$$F_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta_T(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} \delta(t) e^{-jn\Omega_1 t} dt = \frac{1}{T_1}$$

这样，得到  $\delta_T(t)$  的傅里叶级数为

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\Omega_1 t} \quad (3.6-7)$$

可见，在周期单位冲激序列的傅里叶级数中只包含位于  $\Omega = 0, \pm\Omega_1, \pm2\Omega_1, \dots, \pm n\Omega_1, \dots$  的频率分量，每个频率分量的大小相等，均等于  $1/T_1$ 。

根据式(3.6-5)可求出  $\delta_T(t)$  的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\Omega - n\Omega_1) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_1} \delta(\Omega - n\Omega_1) = \Omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_1) \quad (3.6-8)$$

可见，在周期单位冲激序列的傅里叶变换中，同样也只包含位于  $\Omega = 0, \pm\Omega_1, \pm2\Omega_1, \dots, \pm n\Omega_1, \dots$  频率处的冲激函数，其冲激强度是相等的，均等于  $\Omega_1$ 。 $\delta_T(t)$  的傅氏级数的频谱和傅氏变换的频谱分别如图 3.6-2(d)和(f)所示。

从图 3.6-2(e)和(f)还可以看出，周期单位冲激序列的时域波形和傅氏变换的频谱有同样的形状。

式(3.6-5)表明了周期信号的傅里叶变换与傅里叶系数  $F_n$  之间的关系。还可以推导出周期信号  $\tilde{f}(t)$  的傅里叶变换  $F(j\Omega)$  与对应的单脉冲  $f_0(t)$  (即周期信号  $\tilde{f}(t)$  在原点附近的一个主周期) 的傅里叶变换  $F_0(j\Omega)$  之间的关系。现推导如下:

一般周期信号  $\tilde{f}(t)$  可以用周期单位冲激序列  $\delta_T(t)$  来表示, 即

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT_1) = f_0(t) * \delta_T(t)$$

式中,  $f_0(t)$  就是对应于周期信号  $\tilde{f}(t)$  的单脉冲信号。

根据时域卷积定理可得  $\mathcal{F}[\tilde{f}(t)] = F_0(j\Omega) \mathcal{F}[\delta_T(t)]$

在例 3.6-1 中, 已求出  $\delta_T(t)$  的傅里叶变换, 即

$$\mathcal{F}[\delta_T(t)] = \Omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_1)$$

将其代入前一式, 即得周期信号  $\tilde{f}(t)$  的傅里叶变换

$$\mathcal{F}[\tilde{f}(t)] = F_0(j\Omega) \Omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_1) = \Omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(jn\Omega_1) \delta(\Omega - n\Omega_1) \quad (3.6-9)$$

如图 3.6-3 所示。

由此可见, 将  $f_0(t)$  波形进行以  $T_1$  为周期的周期延拓, 等效于在频域中对其进行以  $\Omega_1 = 2\pi/T_1$  为周期的等间隔冲激采样。冲激采样的概念将在 6.3 节中详细介绍。即时域的周期性对应于频域的采样性, 或者说, 时域的周期性对应于频域的离散性。

比较式(3.6-5)与式(3.6-9)应有  $2\pi F_n = \Omega_1 F_0(jn\Omega_1)$

即 
$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(jn\Omega_1) = \frac{1}{T_1} F_0(j\Omega) |_{\Omega=n\Omega_1} \quad (3.6-10)$$

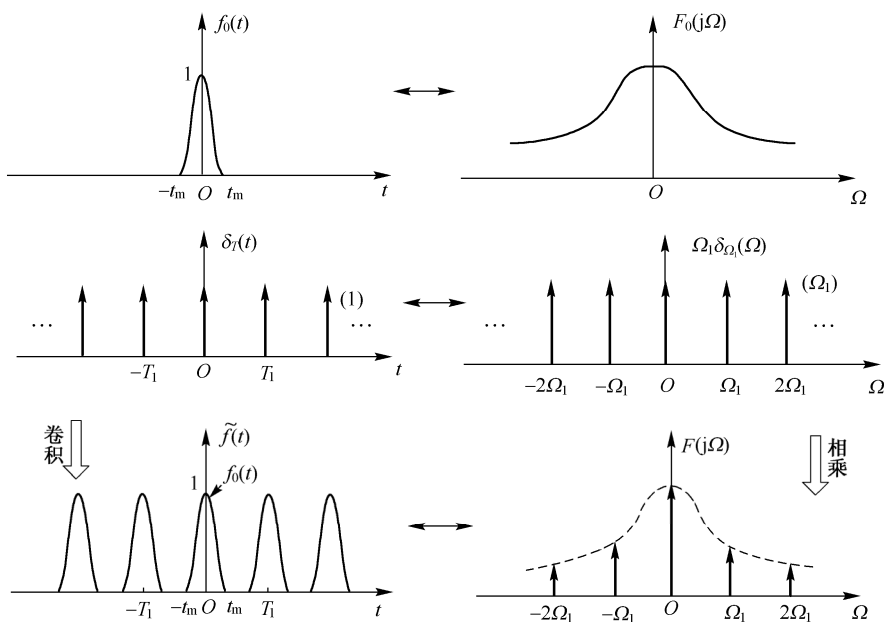


图 3.6-3 周期信号及其频谱函数



上式表明了周期信号  $\tilde{f}(t)$  的傅里叶系数  $F_n$  与对应的单脉冲的傅里叶变换  $F_0(j\Omega)$  之间的关系。即周期信号  $\tilde{f}(t)$  的傅里叶系数  $F_n$  等于对应的单脉冲的傅里叶变换  $F_0(j\Omega)$  在  $n\Omega_1$  频率点的值乘以  $1/T_1$ 。

**例 3.6-2** 求图 3.6-4 所示的周期矩形脉冲信号  $\tilde{f}(t)$  的傅里叶级数和傅里叶变换。已知  $\tilde{f}(t)$  的幅度为  $E$ ，脉宽为  $\tau$ ，周期为  $T_1$ ，角频率为  $\Omega_1 = 2\pi/T_1$ 。

**解：** 因为与  $\tilde{f}(t)$  对应的单脉冲信号  $f_0(t)$  的傅里叶变换为

$$F_0(j\Omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

由式(3.6-10)可以求出周期矩形脉冲信号的傅里叶系数

$$F_n = \frac{1}{T_1} F_0(j\Omega) \Big|_{\Omega=n\Omega_1} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right)$$

这样， $\tilde{f}(t)$  的傅里叶级数为

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\Omega_1 t} = \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right) e^{jn\Omega_1 t}$$

再由式(3.6-5)即可求出  $\tilde{f}(t)$  的傅里叶变换

$$F(j\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\Omega - n\Omega_1) = E\tau\Omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right) \delta(\Omega - n\Omega_1)$$

$F_0(j\Omega)$ ,  $F_n$  及  $F(j\Omega)$  的频谱如图 3.6-4 所示（图中画出的是在  $T_1 = 2\tau$  的情况下的频谱）。

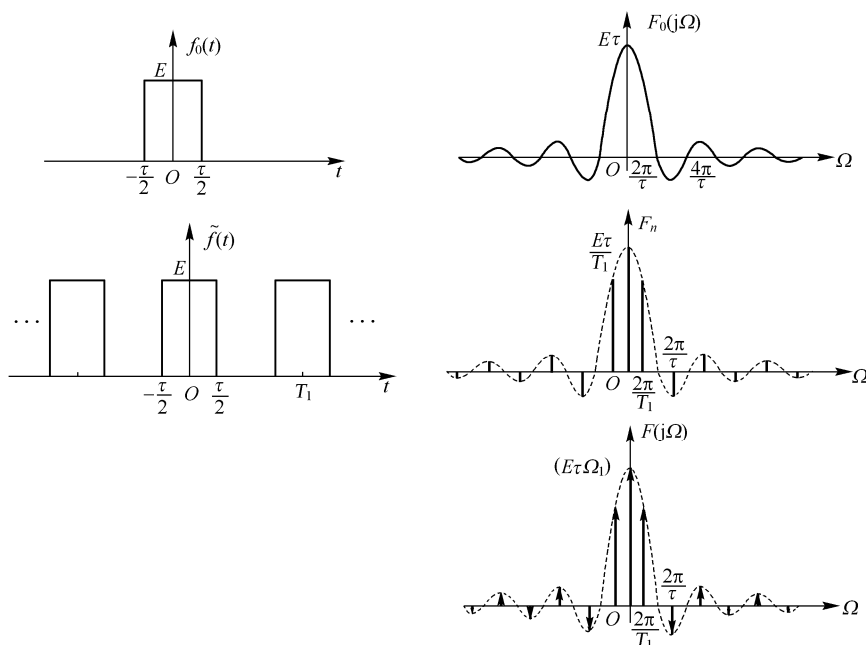


图 3.6-4 周期矩形脉冲信号和对应的矩形单脉冲信号的波形及其频谱

## 3.7 拉普拉斯变换

从本节起将研究另一种变换域分析法——拉普拉斯变换（Laplace transform）分析，它是傅里叶变换分析的推广。拉普拉斯变换分析也称为复频域分析或  $s$  域分析。

### 3.7.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

由 3.3 节可知，当信号  $f(t)$  满足绝对可积的条件时，便可构成一对傅里叶变换式

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\Omega t} dt \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$$

但在工程实际中会遇到许多信号不满足绝对可积的条件，例如增长指数信号  $e^{\alpha t}u(t)$  ( $\alpha > 0$ ) 不存在傅里叶变换。而对于阶跃信号  $u(t)$  和周期信号虽未受此约束，但在变换式中出现了广义函数——冲激函数  $\delta(\Omega)$ ，这就增加了分析的难度。为了简化某些常见信号的变换式和使更多信号存在变换，可以将傅里叶变换推广为拉普拉斯变换（简称拉氏变换）。

信号  $f(t)$  之所以不满足绝对可积的条件，是由于当  $t \rightarrow \infty$  或  $t \rightarrow -\infty$  时， $f(t)$  不趋于零。如果引入实指数函数  $e^{-\sigma t}$  ( $\sigma$  为实数) 把它与  $f(t)$  相乘，只要  $\sigma$  的数值选择得适当，就可使  $e^{-\sigma t}f(t)$  收敛，绝对可积条件就能得到满足。这样， $e^{-\sigma t}f(t)$  的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[e^{-\sigma t}f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\Omega)t} dt$$

它是  $\sigma + j\Omega$  的函数，可以写成

$$F(\sigma + j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\Omega)t} dt \quad (3.7-1)$$

$F(\sigma + j\Omega)$  的傅氏逆变换为  $e^{-\sigma t}f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\sigma + j\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega$

将上式两边同乘以  $e^{\sigma t}$ ，便得到

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\sigma + j\Omega)e^{(\sigma+j\Omega)t} d\Omega \quad (3.7-2)$$

虽然  $F(\sigma + j\Omega)$  是函数  $f(t)e^{-\sigma t}$  的傅氏变换，但通过式(3.7-1)由函数  $f(t)$  求得  $F(\sigma + j\Omega)$  后，再通过式(3.7-2)由  $F(\sigma + j\Omega)$  重新得到  $f(t)$ 。因而式(3.7-1)和式(3.7-2)组成一对积分变换。为使式(3.7-1)和式(3.7-2)更加简洁，令  $s = \sigma + j\Omega$  为复频率，从而  $ds = jd\Omega$  ( $\sigma$  选为常量)，当  $\Omega = \pm\infty$  时， $s = \sigma \pm j\infty$ ，于是式(3.7-1)可改写成

$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.7-3)$$

式(3.7-2)可改写成

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_B(s)e^{st} ds \quad (3.7-4)$$

式(3.7-3)称为  $f(t)$  的双边拉普拉斯变换（two-sided Laplace transform），简称为双边拉氏变换；而式(3.7-4)称为  $F_B(s)$  的双边拉普拉斯逆变换（inverse two-sided Laplace transform），简称为双边拉氏逆变换。

从上述由傅氏变换导出拉氏变换的过程中可以看出， $F_B(s) = F(\sigma + j\Omega)$  对  $f(t)e^{-\sigma t}$  来说，是  $f(t)e^{-\sigma t}$  的傅氏变换，对  $f(t)$  来说，则是  $f(t)$  的双边拉氏变换。或者说  $F_B(s)$  是  $f(t)$  的广义

傅氏变换。所谓广义是指把  $f(t)$  乘以  $e^{-\sigma t}$  之后再进行傅氏变换，而  $f(t)e^{-\sigma t}$  较容易满足绝对可积的条件。这就意味着有许多原来不存在傅氏变换的函数，而存在广义傅氏变换，即双边拉氏变换。于是双边拉氏变换的引出，扩大了函数变换的范围。

拉氏变换与傅氏变换的基本差别在于：傅氏变换是将时域函数  $f(t)$  变换为频域函数  $F(j\Omega)$ ，或做相反的变换，这里时域变量  $t$  和频域变量  $\Omega$  都是实数；而拉氏变换则是将时域函数  $f(t)$  变换为复频域函数  $F_B(s)$ ，或做相反的变换，这里时域变量  $t$  是实数，复频域变量  $s$  是复数。概括地说，傅氏变换建立了时域和频域间的联系，而拉氏变换则建立了时域与复频域（ $s$  域）间的联系。

在信号与系统分析中，一般所遇到的总是因果信号，从而式(3.7-3)可以写成

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.7-5)$$

式中，积分下限取  $0^-$  是考虑到  $f(t)$  中可能包含冲激函数，以及在  $t=0$  出现跳变的情况。为方便起见，一般把下限取为  $0$ ，只在必要时才把它取为  $0^-$ 。

这时式(3.7-5)对应的拉普拉斯逆变换（原函数）可写成

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds & t \geq 0 \end{cases} \quad (3.7-6)$$

为了简便起见，常常只写上式中  $t \geq 0$  的部分。

式(3.7-5)称为  $f(t)$  的单边拉普拉斯变换（single-sided Laplace transform）（或像函数），简记为  $\mathcal{L}[f(t)]$ ；式(3.7-6)称为  $F(s)$  的拉普拉斯逆变换（或原函数），简记为  $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ ，即

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.7-7)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad t \geq 0 \quad (3.7-8)$$

其变换与逆变换的关系也简记为

$$f(t) \xleftrightarrow{\text{L.T.}} F(s) \quad (3.7-9)$$

目前，应用最广泛的是单边拉普拉斯变换，常简称它为拉普拉斯变换或拉氏变换，而对双边拉普拉斯变换将特别注明。

### 3.7.2 拉普拉斯变换的收敛域

在以  $\sigma$  为实轴， $j\Omega$  为虚轴的复平面中，凡能使式(3.7-3)或式(3.7-5)积分收敛，即满足下列绝对可积条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (3.7-10)$$

的  $\sigma$  的取值范围称为拉氏变换的收敛域（region of convergence），以 ROC 表示。

式(3.7-10)表明，拉氏变换是否存在，取决于能否选取适当的  $\sigma$ 。下面举例说明如何确定拉氏变换的 ROC。

**例 3.7-1** 求因果信号  $f_1(t) = e^{\alpha_1 t} u(t)$ （ $\alpha_1$  为实数）的双边拉氏变换及收敛域。

**解：**  $F_{B1}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_1 t} u(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-\alpha_1)t} dt$

当  $\sigma = \text{Re}[s] > \alpha_1$  时, 有 
$$F_{B1}(s) = -\frac{1}{s - \alpha_1} e^{-(s - \alpha_1)t} \bigg|_0^\infty = \frac{1}{s - \alpha_1}$$

$F_{B1}(s)$  的 ROC 如图 3.7-1 所示。

以上结果表明, 因果信号若存在双边拉氏变换, 其 ROC 在平行于  $j\Omega$  轴的一条直线的右边区域。图 3.7-1 中, 若  $\alpha_1 < 0$ , 收敛轴将移到  $j\Omega$  轴的左侧。

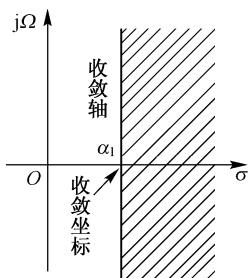


图 3.7-1 例 3.7-1 的  $F_{B1}(s)$  的收敛域

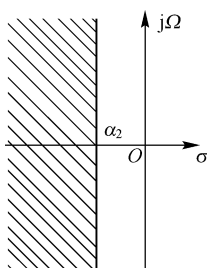


图 3.7-2 例 3.7-2 的  $F_{B2}(s)$  的收敛域

**例 3.7-2** 求左边信号  $f_2(t) = -e^{\alpha_2 t} u(-t)$  ( $\alpha_2$  为实数) 的双边拉氏变换及收敛域。

**解:** 
$$F_{B2}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha_2 t} u(-t) \cdot e^{-st} dt = -\int_{-\infty}^0 e^{-(s - \alpha_2)t} dt$$

当  $\sigma = \text{Re}[s] < \alpha_2$  时, 有 
$$F_{B2}(s) = -\int_{-\infty}^0 e^{-(s - \alpha_2)t} dt = \frac{1}{s - \alpha_2} e^{-(s - \alpha_2)t} \bigg|_{-\infty}^0 = \frac{1}{s - \alpha_2}$$

$F_{B2}(s)$  的 ROC 如图 3.7-2 所示。

以上结果表明, 若左边信号  $f_2(t)$  的双边拉氏变换存在, 则其 ROC 在平行于  $j\Omega$  轴的一条直线的左边区域。图 3.7-2 中, 若  $\alpha_2 > 0$ , 收敛轴将移到  $j\Omega$  轴的右侧。

**例 3.7-3** 求双边信号  $f(t) = \begin{cases} e^{\alpha_2 t} & t < 0 \\ e^{\alpha_1 t} & t > 0 \end{cases}$  的双边拉氏变换及收敛域。

**解:** 根据式(3.7-3)可得 
$$F_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha_2 t} e^{-st} dt + \int_0^{\infty} e^{\alpha_1 t} e^{-st} dt$$
$$= \frac{e^{-(s - \alpha_2)t}}{-(s - \alpha_2)} \bigg|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-(s - \alpha_1)t}}{-(s - \alpha_1)} \bigg|_0^{\infty}$$

显然, 当  $\text{Re}[s] < \alpha_2$ , 即  $\sigma < \alpha_2$  时, 上式第一项存在; 当  $\text{Re}[s] > \alpha_1$ , 即  $\sigma > \alpha_1$  时, 上式第二项存在, 这时

$$F_B(s) = \frac{1}{-(s - \alpha_2)} + \frac{1}{s - \alpha_1} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2)} \quad \alpha_1 < \sigma < \alpha_2$$

如果  $\alpha_2 > \alpha_1$ , 其收敛域是  $\alpha_1 < \sigma < \alpha_2$  的带状区域。如果  $\alpha_2 < \alpha_1$ , 则上式不收敛, 函数  $f(t)$  的双边拉氏变换不存在。图 3.7-3 画出了  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  取不同数值时 ROC 的情况。图(a)是  $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$  的情形, 其 ROC 是在右半平面中  $\alpha_1 < \sigma < \alpha_2$  的区域; 图(b)是  $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$  的情形, 其 ROC 是在左半平面中  $\alpha_1 < \sigma < \alpha_2$  的区域。图(c)是  $\alpha_1 = -\alpha$ ,  $\alpha_2 = \alpha$  的情形, 其 ROC 为  $-\alpha < \sigma < \alpha$ 。如果  $\alpha_2 = \infty$  则有  $t < 0$  时  $f(t) = 0$ , 于是就变成了例 3.7-1。如果  $\alpha_1 = -\infty$ , 就变成了例 3.7-2 的形式。

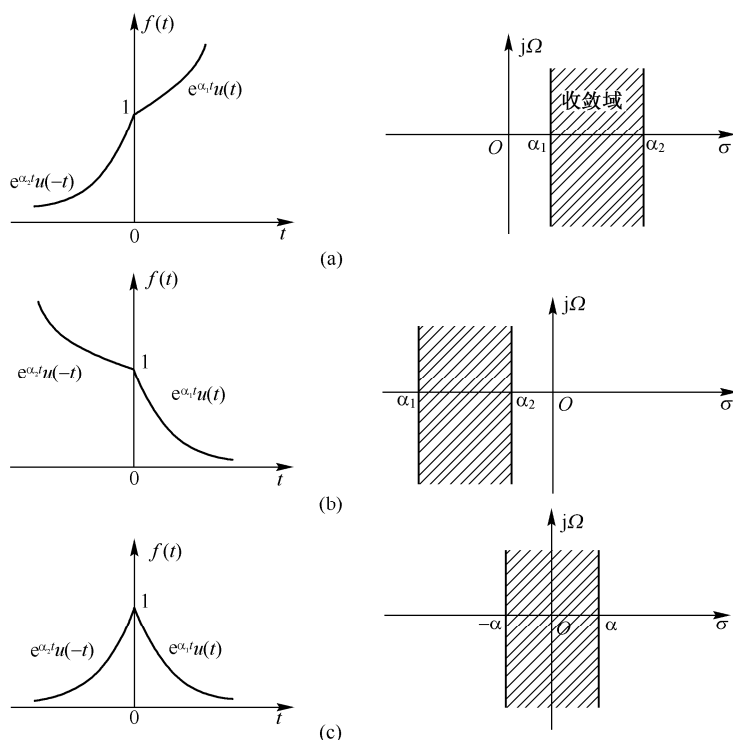


图 3.7-3 例 3.7-3 的双边拉氏变换的收敛域

比较例 3.7-1 和例 3.7-2, 若  $\alpha_1 = \alpha_2$ , 则  $F_{B1}(s) = F_{B2}(s)$ , 但  $F_{B1}(s)$  和  $F_{B2}(s)$  的收敛域完全不同 (无公共部分)。以上举例可见, 不同信号的双边拉氏变换可能相同, 即任意信号与其双边拉氏变换不是一一对应的, 而是任意信号和它的双边拉氏变换连同收敛域是一一对应的。

从例 3.7-1 可知, 单边拉氏变换的 ROC 为平行于  $j\Omega$  轴的一条收敛轴的右边区域, 可表示为

$$\sigma = \operatorname{Re}[s] > \sigma_0 \quad (3.7-11)$$

工程实际中绝大多数信号均存在单边拉氏变换, 并能找到相应的  $\sigma_0$ 。例如, 时限信号, 其在时间轴上是有始有终的,  $\sigma_0 = -\infty$ , 收敛域为整个  $s$  平面; 对于幂函数  $t^n$ ,  $\sigma_0 = 0$ , 即当  $\sigma > 0$  时,  $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-\sigma t} = 0$ , 收敛域为右半  $s$  平面。

但并非所有函数都能找到一个  $\sigma_0$ 。例如, 函数  $e^{t^2} u(t), t^t u(t)$  ( $0 \leq t < \infty$ ), 它们随  $t$  的增长速率比  $e^{-\sigma t}$  (无论  $\sigma$  为何值) 的衰减速率还要快, 这类函数成为非指数阶函数, 因此, 找不到满足条件的  $\sigma_0$ , 这样, 就不存在拉氏变换。但工程实际中很少遇到这样的信号, 即使出现, 大多数情况下也是时限的。

与双边拉氏变换相比较, 不同信号的单边拉氏变换必不相同, 即信号  $f(t)$  与其单边拉氏变换  $F(s)$  必然一一对应。由于单边拉氏变换的收敛问题比较简单, 一般情况下, 求单边拉氏变换时, 不需要注明收敛域。本书主要讨论单边拉氏变换。

### 3.7.3 典型信号的拉普拉斯变换

以下按拉普拉斯变换的定义式(3.7-7)来推导几个典型信号的拉氏变换。

### 1. 指数信号 $e^{-\alpha t}u(t)$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = -\frac{e^{-(\alpha+s)t}}{\alpha+s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha} \quad \sigma > -\alpha \quad (3.7-12)$$

### 2. 单位阶跃信号 $u(t)$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \sigma > 0 \quad (3.7-13)$$

显然，令式(3.7-12)中的常数  $\alpha$  等于零，可也得出式(3.7-13)的结果。

### 3. 单位冲激信号 $\delta(t)$

根据冲激信号的取样特性可方便地求出  $\delta(t)$  的拉氏变换

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{-st} \Big|_{t=0} = 1 \quad \sigma > -\infty \quad (3.7-14)$$

如果冲激出现在  $t = t_0 (t_0 > 0)$  时刻，则有

$$\mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0} \quad \sigma > -\infty \quad (3.7-15)$$

### 4. $t$ 的正幂信号 $t^n u(t)$ ( $n$ 是正整数)

$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt$$

用分部积分法，得 
$$\int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = -\frac{t^n}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt = \frac{n}{s} \int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-st} dt$$

所以 
$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n}{s} \mathcal{L}[t^{n-1} u(t)] \quad (3.7-16)$$

容易求得，当  $n=1$  时 
$$\mathcal{L}[t u(t)] = 1/s^2 \quad \sigma > 0 \quad (3.7-17)$$

当  $n=2$  时 
$$\mathcal{L}[t^2 u(t)] = 2/s^3 \quad \sigma > 0 \quad (3.7-18)$$

以此类推，得 
$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = n!/s^{n+1} \quad \sigma > 0 \quad (3.7-19)$$

将上述结果以及其他典型信号的拉氏变换（在下节陆续导出）列于表 3.7-1 中。

表 3.7-1 常用信号的拉氏变换

| 序 号 | $f(t) \quad (t > 0)$         | $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$      | 序 号 | $f(t) \quad (t > 0)$                       | $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$                  |
|-----|------------------------------|---------------------------------|-----|--------------------------------------------|---------------------------------------------|
| 1   | $e^{-\alpha t}$              | $\frac{1}{s+\alpha}$            | 7   | $e^{-\alpha t} \sin \Omega t$              | $\frac{\Omega}{(s+\alpha)^2 + \Omega^2}$    |
| 2   | $u(t)$                       | $\frac{1}{s}$                   | 8   | $e^{-\alpha t} \cos \Omega t$              | $\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \Omega^2}$  |
| 3   | $\delta(t)$                  | 1                               | 9   | $t e^{-\alpha t}$                          | $\frac{1}{(s+\alpha)^2}$                    |
| 4   | $t^n \quad (n \text{ 是正整数})$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$            | 10  | $t^n e^{-\alpha t} \quad (n \text{ 是正整数})$ | $\frac{n!}{(s+\alpha)^{n+1}}$               |
| 5   | $\sin \Omega t$              | $\frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$ | 11  | $t \sin \Omega t$                          | $\frac{2\Omega s}{(s^2 + \Omega^2)^2}$      |
| 6   | $\cos \Omega t$              | $\frac{s}{s^2 + \Omega^2}$      | 12  | $t \cos \Omega t$                          | $\frac{s^2 - \Omega^2}{(s^2 + \Omega^2)^2}$ |

## 3.8 拉普拉斯变换的基本性质

虽然, 由拉氏变换的定义式(3.7-7)可以求得一些常用信号的拉氏变换, 但是, 在实际应用中常常不去做这一积分运算, 而是利用拉氏变换的一些基本性质得出它们的变换式。

### 1. 线性 (linearity) 特性

若  $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ ,  $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ , 则

$$\mathcal{L}[K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)] = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s) \quad (3.8-1)$$

其中,  $K_1, K_2$  为常数。

由拉氏变换的定义很容易证明上述结论。对于多个信号的情况也是如此, 即有

$$\mathcal{L}\left[\sum_{i=1}^n K_i f_i(t)\right] = \sum_{i=1}^n K_i \mathcal{L}[f_i(t)] = \sum_{i=1}^n K_i F_i(s) \quad (3.8-2)$$

式中,  $K_i$  为任意常数。

例 3.8-1 求  $f(t) = \sin \Omega t \cdot u(t)$  的拉氏变换。

解: 由于  $\sin \Omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t})$ , 根据拉氏变换的线性特性, 并利用式(3.7-12), 得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin \Omega t \cdot u(t)] &= \mathcal{L}\left[\frac{1}{2j}(e^{j\Omega t} - e^{-j\Omega t})u(t)\right] = \frac{1}{2j}\mathcal{L}[e^{j\Omega t}u(t)] - \frac{1}{2j}\mathcal{L}[e^{-j\Omega t}u(t)] \\ &= \frac{1}{2j} \frac{1}{s - j\Omega} - \frac{1}{2j} \frac{1}{s + j\Omega} = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2} \quad \sigma > 0 \end{aligned} \quad (3.8-3)$$

$$\text{同理可得} \quad \mathcal{L}[\cos \Omega t \cdot u(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{2}(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t})u(t)\right] = \frac{s}{s^2 + \Omega^2} \quad \sigma > 0 \quad (3.8-4)$$

### 2. 时域微分和积分

(1) 时域微分 (differentiation in the time domain)

$$\text{若 } \mathcal{L}[f(t)] = F(s), \text{ 则} \quad \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-) \quad (3.8-5)$$

$$\text{证明:} \quad \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_0^\infty \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned} \text{应用分部积分法, 则有} \quad \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] &= [e^{-st} f(t)]_0^\infty - \int_0^\infty (-s) e^{-st} f(t) dt \\ &= sF(s) - f(0^-) \end{aligned}$$

上述对一阶导数的微分定理可推广到高阶导数, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \cdots - f^{(n-1)}(0^-) \\ &= s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0^-) \end{aligned} \quad (3.8-6)$$

**例 3.8-2** 已知  $f(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ ，求  $f'(t)$  的像函数。

**解法一：**由拉氏变换的基本定义求解。

因为 
$$f'(t) = \delta(t) - \alpha e^{-\alpha t}u(t)$$

所以 
$$\mathcal{L}[f'(t)] = 1 - \frac{\alpha}{s + \alpha} = \frac{s}{s + \alpha}$$

**解法二：**由时域微分性质求解。

已知 
$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s + \alpha}$$

所以 
$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^-) = \frac{s}{s + \alpha} - 0 = \frac{s}{s + \alpha}$$

可见，两种方法所得结果相同。

(2) 时域积分 (integration in the time domain)

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ，则 
$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s} \quad (3.8-7)$$

式中， $f^{(-1)}(0^-) = \int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau$  是  $f(t)$  积分式在  $t = 0^-$  的取值。

**证明：**由于 
$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau + \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau\right]$$

而其中第一项为常量，即  $\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau = f^{(-1)}(0^-)$ ，所以

$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{0^-} f(\tau) d\tau\right] = \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s}$$

第二项可借助分部积分法求得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau\right] &= \int_0^\infty \left[\int_{0^-}^t f(\tau) d\tau\right] e^{-st} dt \\ &= \left[ -\frac{e^{-st}}{s} \int_{0^-}^t f(\tau) d\tau \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_{0^-}^\infty f(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s} F(s) \end{aligned}$$

所以 
$$\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s}$$

**例 3.8-3** 试通过阶跃信号  $u(t)$  的积分求  $tu(t)$  和  $t^n u(t)$  的拉氏变换。

**解：**因为 
$$F(s) = \mathcal{L}[u(t)] = 1/s$$

而 
$$tu(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

所以 
$$\mathcal{L}[tu(t)] = 1/s^2$$

重复应用这个性质，可得 
$$\mathcal{L}[t^n u(t)] = n! / s^{n+1}$$

利用时域微分性质及时域积分性质，可将  $f(t)$  的微分方程化为代数方程。而且自动引入起始条件，在系统分析中十分有用。下面举一个简单的例子，初步说明如何用拉氏变换的方法求解系统的响应。



**例 3.8-4** 如图 3.8-1 所示电路, 在  $t=0$  时开关 S 闭合, 求输出信号  $v_C(t)$ 。

**解:** (1) 列写微分方程

$$Ri(t) + v_C(t) = Eu(t), \quad v_C(t)|_{t=0^-} = 0$$

将此式改写为只含有一个未知函数  $v_C(t)$  的形式

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = Eu(t)$$

(2) 将上式中各项取拉氏变换 (利用时域微分性质) 得

$$RCsV_C(s) + V_C(s) = E/s$$

解此代数方程, 求得

$$V_C(s) = \frac{E}{s(1+RCs)} = \frac{E}{RCs \left( s + \frac{1}{RC} \right)}$$

(3) 求  $V_C(s)$  的逆变换。将  $V_C(s)$  表达式分解为以下形式

$$V_C(s) = E \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right)$$

则

$$v_C(t) = \mathcal{L}^{-1}[V_C(s)] = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad t \geq 0$$

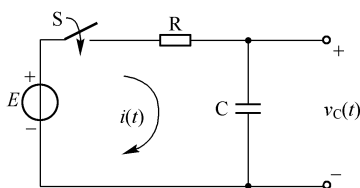


图 3.8-1 例 3.8-4 的电路

### 3. 位移性

(1) 时域位移 (延时 time delay)

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 则

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-st_0}F(s) \quad (3.8-8)$$

式中,  $t_0 > 0$ 。

$$\text{证明: } \mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = \int_0^\infty [f(t-t_0)u(t-t_0)] e^{-st} dt = \int_{t_0}^\infty f(t-t_0) e^{-st} dt$$

令  $\tau = t - t_0$ , 则有  $t = \tau + t_0$ , 代入上式得

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = \int_0^\infty f(\tau) e^{-st_0} e^{-s\tau} d\tau = e^{-st_0} F(s)$$

此性质表明: 若波形延时  $t_0$ , 则它的拉氏变换应乘以  $e^{-st_0}$ 。例如, 延时  $t_0$  的单位阶跃函数  $u(t-t_0)$ , 其变换式为  $e^{-st_0}/s$ 。

在应用延时特性时, 特别要注意它只适用于  $t_0 > 0$  的情况。因为当  $t_0 < 0$  时, 信号左移至原点以左部分, 不能包含在从  $0^-$  到  $\infty$  的积分中去。

**例 3.8-5** 已知  $f(t) = \sin \Omega_0 t$  的拉氏变换为  $F(s) = \frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$ , 试求下列信号的拉氏变换(式中  $t_0 > 0$ )。

$$(1) f(t-t_0) = \sin \Omega_0(t-t_0);$$

$$(2) f(t-t_0)u(t) = \sin \Omega_0(t-t_0) \cdot u(t);$$

$$(3) f(t)u(t-t_0) = \sin \Omega_0 t \cdot u(t-t_0);$$

$$(4) f(t-t_0)u(t-t_0) = \sin \Omega_0(t-t_0) \cdot u(t-t_0)。$$

**解:** 四种信号如图 3.8-2 所示。对于 (1) 和 (2) 两种信号在  $t \geq 0$  时的波形相同, 所以它们的拉氏变换也相同, 即

$$\mathcal{L}[\sin \Omega_0(t-t_0)] = \mathcal{L}[\sin \Omega_0 t \cos \Omega_0 t_0 - \cos \Omega_0 t \sin \Omega_0 t_0] = \frac{\Omega_0 \cos \Omega_0 t_0 - s \sin \Omega_0 t_0}{s^2 + \Omega_0^2}$$

对于信号 (3)，它的拉氏变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin \Omega_0 t \cdot u(t-t_0)] &= \int_{t_0}^{\infty} \sin \Omega_0 t e^{-st} dt = \frac{1}{2j} \int_{t_0}^{\infty} [e^{-(s-j\Omega_0)t} - e^{-(s+j\Omega_0)t}] dt \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{-(s-j\Omega_0)t_0}}{s-j\Omega_0} - \frac{e^{-(s+j\Omega_0)t_0}}{s+j\Omega_0} \right] = e^{-st_0} \left[ \frac{\Omega_0 \cos \Omega_0 t_0 + s \sin \Omega_0 t_0}{s^2 + \Omega_0^2} \right]\end{aligned}$$

对于信号 (4)，它的拉氏变换为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\sin \Omega_0(t-t_0) \cdot u(t-t_0)] &= \frac{1}{2j} \int_{t_0}^{\infty} [e^{j\Omega_0(t-t_0)} - e^{-j\Omega_0(t-t_0)}] e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{-j\Omega_0 t_0} e^{-(s-j\Omega_0)t_0}}{s-j\Omega_0} - \frac{e^{j\Omega_0 t_0} e^{-(s+j\Omega_0)t_0}}{s+j\Omega_0} \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[ \frac{e^{-st_0}}{s-j\Omega_0} - \frac{e^{-st_0}}{s+j\Omega_0} \right] = e^{-st_0} \left[ \frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2} \right]\end{aligned}$$

可见，在以上四种信号中，只有信号 (4)，即  $f(t-t_0)u(t-t_0) = \sin \Omega_0(t-t_0) \cdot u(t-t_0)$  是信号  $f(t)u(t) = \sin \Omega_0 t \cdot u(t)$  右移了  $t_0$  的结果，才能应用时移性。即

$$\mathcal{L}[\sin \Omega_0(t-t_0) \cdot u(t-t_0)] = e^{-st_0} \mathcal{L}[\sin \Omega_0 t] = e^{-st_0} \frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$$

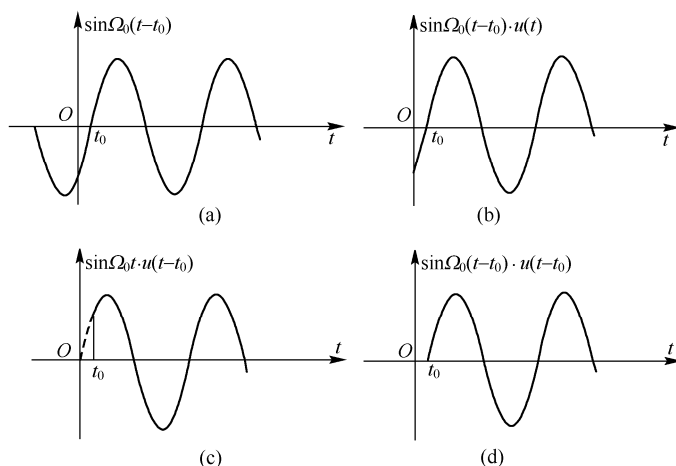


图 3.8-2 例 3.8-5 中的四种信号波形

**例 3.8-6** 求图 3.8-3 所示矩形脉冲信号的拉氏变换。

**解：**因为

$$f(t) = Eu(t) - Eu(t-t_0)$$

$$\mathcal{L}[Eu(t)] = \frac{E}{s}$$

由延时特性

$$\mathcal{L}[Eu(t-t_0)] = e^{-st_0} \frac{E}{s}$$

所以

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[Eu(t) - Eu(t-t_0)] = \frac{E}{s}(1 - e^{-st_0})$$

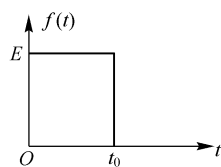


图 3.8-3 矩形脉冲信号

(2)  $s$  域位移 (shifting in  $s$ -domain)

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 则  $\mathcal{L}[f(t)e^{-\alpha t}] = F(s + \alpha)$  (3.8-9)

证明:  $\mathcal{L}[f(t)e^{-\alpha t}] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+\alpha)t} dt = F(s + \alpha)$

此性质表明, 时间函数  $f(t)$  乘以  $e^{-\alpha t}$ , 相当于变换式在  $s$  域内平移  $\alpha$ 。

例 3.8-7 求  $e^{-\alpha t} \sin \Omega t$  和  $e^{-\alpha t} \cos \Omega t$  的拉氏变换。

解: 已知  $\mathcal{L}[\sin \Omega t] = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$

由  $s$  域位移特性, 得  $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \sin \Omega t] = \frac{\Omega}{(s + \alpha)^2 + \Omega^2}$

同理, 因为  $\mathcal{L}[\cos \Omega t] = \frac{s}{s^2 + \Omega^2}$

故有  $\mathcal{L}[e^{-\alpha t} \cos \Omega t] = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \Omega^2}$

#### 4. 尺度变换 (scaling)

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 则  $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$   $a > 0$  (3.8-10)

证明:  $\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} f(at)e^{-st} dt$

令  $\tau = at$ , 则上式变成  $\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau} d\left(\frac{\tau}{a}\right) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{s}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

式中, 规定常数  $a > 0$  是必要的, 因为  $f(t)$  为因果信号。若  $a < 0$ , 则  $f(at)$  的单边拉氏变换为零, 而不能应用式(3.8-10)。

例 3.8-8 已知  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 求  $\mathcal{L}[f(2t-3)u(2t-3)]$ 。

解: 此问题既要用到尺度变换特性, 也要引用延时特性。

解法一: 先由延时特性求得

$$\mathcal{L}[f(t-3)u(t-3)] = F(s)e^{-3s}$$

再借助尺度变换特性即可求出所需结果

$$\mathcal{L}[f(2t-3)u(2t-3)] = \frac{1}{2} F\left(\frac{s}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}s}$$

解法二: 先由尺度变换特性得到

$$\mathcal{L}[f(2t)u(2t)] = \frac{1}{2} F\left(\frac{s}{2}\right)$$

再借助延时特性求出

$$\mathcal{L}\left\{f\left[2\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]u\left[2\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]\right\} = \frac{1}{2} F\left(\frac{s}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}s}$$

也即

$$\mathcal{L}[f(2t-3)u(2t-3)] = \frac{1}{2} F\left(\frac{s}{2}\right)e^{-\frac{3}{2}s}$$

## 5. s 域微分与积分

### (1) s 域微分 (differentiation in s-domain)

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 则 
$$\mathcal{L}[(-t)f(t)] = \frac{dF(s)}{ds} \quad (3.8-11)$$

证明: 
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

上式两边对  $s$  求导数, 得 
$$\frac{dF(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \right]$$

交换微分与积分的次序, 得

$$\frac{dF(s)}{ds} = \int_0^{\infty} f(t) \frac{d}{ds} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} (-t)f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}[(-t)f(t)]$$

故得 
$$\mathcal{L}[(-t)f(t)] = \frac{dF(s)}{ds}$$

重复运用上述结果, 可得 
$$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)] = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$$

### (2) s 域积分 (integration in s-domain)

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 则 
$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(\eta) d\eta \quad (3.8-12)$$

证明: 
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

上式两边求积分 
$$\begin{aligned} \int_s^{\infty} F(\eta) d\eta &= \int_s^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} f(t)e^{-\eta t} dt \right] d\eta = \int_0^{\infty} f(t) \left[ \int_s^{\infty} e^{-\eta t} d\eta \right] dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} e^{-st} dt = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] \end{aligned}$$

故得 
$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(\eta) d\eta$$

## 6. 初值与终值定理

### (1) 初值定理 (initial-value theorem)

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 且  $f(t)$  连续可导, 则

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (3.8-13)$$

证明: 由时域微分特性可知

$$\begin{aligned} sF(s) - f(0^-) &= \mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \int_{0^-}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \int_{0^-}^{0^+} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= f(0^+) - f(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \end{aligned}$$

所以 
$$sF(s) = f(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \quad (3.8-14)$$

当  $s \rightarrow \infty$  时, 上式右端第二项的极限为

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt \right\} = \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} [\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-st}] dt = 0$$

因此, 对式(3.8-14)取  $s \rightarrow \infty$  的极限, 有

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+)$$

式(3.8-13)得到了证明。

关于初值定理, 要特别注意所求得初值是  $f(t)$  在  $t = 0^+$  时刻的值, 而不是  $f(t)$  在  $t = 0$  或者  $t = 0^-$  时刻的值。

另外, 利用式(3.8-13)求函数  $f(t)$  的初值时, 应注意它的应用条件。如果  $F(s)$  是有理代数式, 则  $F(s)$  必须是真分式, 即  $F(s)$  分子的阶次应低于分母的阶次。如果  $F(s)$  不是真分式, 则应利用长除法, 使  $F(s)$  中出现真分式项  $F_0(s)$ , 而初值  $f(0^+)$  等于真分式  $F_0(s)$  之逆变换式  $f_0(t)$  的初值  $f_0(0^+)$ , 即

$$f(0^+) = f_0(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF_0(s) \quad (3.8-15)$$

下面来证明式(3.8-15)的正确性。

$$\text{设对 } F(s) \text{ 进行长除后有} \quad F(s) = K_m s^m + K_{m-1} s^{m-1} + \cdots + K_0 + F_0(s) \quad (3.8-16)$$

式中,  $F_0(s)$  为真分式。对式(3.8-16)取逆变换

$$f(t) = K_m \delta^{(m)}(t) + K_{m-1} \delta^{(m-1)}(t) + \cdots + K_0 \delta(t) + f_0(t)$$

其中冲激函数及其各阶导数在  $t = 0^+$  时刻全为零, 于是  $f(0^+) = f_0(0^+)$ 。

(2) 终值定理 (expiration-value theorem)

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 且  $f(t)$  连续可导, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (3.8-17)$$

证明: 利用式(3.8-14), 取  $s \rightarrow 0$  之极限, 有

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = f(0^+) + \lim_{s \rightarrow 0} \int_{0^+}^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = f(0^+) + \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^+)$$

于是得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

应用终值定理也应注意它的应用条件。即只有在  $f(t)$  的终值存在的情况下, 才能利用式(3.8-17)求  $f(t)$  的终值。 $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  是否存在, 可从  $s$  域做出判断, 仅当  $F(s)$  在右半  $s$  平面及其  $s$  平面的虚轴上为解析时 (原点除外), 终值定理才可应用。在第 5 章中介绍了“极点”与时域波形的对应关系之后, 上述判断可叙述为:  $F(s)$  的极点应全部在左半  $s$  平面和 (或) 在  $s = 0$  处只有一阶极点, 才能应用终值定理。若  $F(s)$  的极点不满足该条件, 则终值  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  不存在。例如,  $\mathcal{L}[\sin \Omega t] = \frac{\Omega}{s^2 + \Omega^2}$ , 变换式分母的根 (极点) 在虚轴上  $\pm j\Omega$  处, 不能应用此定理, 实际上  $\sin \Omega t$  振荡不止, 当  $t \rightarrow \infty$  时极限不存在。又如,  $\mathcal{L}[e^{\alpha t}] = \frac{1}{s - \alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , 分母多

项式的根（极点）在右半  $s$  平面实轴  $\alpha$  点上，也不能用此定理。

**例 3.8-9** 求下列函数逆变换的初值与终值。

$$(1) F(s) = \frac{s^3 + s^2 + 2s + 1}{s^2 + 2s + 1} \quad (2) F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)(s^2 + 4)}$$

**解：**(1)  $F(s)$  不是真分式，利用长除法求得

$$F(s) = s - 1 + \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1}$$

于是初值

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{3s + 2}{s^2 + 2s + 1} = 3$$

如果不用长除法，而直接用  $f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ ，则将得到  $f(0^+) = \infty$  的错误结论。

终值

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = 0$$

(2) 初值为

$$f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1)(s^2 + 4)} = 1$$

由于  $F(s)$  在  $j\Omega$  轴上有一对共轭极点  $s = \pm j2$ ，因此  $f(t)$  不存在终值。

若不注意终值定理的条件，而直接用  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ ，则将得到  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  的错误结论。

## 7. 卷积定理

(1) 时域卷积 (convolution in time domain)

若  $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ ， $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ ，则

$$\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s) \quad (3.8-18)$$

**证明：**单边拉氏变换中所讨论的时间信号都是因果信号，即当  $t < 0$  时有  $f_1(t) = 0$ ， $f_2(t) = 0$ 。为了更加明确，它们也可写为  $f_1(t)u(t)$  和  $f_2(t)u(t)$ 。

函数  $f_1(t)$  与  $f_2(t)$  的卷积可写为

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)u(\tau)f_2(t-\tau)u(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)u(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

对上式取拉氏变换，得  $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)u(t-\tau)d\tau \right] e^{-st} dt$

交换上式的积分次序，并令  $x = t - \tau$ ，得

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_0^{\infty} f_2(t-\tau)u(t-\tau)e^{-st} dt \right] d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) \left[ \int_{-\tau}^{\infty} f_2(x)u(x)e^{-s(x+\tau)} dx \right] d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) \left[ e^{-s\tau} \int_0^{\infty} f_2(x)e^{-sx} dx \right] d\tau \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau)e^{-s\tau} d\tau \cdot F_2(s) \\ &= F_1(s)F_2(s) \end{aligned}$$

## (2) $s$ 域卷积 (convolution in $s$ -domain)

用类似的方法可以证明如下  $s$  域卷积定理。

若  $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ ,  $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$ , 则

$$\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(z)F_2(s-z)dz \quad (3.8-19)$$

下面举例说明时域卷积定理的应用。

**例 3.8-10** 已知  $f_1(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ ,  $f_2(t) = u(t)$ , 求  $f_1(t) * f_2(t)$ 。

**解:** 利用时域卷积定理可以间接地求出两函数的卷积。

因为 
$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] = \frac{1}{s + \alpha}, \quad F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)] = \frac{1}{s}$$

而

$$F_1(s)F_2(s) = \frac{1}{s + \alpha} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \alpha} \right]$$

则

$$f_1(t) * f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})u(t)$$

显然, 拉氏变换方法把时域中的卷积转换为变换域中的乘积。

在表 3.8-1 中给出了拉氏变换的基本性质。

表 3.8-1 拉氏变换的基本性质

| 序号 | 名 称     | 结 论                                                                                                                                                                 | 序号 | 名 称     | 结 论                                                                                                    |
|----|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1  | 线性      | $\mathcal{L}[K_1 f_1(t) + K_2 f_2(t)] = K_1 F_1(s) + K_2 F_2(s)$                                                                                                    | 7  | $s$ 域微分 | $\mathcal{L}[(-t)f(t)] = \frac{dF(s)}{ds}$<br>$\mathcal{L}[(-t)^n f(t)] = \frac{d^n F(s)}{ds^n}$       |
| 2  | 时域微分    | $\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$<br>$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1} f^{(r)}(0^-)$ | 8  | $s$ 域积分 | $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(\eta) d\eta$                                 |
| 3  | 时域积分    | $\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s}$                                                                 | 9  | 初值      | $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$                                    |
| 4  | 延时      | $\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-st_0} F(s) \quad (t_0 > 0)$                                                                                                    | 10 | 终值      | $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$                                      |
| 5  | $s$ 域位移 | $\mathcal{L}[f(t)e^{-\alpha t}] = F(s + \alpha)$                                                                                                                    | 11 | 时域卷积    | $\mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s)F_2(s)$                                                          |
| 6  | 尺度变换    | $\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$                                                                                          | 12 | $s$ 域卷积 | $\mathcal{L}[f_1(t)f_2(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F_1(z)F_2(s-z)dz$ |

注:  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ,  $\mathcal{L}[f_1(t)] = F_1(s)$ ,  $\mathcal{L}[f_2(t)] = F_2(s)$

## 3.9 拉普拉斯逆变换

在例 3.8-4 中, 我们已经知道如何用拉普拉斯变换的方法分析电路问题。一般来讲, 它包括三个步骤: 首先对微分方程进行拉氏变换成为代数方程, 然后解此代数方程得到所求未知函数的变换式  $F(s)$ , 最后需求  $F(s)$  的逆变换。

如果  $F(s)$  是一个比较简单的函数, 就可利用常用函数的拉氏变换表 (见表 3.7-1), 查出对应的原函数。然而, 在电路分析中经常遇到的  $F(s)$  并非那样简单, 不能直接从表中找到。

因此, 必须研究求逆变换的一般方法。

求取复杂变换式的逆变换通常有两种方法, 即部分分式展开法 (partial fraction expansion) 和留数法 (residue method)。前者是将复杂变换式分解为许多简单变换式之和, 然后分别查表求取原时间信号; 后者则是直接进行拉氏逆变换积分。前者适用于  $F(s)$  为有理函数的情况, 后者适用范围较广。下面分别进行讨论。

### 3.9.1 部分分式展开法

由 3.8 节已知, 时域微分信号的拉氏变换会出现  $s$ 。因此, 线性常系数微分方程经拉氏变换会变换成两个  $s$  的多项式之比, 它们称为  $s$  的有理函数。一般具有如下形式

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \quad (3.9-1)$$

式中, 系数  $a_i$  和  $b_i$  都为实数,  $m$  和  $n$  是正整数。

用部分分式展开法求逆变换时, 要求  $F(s)$  为有理真分式。当  $F(s)$  不是真分式时, 可以用长除法把  $F(s)$  分解为有理多项式与真分式之和。

例如 
$$F(s) = \frac{3s^3 - 2s^2 - 7s + 1}{s^2 + s - 1} = 3s - 5 + \frac{s - 4}{s^2 + s - 1}$$

根据线性特性,  $F(s)$  的原函数, 由  $3s - 5$  和  $\frac{s - 4}{s^2 + s - 1}$  两部分的原函数之和组成。其中

$\mathcal{L}^{-1}[3s] = 3\delta'(t)$ ,  $\mathcal{L}^{-1}[-5] = -5\delta(t)$ 。所以, 这时求  $F(s)$  的逆变换, 仍归结为求有理真分式的逆变换。下面讨论这种情况求逆变换问题。设式(3.9-1)中的  $F(s) = A(s)/B(s)$  为有理真分式。

为便于分解, 将  $F(s)$  的分母  $B(s)$  写成以下形式

$$B(s) = b_n(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) \quad (3.9-2)$$

式中,  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  为  $B(s) = 0$  方程式的根, 即当  $s$  等于任一根值时,  $B(s)$  等于零,  $F(s)$  等于无限大。 $p_1, p_2, \cdots, p_n$  也称为  $F(s)$  的“极点”。

同理,  $A(s)$  也可改写为 
$$A(s) = a_m(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m) \quad (3.9-3)$$

式中,  $z_1, z_2, \cdots, z_m$  称为  $F(s)$  的“零点”, 它们是  $A(s) = 0$  方程式的根。

按照极点之不同特点, 部分分式展开法有以下三种情况:

#### 1. 极点为实数, 无重根

假定  $F(s)$  的极点  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  均为实数, 且无重根, 则  $F(s)$  可展开为如下的部分分式

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{b_n(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \\ &= \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_i}{s - p_i} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} \end{aligned} \quad (3.9-4)$$

式中,  $K_1, K_2, \cdots, K_i, \cdots, K_n$  为  $n$  个待定系数。



其中

$$K_i = (s - p_i)F(s)\Big|_{s=p_i} \quad (3.9-5)$$

例 3.9-1 求  $F(s) = \frac{10(s+2)(s+5)}{s(s+1)(s+3)}$  的拉氏逆变换。

解：将  $F(s)$  展开成部分分式形式

$$F(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+3}$$

可得

$$K_1 = sF(s)\Big|_{s=0} = \frac{10 \times 2 \times 5}{1 \times 3} = \frac{100}{3}$$

$$K_2 = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{10 \times (-1+2) \times (-1+5)}{(-1) \times (-1+3)} = -20$$

$$K_3 = (s+3)F(s)\Big|_{s=-3} = \frac{10 \times (-3+2) \times (-3+5)}{(-3) \times (-3+1)} = -\frac{10}{3}$$

$$F(s) = \frac{100}{3s} - \frac{20}{s+1} - \frac{10}{3(s+3)}$$

$$f(t) = \frac{100}{3} - 20e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-3t} \quad t \geq 0$$

## 2. 包含共轭复数极点

若

$$\begin{aligned} B(s) &= b_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-2})(s^2+bs+c) \\ &= B_1(s)(s^2+bs+c) \end{aligned}$$

式中,  $b^2 - 4c < 0$ , 以及  $B_1(s) = b_n(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_{n-2})$ ,  $p_1, p_2, \cdots, p_{n-2}$  是  $B(s) = 0$  的不相等的实根。因为  $F(s)$  可写为

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{As+B}{s^2+bs+c} + \frac{A_1(s)}{B_1(s)} \quad (3.9-6)$$

上式等号右边第二项展开为部分分式的方法已如前所述, 对于右边第一项, 一旦  $\frac{A_1(s)}{B_1(s)}$  求出,

就可利用对应项系数相等的方法 (即待定系数法) 求得  $A$  和  $B$ , 而  $\frac{As+B}{s^2+bs+c}$  的逆变换则可用配方法来求。现举例说明如下。

例 3.9-2 求  $F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+4)}$  的拉氏逆变换。

解：根据式(3.9-6),  $F(s)$  可展开成如下形式

$$F(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+4}$$

其中

$$A = (s+1)F(s)\Big|_{s=-1} = \frac{s+3}{s^2+2s+4}\Big|_{s=-1} = \frac{2}{3}$$

于是

$$F(s) = \frac{2/3}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+4}$$

再利用待定系数法确定  $B$  和  $C$ ，即

$$\frac{s+3}{(s+1)(s^2+2s+4)} = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+2s+4} = \frac{\frac{2}{3}(s^2+2s+4) + (Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2+2s+4)}$$

由方程两端分子的对对应项相等，即

$$\frac{2}{3}(s^2+2s+4) + (Bs+C)(s+1) = s+3$$

求得  $B = -2/3, C = 1/3$ ，所以 
$$F(s) = \frac{\frac{2}{3}}{s+1} + \frac{-\frac{2}{3}s + \frac{1}{3}}{s^2+2s+4}$$

应用配方法，得

$$F(s) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{s+1} - \frac{\frac{2}{3}(s+1)}{(s+1)^2 + (\sqrt{3})^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{3}}{(s+1)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

查表 3.7-1 即得 
$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{-t}\cos\sqrt{3}t + \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t}\sin\sqrt{3}t \quad t \geq 0$$

### 3. 包含多重极点

考虑下示函数的分解 
$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s-p_1)^k D(s)}$$

式中，在  $s = p_1$  处，分母多项式  $B(s)$  有  $k$  重根，也即  $k$  阶极点。将  $F(s)$  写成展开式

$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s-p_1)^k} + \frac{K_{12}}{(s-p_1)^{k-1}} + \dots + \frac{K_{1k}}{(s-p_1)} + \frac{E(s)}{D(s)} \quad (3.9-7)$$

这里， $E(s)/D(s)$  表示展开式中与极点  $p_1$  无关的其余部分。式中， $K_{11}, K_{12}, \dots, K_{1k}$  为  $k$  个待定系数。为了求出各待定系数，设  $F_1(s) = (s-p_1)^k F(s)$ ，则

$$K_{11} = F_1(s) \Big|_{s=p_1} \quad (3.9-8)$$

$$K_{12} = \frac{d}{ds} F_1(s) \Big|_{s=p_1} \quad (3.9-9)$$

$$K_{13} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} F_1(s) \Big|_{s=p_1} \quad (3.9-10)$$

一般形式为 
$$K_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} \frac{d^{i-1}}{ds^{i-1}} F_1(s) \Big|_{s=p_1} \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.9-11)$$

**例 3.9-3** 求  $F(s) = \frac{s-2}{s(s+1)^3}$  的拉氏逆变换。

解:  $F(s)$  展开式为 
$$F(s) = \frac{K_{11}}{(s+1)^3} + \frac{K_{12}}{(s+1)^2} + \frac{K_{13}}{(s+1)} + \frac{K_2}{s}$$

容易求得  $K_2 = sF(s)|_{s=0} = -2$ 。

为求出  $K_{11}, K_{12}, K_{13}$ , 令 
$$F_1(s) = (s+1)^3 F(s) = \frac{s-2}{s}$$

引用式(3.9-8)、式(3.9-9)和式(3.9-10)得到

$$K_{11} = \left. \frac{s-2}{s} \right|_{s=-1} = 3, \quad K_{12} = \left. \frac{d}{ds} \left( \frac{s-2}{s} \right) \right|_{s=-1} = 2, \quad K_{13} = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left( \frac{s-2}{s} \right) \Big|_{s=-1} = 2$$

于是有 
$$F(s) = \frac{3}{(s+1)^3} + \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{2}{(s+1)} - \frac{2}{s}$$

逆变换为 
$$f(t) = \frac{3}{2} t^2 e^{-t} + 2te^{-t} + 2e^{-t} - 2 \quad t \geq 0$$

### 3.9.2 留数法

留数法就是直接计算式(3.7-8)的积分, 现将该式重写如下

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad t \geq 0$$

这是复变函数积分问题, 积分限为  $\sigma - j\infty$  到  $\sigma + j\infty$ 。直接计算这个积分是比较困难的。为此我们可以从  $\sigma - j\infty$  到  $\sigma + j\infty$  补足一条积分路径, 构成一闭合围线积分, 如图 3.9-1 所示。补足的这条路径  $C_R$  是半径为  $\infty$  的圆弧, 沿该圆弧的积分应为零。这一条件由约当引理保证, 即满足  $\int_{C_R} F(s) e^{st} ds = 0$ 。这样上面的积分就可由留数定理求出, 它等于围线中被积函数  $F(s) e^{st}$  所有极点的留数和 (这里  $F(s)$  为真分式), 即

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{\text{极点}} [F(s) e^{st} \text{ 的留数}]$$

设在极点  $s = p_i$  处的留数为  $\text{Res}[F(s) e^{st}]_{s=p_i}$ , 并设  $F(s) e^{st}$  在围线中共有  $n$  个极点, 则

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^n \text{Res}[F(s) e^{st}]_{s=p_i} \quad (3.9-12)$$

若  $p_i$  为一阶极点, 则 
$$\text{Res}[F(s) e^{st}]_{s=p_i} = [(s - p_i) F(s) e^{st}] \Big|_{s=p_i} \quad (3.9-13)$$

若  $p_i$  为  $k$  阶极点, 则 
$$\text{Res}[F(s) e^{st}]_{s=p_i} = \frac{1}{(k-1)!} \left[ \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} (s - p_i)^k F(s) e^{st} \right] \Big|_{s=p_i} \quad (3.9-14)$$

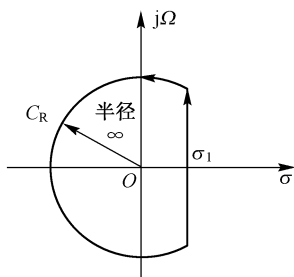


图 3.9-1 闭合围线积分

将以上结果与部分分式展开法相比较, 不难看出, 两种方法所得结果是一样的。具体来说, 对一阶极点而言, 部分分式的系数与留数的差别仅在于因子  $e^{st}$  的有无, 经逆变换后的部分分式就与留数相同了。对高阶极点而言, 由于留数公式中含有因子  $e^{st}$ , 在取其导数时, 所得表达式不止一项, 遂与部分分式展开法结果相同。

### 3.10 连续信号的频域与复频域的 MATLAB 分析

连续信号的频域和复频域表达式可以通过符号运算获得。其频谱的可视化可以用幅度谱和相位谱绘制。周期信号可以通过计算其傅里叶级数，画出它的幅度谱和相位谱；非周期性信号可以通过计算其傅里叶变换，画出它的幅度谱和相位谱。信号的复频域分析一般缺少可视化的直观表示，但可以用信号的拉普拉斯变换，绘制它的三维幅度曲面图和相位曲面图，来观察其复频域特征。

**例 3.10-1** 周期性矩形脉冲信号如图 3.10-1 所示，画出它的幅度谱和相位谱，以及前 5 次谐波叠加波形和前 10 次谐波叠加波形。

**解：**周期矩形脉冲信号的脉宽  $\tau = 1$ ，周期  $T_1 = 5$ ，基波角频率  $\Omega_1 = 0.4\pi$ ，它的傅里叶级数为

$$f(t) = 0.2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(0.2n\pi) e^{j0.4n\pi t}$$

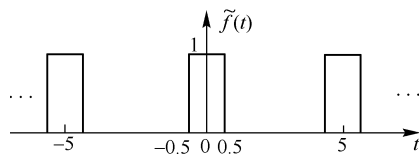


图 3.10-1 周期矩形脉冲信号的波形

其幅度谱和相位谱是离散的，其程序 exec301 的清单如下，绘制的频谱和波形如图 3.10-2 所示。

```
n=-10:10; w1=0.4*pi; %显示的谐波次数
n1=-10:-1;ft1=sin(0.2*pi*n1)./(pi*n1); %计算负半轴的傅里叶级数
n2=1:10;ft2=sin(0.2*pi*n2)./(pi*n2); %计算正半轴的傅里叶级数
ft=[ft1,0.2,ft2]; %组合负半轴、零点和正半轴的级数
fn = abs(ft);phase = angle(ft); %计算幅度谱和相位谱
subplot(2,2,1);stem(n,fn);title('幅度谱'); %stem 函数绘制离散序列
subplot(2,2,2);stem(n,phase);title('相位谱');
syms t;s1=0.2;s2=0.2; %直流分量
for k1=1:5
    s1=s1+2*sin(k1*pi/5)*cos(w1*t*k1)/pi./k1;
end
for k2=1:10
    s2=s2+2*sin(k2*pi/5)*cos(w1*t*k2)/pi./k2;
end
subplot(2,2,3);ezplot(s1);title('前 5 次谐波叠加');
subplot(2,2,4);ezplot(s2);title('前 10 次谐波叠加');
```

**例 3.10-2** 用 MATLAB 分别绘制抽样信号  $f_1(t) = \text{Sa}(t)$  和矩形脉冲信号  $f_2(t) = \pi[u(t+1) - u(t-1)]$  的时域波形和频谱，并验证傅里叶变换的对偶性。

**解：**对偶性是傅里叶变换性质中比较重要的一个性质，其程序 exec302.m 如下，绘制的频谱和波形如图 3.10-3 所示。

```
syms t;f1 = sin(t)/t; %抽样函数 f1(t)=Sa(t)
f2 = pi*sym('(Heaviside(t+1)-Heaviside(t-1))'); %计算门函数 f2(t)=piG(t)
F1=simple(fourier(f1));F2=simple(fourier(f2)); subplot(2,2,1);ezplot(f1,[-10 10]);
subplot(2,2,2);ezplot(F1,[-2 2]);title('pi[u(Omega+1)-u(Omega-1)]');xlabel('\Omega');
subplot(2,2,3);ezplot(f2,[-2 2]);title('pi[u(t+1)-u(t-1)]');
subplot(2,2,4);ezplot(F2,[-10 10]);title('2piSa(Omega)');xlabel('\Omega');
```

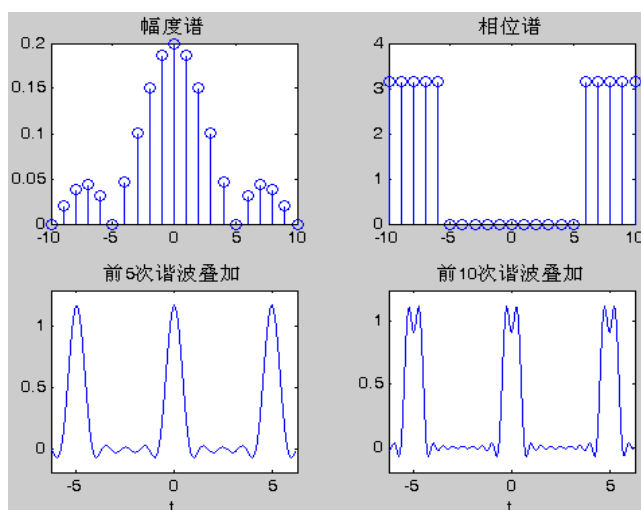


图 3.10-2 周期矩形脉冲信号的频谱和谐波叠加

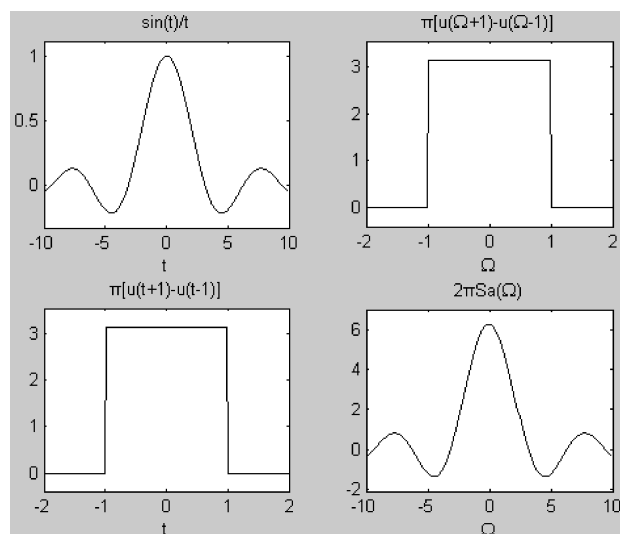


图 3.10-3 傅里叶变换的对偶性

**例 3.10-3** 计算：(1)  $f_1(t) = e^{-t} \sin 2t \cdot u(t)$  的傅里叶变换；(2)  $F_2(j\Omega) = 2\text{Sa}(2\Omega)$  的傅里叶逆变换；(3)  $f_3(t) = e^{-2t} \cos 3t$  的拉普拉斯变换；(4)  $F_4(s) = \frac{s+2}{s(s^2+9)}$  的拉普拉斯逆变换。

**解：**用符号表达式计算上述变换值，得到的结果也是相应的表达式，其程序 `exec303.m` 如下，在 MATLAB 命令窗口执行后，变换后的表达式会显示在命令窗口中。

```
syms t w s; f1=exp(-t)*sin(2*t)*sym('Heaviside(t)');
F1=simple(fourier(f1)) %simple 符号表达式化简, fourier 傅里叶变换
F2=sin(2*w)/w; f2=simple(ifourier(F2)) %ifourier 傅里叶逆变换
f3=exp(-2*t)*cos(3*t); L3=laplace(f3) %laplace 拉普拉斯变换
L4=(s+2)/(s^3+9*s); f4=ilaplace(L4) %ilaplace 拉普拉斯逆变换
```

**例 3.10-4** 用 MATLAB 绘制矩形脉冲  $f(t) = u(t) - u(t-2)$  的拉普拉斯变换的幅度曲面

图，以及该信号的傅里叶变换的幅度谱曲线。

**解：**为了观察和分析信号的拉普拉斯变换  $F(s)$  随复变量  $s$  的变化关系，可以将  $F(s)$  写成模和辐角的形式，即  $|F(s)|e^{j\varphi(s)}$ 。从三维几何空间的角度可见，模和辐角是复变量  $s$  的复函数，对应着  $s$  平面的两个曲面。 $|F(s)|$  随复变量  $s$  变化的曲面图称为幅度曲面图， $\varphi(s)$  随复变量  $s$  变化的曲面图称为相位曲面图。

根据拉普拉斯变换和傅里叶变换的定义和性质，上述信号的拉普拉斯变换和傅里叶变换为

$$F(s) = (1 - e^{-2s})/s, \quad F(j\Omega) = 2\text{Sa}(\Omega)e^{-j\Omega}$$

其程序 `exec304.m` 如下，绘制的频谱和幅度曲面图如图 3.10-4 所示。

```
%绘制矩形时间信号傅里叶变换曲线
w=-10:0.03:10;Fw=(2*sin(w).*exp(-i*w))./w;           %确定频率范围,计算傅里叶变换
subplot(121);plot(w,abs(Fw));xlabel('频率\Omega');       %绘制信号幅度频谱曲线
title('傅里叶变换(幅度频谱曲线)');
%绘制单边矩形脉冲信号拉普拉斯变换幅度曲面图
x=-0:0.07:5;y=-10:0.07:10;                             %定义绘制曲面图的横坐标和纵坐标范围
[x,y]=meshgrid(x,y);                                     %产生等间隔取样点
z=x+i*y;                                                  %确定绘图区域
z=abs((1-exp(-2*z))./z);                                  %求拉普拉斯变换的幅度
subplot(122);mesh(x,y,z);                                %绘制曲面图
surf(x,y,z);                                              %绘制三维阴影曲面
axis([-0.5,-10,10,0,2]);title('拉普拉斯变换幅度曲面图');
```

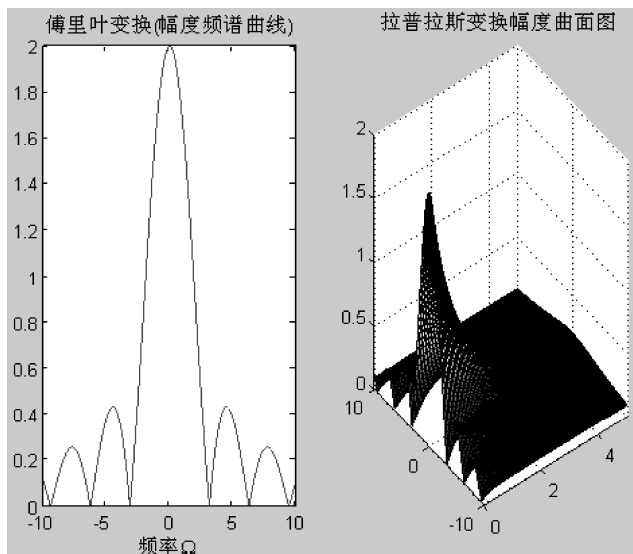


图 3.10-4 矩形脉冲的幅度谱和幅度曲面图

## 习 题

3-1 已知周期矩形脉冲信号的重复频率  $f_1 = 5 \text{ kHz}$ ，脉宽  $\tau = 20 \mu\text{s}$ ，幅度  $E = 10\text{V}$ ，如图题 3-1 所示。画出该信号的频谱图。并问用可变中心频率的选频回路能否从该周期矩形脉冲信号中选取 5，12，20，50，

80 及 100 kHz 频率分量来?

3-2 求图题 3-2 所示周期三角信号的三角形式的傅里叶级数, 并画出幅度谱。

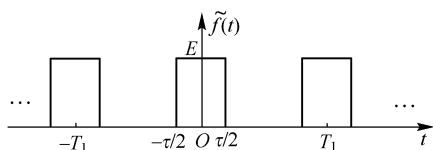


图 题 3-1

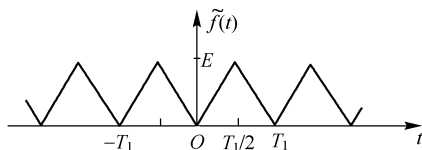


图 题 3-2

3-3 求图题 3-3 所示周期锯齿信号指数形式的傅里叶级数, 并大致画出频谱图。

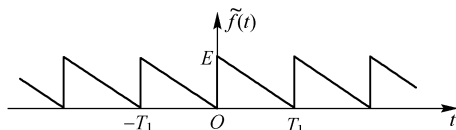
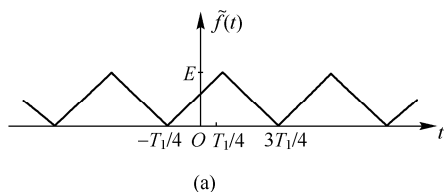
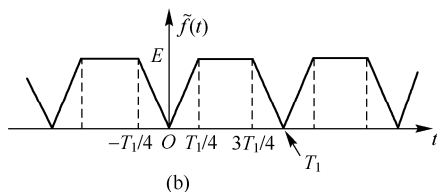


图 题 3-3

\*\*3-4 求图题 3-4 中两种周期信号的傅里叶级数。



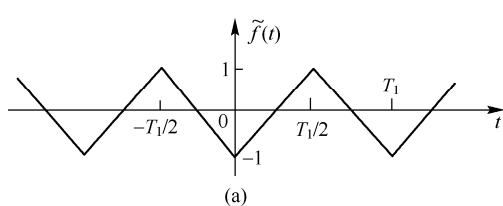
(a)



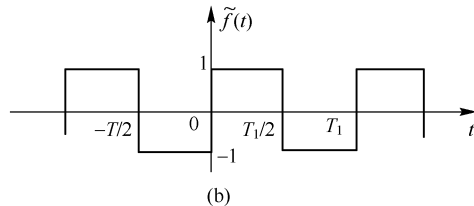
(b)

图 题 3-4

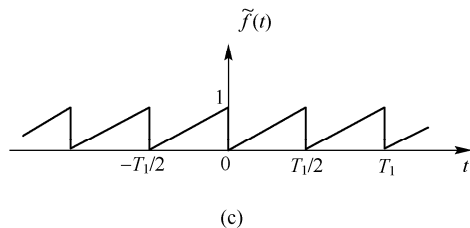
3-5 利用信号  $\tilde{f}(t)$  的对称性, 定性判断图题 3-5 中各周期信号的傅里叶级数中所含有的频率分量。



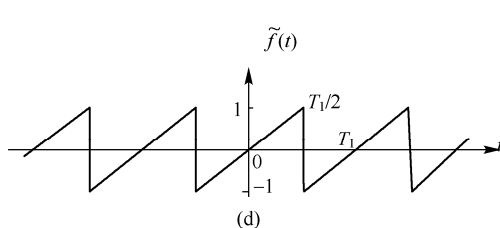
(a)



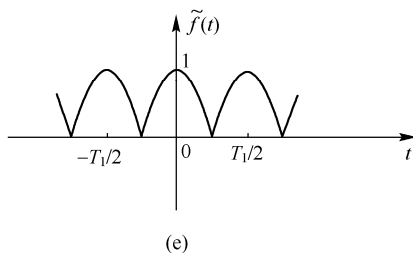
(b)



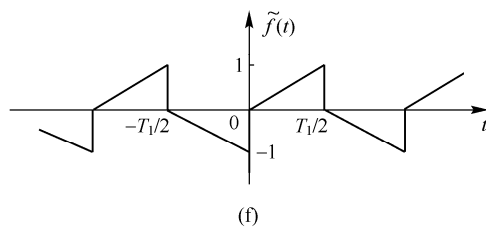
(c)



(d)



(e)



(f)

图 题 3-5

3-6 已知周期函数  $\tilde{f}(t)$  前四分之一周期的波形如图题 3-6 所示。根据下列各种情况的要求画出  $\tilde{f}(t)$  在一个周期 ( $0 < t < T_1$ ) 的波形。

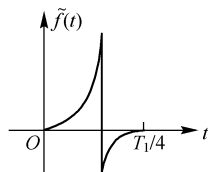


图 题 3-6

- (1)  $\tilde{f}(t)$  是偶函数, 只含有直流分量和偶次谐波分量;
- (2)  $\tilde{f}(t)$  是偶函数, 只含有奇次谐波分量;
- (3)  $\tilde{f}(t)$  是偶函数, 含有直流分量、偶次和奇次谐波分量;
- (4)  $\tilde{f}(t)$  是奇函数, 只含有偶次谐波分量;
- (5)  $\tilde{f}(t)$  是奇函数, 只含有奇次谐波分量;
- (6)  $\tilde{f}(t)$  是奇函数, 含有偶次和奇次谐波分量。

3-7 求图题 3-7 所示锯齿脉冲与单周正弦脉冲的傅里叶变换。

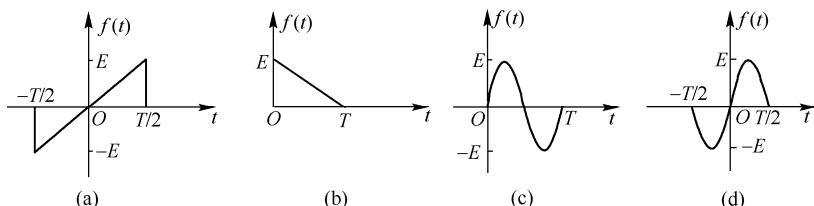


图 题 3-7

3-8 求图题 3-8 所示  $F(j\Omega)$  的傅里叶逆变换  $f(t)$ 。

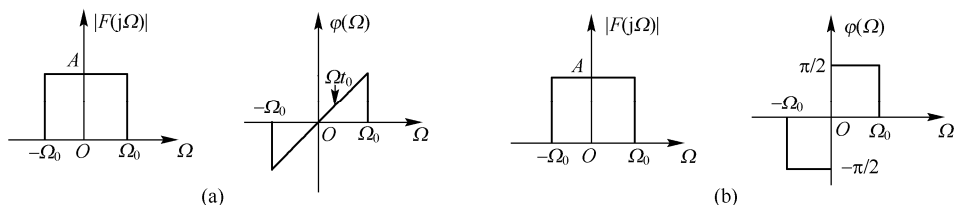


图 题 3-8

3-9 求图题 3-9 所示信号  $f(t)$  的傅里叶变换。

3-10 试证明: (1) 若  $f(t)$  是  $t$  的实偶函数, 则  $F(j\Omega)$  是  $\Omega$  的实偶函数;

(2) 若  $f(t)$  是  $t$  的实奇函数, 则  $F(j\Omega)$  是  $\Omega$  的虚奇函数;

(3) 若  $f(t)$  是  $t$  的虚偶函数, 则  $F(j\Omega)$  是  $\Omega$  的虚偶函数;

(4) 若  $f(t)$  是  $t$  的虚奇函数, 则  $F(j\Omega)$  是  $\Omega$  的实奇函数;

(5) 若  $f(t)$  是  $t$  的复偶函数, 则  $F(j\Omega)$  是  $\Omega$  的复偶函数;

(6) 若  $f(t)$  是  $t$  的复奇函数, 则  $F(j\Omega)$  是  $\Omega$  的复奇函数。

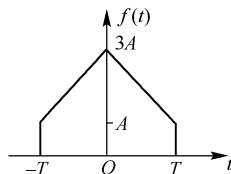


图 题 3-9

3-11 求函数  $\text{Sa}(\Omega_c t)$  的傅里叶变换。

3-12 利用时域与频域的对偶性, 求下列傅里叶变换的时间函数。

(1)  $F(j\Omega) = \delta(\Omega - \Omega_0)$

(2)  $F(j\Omega) = u(\Omega + \Omega_0) - u(\Omega - \Omega_0)$

3-13 由矩形脉冲的傅里叶变换, 利用时移特性求图题 3-13 所示信号的傅里叶变换, 并大致画出幅度谱。

3-14  $f_1(t)$  和  $f_2(t)$  如图题 3-14 所示, 已知  $\mathcal{F}[f_1(t)] = F_1(j\Omega)$ , 求图中  $f_2(t)$  的傅里叶变换  $\mathcal{F}[f_2(t)]$ 。



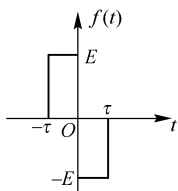


图 题 3-13

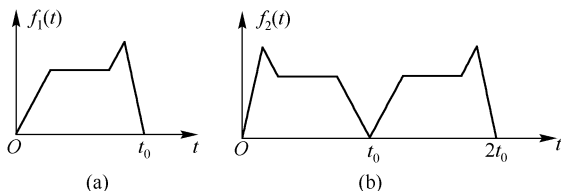


图 题 3-14

3-15 已知  $f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(j\Omega)]$ , 且  $F_1(j\Omega) = F[j(\Omega - \Omega_0)] + F[j(\Omega + \Omega_0)]$ , 求  $\mathcal{F}^{-1}[F_1(j\Omega)]$ 。

3-16 已知三角脉冲信号  $f_1(t)$  如图题 3-16(a)所示。试利用有关性质求图题 3-16(b)中的  $f_2(t) = f_1\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\cos\Omega_0 t$  的傅里叶变换  $F_2(j\Omega)$ 。

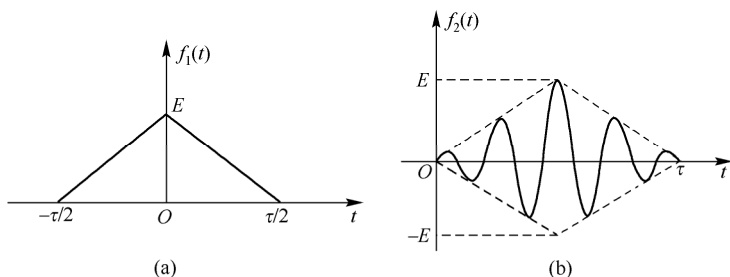


图 题 3-16

3-17 利用傅里叶变换的微分与积分特性, 求图题 3-17 所示三种信号的傅里叶变换。

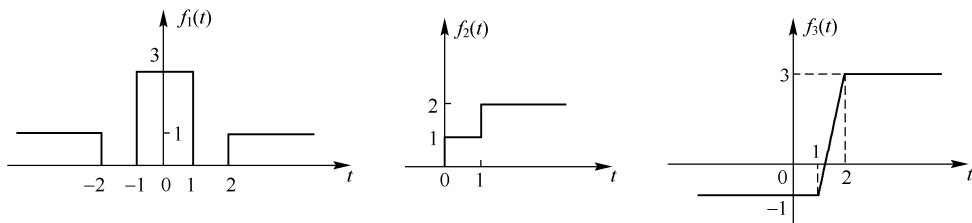


图 题 3-17

3-18 若已知  $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega)$ , 利用傅里叶变换的性质求下列信号的傅里叶变换。

- (1)  $tf(2t)$  (2)  $(t-2)f(-2t)$  (3)  $t\frac{df(t)}{dt}$  (4)  $(1-t)f(1-t)$

3-19 利用傅里叶变换的性质, 求下列信号的傅里叶变换或逆变换。

- (1)  $\mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2+1}\right]$  (2)  $\mathcal{F}\left[\frac{1}{t}\right]$  (3)  $\mathcal{F}\left[\frac{\cos\Omega_0 t}{t}\right]$ ,  $\Omega_0$  为常数  
(4)  $\mathcal{F}[t]$  (5)  $\mathcal{F}^{-1}[\text{sgn}(\Omega)]$  (6)  $\mathcal{F}^{-1}[\cos 2\Omega]$

3-20 求单边正弦函数  $\sin\Omega_0 t \cdot u(t)$  和单边余弦函数  $\cos\Omega_0 t \cdot u(t)$  的傅里叶变换。

3-21 图题 3-21 所示信号  $f(t)$ , 其傅里叶变换为  $F(j\Omega) = |F(j\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)}$ ,

利用傅里叶变换的性质 (不做积分运算), 求:

- (1)  $\varphi(\Omega)$  (2)  $F(0)$  (3)  $\int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega)d\Omega$

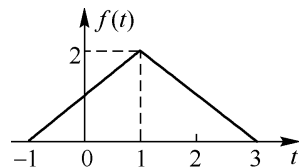


图 题 3-21

3-22 若  $f(t)$  的频谱  $F(j\Omega)$  如图题 3-22 所示, 粗略画出  $f(t)\cos\Omega_0 t$ ,  $f(t)e^{j\Omega_0 t}$ ,  $f(t)\cos\Omega_1 t$  及  $f(t)\cos\Omega_2 t$  的频谱 (注明频谱的边界频率)。

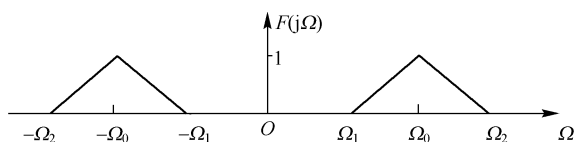


图 题 3-22

3-23 根据傅里叶变换的定义和性质，利用三种以上的方法计算图题 3-23 所示各脉冲信号的傅里叶变换。

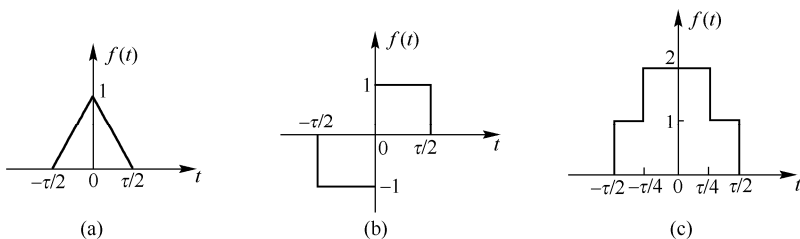


图 题 3-23

\*\*3-24 计算下列各信号的傅里叶变换。

- (1)  $[te^{-2t} \sin 3t]u(t)$  (2)  $\left[ \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right] \left[ \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} \right]$  (3)  $\tilde{f}(t)$  如图题 3-24 所示

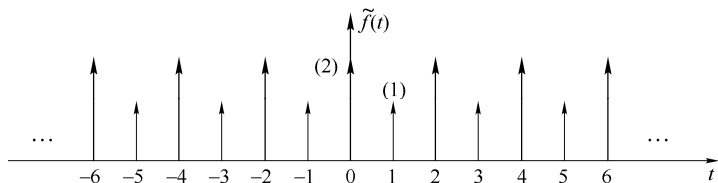


图 题 3-24

\*\*3-25 假设信号  $x(t)$  与  $y(t)$  的傅里叶变换分别为  $X(j\Omega)$  与  $Y(j\Omega)$ 。

- (1) 如果  $x(-t) = x^*(t)$ ，那么  $X(j\Omega)$  具有什么性质？

- (2) 证明 
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)Y^*(j\Omega)d\Omega$$

\*\*3-26 定义信号  $f(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$

- (1) 假设  $\mathcal{F}[x(t)] = X(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| < 1 \\ 0 & |\Omega| > 1 \end{cases}$ ，求  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$  的值。

- (2)  $f(\Omega/4)$  的傅里叶逆变换是什么？

3-27 周期矩形脉冲信号  $\tilde{f}(t)$  如图题 3-27 所示。

- (1) 求  $\tilde{f}(t)$  的指数形式的傅里叶级数，并画出频谱图  $F_n$ ；

- (2) 求  $\tilde{f}(t)$  的傅里叶变换  $F(j\Omega)$ ，并画出频谱图  $F(j\Omega)$ 。

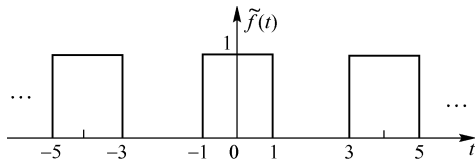


图 题 3-27

3-28 求下列函数的拉氏变换。

- (1)  $(1+2t)e^{-t}$  (2)  $(1-\cos \alpha t)e^{-\beta t}$  (3)  $e^{-(t+\alpha)} \cos \Omega_0 t$   
 (4)  $te^{-(t-2)}u(t-1)$  (5)  $te^{-t} \sin t$  (6)  $t^2 u(t-1)$   
 (7)  $e^{-t}[u(t)-u(t-2)]$  (8)  $\frac{e^{-3t}-e^{-5t}}{t}$

3-29 求下列函数的拉氏变换, 注意阶跃函数的跳变时间。

- (1)  $f(t) = e^{-t}u(t-2)$  (2)  $f(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$  (3)  $f(t) = e^{-(t-2)}u(t)$   
 (4)  $f(t) = \sin 2t \cdot u(t-1)$  (5)  $f(t) = (t-1)[u(t-1)-u(t-2)]$  (6)  $f(t) = t[u(t-1)-u(t-2)]$

3-30 若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ , 试证明:

- (1)  $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-st_0} \left[ F(s) + \int_{-t_0}^0 f(t)e^{-st} dt \right]$  (2)  $\mathcal{L}[f(t+t_0)] = e^{st_0} \left[ F(s) - \int_0^{t_0} f(t)e^{-st} dt \right]$

3-31 求下列函数的单边拉普拉斯逆变换。

- (1)  $\frac{4}{s(2s+3)}$  (2)  $\frac{3s}{(s+4)(s+2)}$  (3)  $\frac{s+3}{(s+1)^3(s+2)}$   
 (4)  $\frac{1}{(s^2+3)^2}$  (5)  $\frac{s}{(s+1)[(s+1)^2+4]}$  (6)  $\frac{e^{-s}}{4s(s^2+1)}$

3-32 试利用拉氏变换的时域卷积定理求下列拉氏变换  $F(s)$  的原函数  $f(t)$ 。

- (1)  $\frac{1}{(s+\alpha)^2}$  (2)  $\left( \frac{1-e^{-s}}{s} \right)^2$  (3)  $\frac{s}{(s+\alpha)(s^2+1)}$

3-33 已知  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{(s+1)e^{-s}}{(s+2)^2+4}$ , 利用尺度变换特性求  $f(t/2)$ 。

3-34 分别求下列函数的逆变换之初值与终值。

- (1)  $\frac{10(s+2)}{s(s+5)}$  (2)  $\frac{1}{(s+3)^2}$  (3)  $\frac{s^3+s^2+2s+1}{s^2+2s+1}$  (4)  $\frac{s^2+2s+3}{(s+1)(s^2+\Omega_0^2)}$

以下为 MATLAB 习题

3-35 周期性矩形脉冲信号如图题 3-35 所示, 画出它的幅度谱和相位谱、前 5 次谐波叠加波形和前 10 次谐波叠加波形。

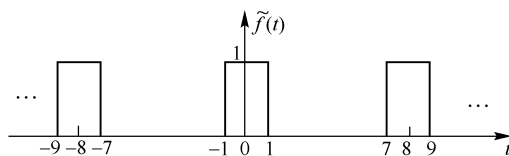


图 题 3-35 周期矩形脉冲信号的波形

3-36 计算: (1)  $x_1(t) = e^{-t+1} \cos 0.5t \cdot u(t)$  的傅里叶变换;

(2)  $F_2(j\Omega) = \text{Sa}(2\Omega) + \text{Sa}(\pi\Omega)$  的傅里叶逆变换;

(3)  $f_3(t) = e^{-t}(\sin t + \cos 2t)$  的拉普拉斯变换;

(4)  $F_4(s) = \frac{s+4}{s(s^2+4s+4)}$  的拉普拉斯逆变换。

3-37 用 MATLAB 绘制矩形脉冲  $x(t) = u(t+2) - u(t-2)$  的拉普拉斯变换的幅度曲面图, 以及该信号的傅里叶变换的幅度频谱曲线。

## 第4章 连续时间系统的时域分析

本章讨论线性时不变系统的时域分析方法。时域分析方法不涉及任何变换，直接求解系统的微分方程，对于系统的分析与计算全部都在时域内进行。这种方法具有直观、物理概念清楚等优点，也是学习变换域分析法的基础。

在本章中，首先讨论微分方程的经典解法，在此基础上，引进系统的零输入响应与零状态响应这两个重要的基本概念，使线性时不变系统分析方法在理论上更完善。在引入系统的冲激响应以后，将冲激响应与激励信号进行卷积积分，这样可以求得系统的零状态响应。

### 4.1 系统模型及其分类

#### 1. 系统的数学模型

要分析任何一个物理系统，首先要建立该系统的数学模型（mathematical model）。所谓数学模型，就是系统基本特性的数学抽象，它是以数学表达式来表征系统特性的。数学模型建立以后，再求出它的解答。还可以对所得结果做出物理解释、赋予物理意义。概括说来，系统分析的过程，是从实际物理问题抽象为数学模型，经数学解析后再回到物理实际的过程。

例如，研究图 4.1-1 所示的电容器的充电过程，激励信号为电流源（current source） $i(t)$ ，取电容器上的电压  $v_C(t)$  作为响应。那么响应与激励之间满足如下关系

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (4.1-1)$$

上式就是图 4.1-1 所示系统的数学模型，它是一阶微分方程。

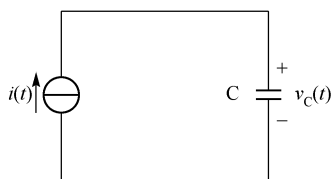


图 4.1-1 电容器充电电路

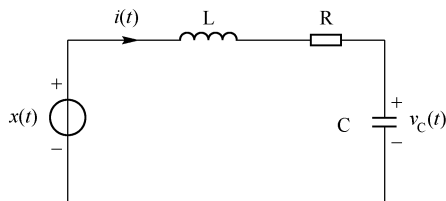


图 4.1-2 RLC 串联回路

下面再考虑另一系统。图 4.1-2 所示系统是由电阻、电容和电感组成的串联回路。若激励信号是电压源（voltage source） $x(t)$ ，取电容上的电压  $v_C(t)$  作为响应。现在来建立描述该系统的数学模型。

根据基尔霍夫电压定律（Kirchhoff's voltage law, KVL），可列出回路电压方程为

$$v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = x(t) \quad (4.1-2)$$

根据各元件上电流与电压的关系，有

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad v_R(t) = Ri(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} \quad v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = LC \frac{d^2v_C(t)}{dt^2}$$

$$\text{将以上关系代入式(4.1-2), 得} \quad LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = x(t) \quad (4.1-3)$$

上式就是图 4.1-2 所示系统的数学模型, 它是二阶线性微分方程。

系统模型的建立是有一定条件的。对于同一物理系统, 在不同条件之下, 可以得到不同形式的数学模型。例如, 图4.1-2 所示系统在工作频率较低, 而且电感、电容元件损耗相对很小情况下, 它的数学模型就是式(4.1-3)。如果工作频率较高, 则要考虑寄生参数, 如分布电容、引线电感和损耗, 这时系统的数学模型会变得十分复杂。

从另一方面讲, 对于不同的物理系统, 经过抽象和近似, 有可能得到形式上完全相同的数学模型。例如, 根据网络对偶理论可知, 一个由电导  $G$ 、电容  $C$  及电感  $L$  组成的并联回路, 在电流源  $i(t)$  激励下求其端电压  $v(t)$  的微分方程将与式(4.1-3)的形式相同。甚至还能找到非电系统, 如力学系统的数学模型与电系统的数学模型的形式相同。这表明, 同一数学模型可以描述物理外貌截然不同的系统。我们将数学模型相同的系统称为相似系统。

还需指出, 对于同一系统, 而且在工作条件一定的情况下, 系统的数学模型的形式并不是唯一的。仍以图 4.1-2 为例, 它的数学模型不限于式(4.1-3)所示的二阶微分方程的形式。此系统的数学模型也可表示成如下形式

$$\begin{cases} \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \\ \frac{di(t)}{dt} = -\frac{1}{L} v_C(t) - \frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} x(t) \end{cases} \quad (4.1-4)$$

上式是两个一阶联立微分方程组。因此式(4.1-3)与式(4.1-4)是图 4.1-2 所示系统数学模型两种不同的表现形式。前者称为输入-输出方程(将在本章 4.3 节中介绍); 后者称为状态方程(将在第 9 章中介绍), 它们之间可以相互转换。

微分方程的阶数就是系统的阶数, 也就是系统中所包含的独立储能元件的个数。例如, 图 4.1-2 所示的系统是二阶系统。在 4.3 节中, 我们还要进一步建立一些较复杂系统的数学模型。

## 2. 系统的分类

系统的分类错综复杂, 按照其数学模型的差异划分如下:

(1) 连续时间系统 (continuous-time system) 与离散时间系统 (discrete-time system)

若系统的输入与输出均为连续时间信号, 则称此系统为连续时间系统; 若系统的输入和输出均为离散时间信号, 则称此系统为离散时间系统。一般由电阻、电感和电容组成的电路都是连续时间系统, 而数字计算机则是一个典型的离散时间系统。实际上离散时间系统经常与连续时间系统组合运用, 此时称为混合系统。

连续时间系统的数学模型是微分方程 (differential equation), 而离散时间系统的数学模型是差分方程 (difference equation)。本书两者都要研究。

(2) 线性系统 (linear system) 与非线性系统 (nonlinear system)

一般来说, 由线性元件 (电阻、电感、电容) 组成的系统称为线性系统; 含有非线性元件 (例如晶体管) 的系统则称为非线性系统。本书只研究线性系统。

(3) 时不变系统 (time-invarying system) 与时变系统 (time-varying system)

如果系统的参数不随时间而变化, 则称这样的系统为时不变系统 (或称为非时变系统);

如果系统参数随时间而变化,则称此系统为时变系统。

综合(2)和(3)两方面的情况,我们可以遇到线性时不变、线性时变、非线性时不变和非线性时变四种不同类型的系统。而以上每种系统又可分为连续系统和离散系统,因此实际上共有八种系统。其中线性时不变连续(或离散)系统的数学模型是常系数线性微分(或差分)方程;线性时变连续(或离散)系统的数学模型是变系数线性微分(或差分)方程;非线性时不变连续(或离散)系统的数学模型是常系数非线性微分(或差分)方程;而非线性时变连续(或离散)系统的数学模型是变系数非线性微分(或差分)方程。本书只研究线性时不变连续系统与线性时不变离散系统。

(4)集总参数系统(lumped-parameter system)与分布参数系统(distributed-parameter system)

只由集总参数元件组成的系统称为集总参数系统;含有分布参数元件(如天线、传输线、波导等)的系统则称为分布参数系统。

集总参数系统的数学模型是常微分方程;而分布参数系统的数学模型是偏微分方程(partial differential equation),这时描述系统的独立变量不仅是时间变量,而且还要考虑到空间位置。本书只研究集总参数系统。

(5)因果系统(causal system)与非因果系统(noncausal system)

如果 $t < t_0$ 时,系统的激励信号等于零,相应的响应信号在 $t < t_0$ 时也等于零,这样的系统称为因果系统。否则即为非因果系统。因果系统的响应不会出现于激励加入之前,或者说因果系统没有预知未来的能力,只有在激励加入之后,系统才可能有响应。也就是说,激励是产生响应的原因,响应是激励引起的后果。这种特性就称为因果性。显然任何实际的物理系统都是因果系统。对于因果系统,在因果信号激励下,响应也是因果信号。而非因果系统在物理上是不可实现的,但研究它也有一定的意义。

本书主要研究集总参数线性时不变的连续时间系统和集总参数线性时不变的离散时间系统。它们的数学模型分别为常系数线性微分方程和常系数线性差分方程。

## 4.2 线性时不变系统及其分析方法概述

### 4.2.1 线性时不变系统的基本特性

#### 1. 线性特性

线性特性包括叠加性(superposition property)与均匀性(homogeneity)两方面。

所谓叠加性是指当几个激励信号同时作用于系统时,总的响应信号等于每个激励单独作用所产生的响应之和,可由图 4.2-1 所示的方框图表示。

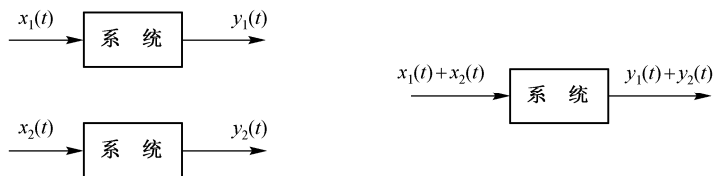


图 4.2-1 线性系统的叠加性

所谓均匀性(或称为齐次性)是指当输入信号乘以某常数 $k$ 时,响应也乘以相同的常数 $k$ ,可由图 4.2-2 所示的方框图表示。



图 4.2-2 线性系统的均匀性

若系统同时具有这两种特性时，该系统就称为线性系统。即如果  $x_1(t)$ ， $y_1(t)$  和  $x_2(t)$ ， $y_2(t)$  分别代表两对激励与响应，则当激励为  $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$  ( $a_1, a_2$  为常数) 时，系统的响应为  $a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$ ，如图 4.2-3 所示，该系统称为线性系统。

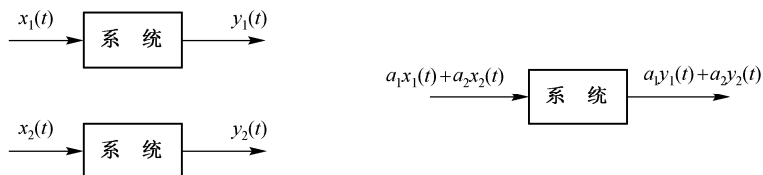


图 4.2-3 线性系统

因此，线性特性可表述为：若  $T[x_1(t)] = y_1(t)$ ， $T[x_2(t)] = y_2(t)$ ，则

$$T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1T[x_1(t)] + a_2T[x_2(t)] \quad (4.2-1)$$

## 2. 时不变特性

对于时不变系统，由于系统参数本身不随时间变化，因此在起始条件为零的条件下，系统的响应与激励施加于系统的时刻无关。

如果激励为  $x(t)$ ，产生的响应为  $y(t)$ ，则当激励为  $x(t-t_0)$  时，响应则为  $y(t-t_0)$ 。如图 4.2-4 所示，它表明当激励延迟一段时间  $t_0$  时，其响应也延迟同样的时间  $t_0$ ，波形形状不变。

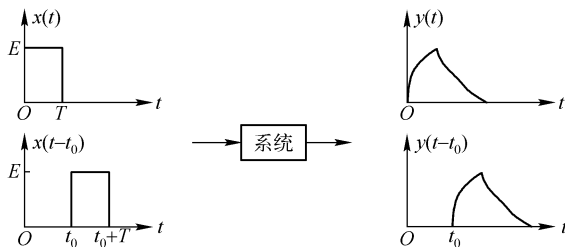


图 4.2-4 时不变特性

因此，时不变特性可表述为：若  $T[x(t)] = y(t)$ ，则

$$T[x(t-t_0)] = y(t-t_0) \quad (4.2-2)$$

**例 4.2-1** 判断下列系统是线性的还是非线性的，是时不变的还是时变的。

(1)  $y(t) = x(-t)$ ;      (2)  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$

**解：**(1) 设两输入信号分别为  $x_1(t)$  与  $x_2(t)$ ，则输出信号分别为

$$y_1(t) = T[x_1(t)] = x_1(-t), \quad y_2(t) = T[x_2(t)] = x_2(-t)$$

因为

$$T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1x_1(-t) + a_2x_2(-t)$$

而

$$a_1T[x_1(t)] + a_2T[x_2(t)] = a_1x_1(-t) + a_2x_2(-t)$$

即满足

$$T[a_1x_1(t) + a_2x_2(t)] = a_1T[x_1(t)] + a_2T[x_2(t)]$$

所以该系统是线性系统。

又因为  $y(t) = x(-t)$ ,  $y(t - t_0) = x[-(t - t_0)]$

而  $T[x(t - t_0)] = x(-t - t_0) \neq y(t - t_0)$

不符合式(4.2-2)所示的时不变特性, 所以该系统是时变系统。

综合上述两点, 该系统为线性时变系统。

(2) 按题意有  $y_1(t) = \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau$ ,  $y_2(t) = \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau$

$$T[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = \int_{-\infty}^t [a_1 x_1(\tau) + a_2 x_2(\tau)] d\tau = a_1 \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau + a_2 \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau$$

而  $a_1 T[x_1(t)] + a_2 T[x_2(t)] = a_1 \int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau + a_2 \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau$

即满足  $T[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 T[x_1(t)] + a_2 T[x_2(t)]$

所以该系统是线性系统。

又因为  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ ,  $y(t - t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau$

而  $T[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^t x(\tau - t_0) d\tau$

做变量置换, 令  $u = \tau - t_0$ , 则有

$$T[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(u) du = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau = y(t - t_0)$$

所以该系统是时不变系统。

综合上述两点, 该系统为线性时不变系统。

### 3. 微分与积分特性

对于线性时不变系统满足如下微分特性: 在系统的起始状态为零的情况下, 若系统在激励  $x(t)$  作用下产生的响应为  $y(t)$ , 则当激励为  $\frac{dx(t)}{dt}$  时, 响应则为  $\frac{dy(t)}{dt}$ 。

根据线性特性与时不变特性很容易证明上述结论。首先由时不变特性可知, 若激励  $x(t)$  对应的响应为  $y(t)$ , 则激励  $x(t - \Delta t)$  产生的响应为  $y(t - \Delta t)$ 。再由叠加性与均匀性可知, 若激励为  $\frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$ , 则产生的响应为  $\frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t}$ , 取  $\Delta t \rightarrow 0$  的极限, 得到导数关系。即:

若激励为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}$$

则响应为

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{dy(t)}{dt}$$

这表明, 当系统的输入由原激励信号改为其导数时, 输出也由原响应信号改为其导数。显然, 此结论可扩展至如下积分特性。

当系统的输入由原激励信号改为其积分时, 输出也由原响应信号改为其积分。微分与积分特性可用图 4.2-5 表示。

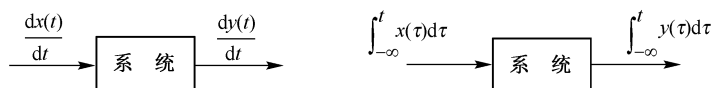


图 4.2-5 微分与积分特性



## 4.2.2 线性时不变系统分析方法概述

在系统分析中,线性时不变系统的分析具有重要意义。在实际应用中,有一些非线性系统或时变系统在一定条件下,也遵循线性时不变系统的规律,从而也能用线性时不变系统的方法进行研究。例如,在小信号工作条件下的线性放大器就是如此。另一方面,线性时不变系统的分析方法也是研究非线性或时变系统的基础。

为了使读者对系统分析的概貌有初步的了解,下面就线性时不变系统的分析方法做一概述。

### 1. 输入-输出分析法与状态变量分析法

在建立系统数学模型方面,系统的数学描述方法可分为两大类:输入-输出分析法(input-output analysis)和状态变量分析法(state variable analysis)。

输入-输出分析法着眼于系统输入与输出之间的关系。描述线性时不变系统输入-输出关系的是 $n$ 阶常系数线性微分方程(对于 $n$ 阶连续系统)或 $n$ 阶常系数线性差分方程(对于 $n$ 阶离散系统)。输入-输出分析法可以直接给出某一激励经过系统所引起的响应,因而对于在无线电技术中大量遇到的单输入、单输出系统(single-input and single-output system),应用这种方法较方便。但是它并不关心系统内部变量的情况,因而它不适用于从内部去观察系统的各种问题。而在这方面,状态变量分析法却有它的独到之处。

状态变量分析法不仅可以给出系统的响应,还可提供系统内部各变量的情况。动态系统中的某些变量(如电容器两端的电压和流经电感的电流等)称为状态变量,它们具有“记忆”的性质,只要知道了这些状态变量在某一时刻的数值,以及该时刻以后的激励,就可确定系统在该时刻以后的响应。状态变量分析法用两组方程来描述系统。

(1) 状态方程(state equation),它描述了系统内部状态变量与激励之间的关系。对于 $n$ 阶线性时不变连续系统,它是 $n$ 个一阶常系数微分方程组,在4.1节中已举例说明,如式(4.1-4)所示;对于 $n$ 阶线性时不变离散系统,它是 $n$ 个一阶常系数差分方程组。

(2) 输出方程(output equation),它描述了系统的输出与状态变量和输入的关系。输出方程通常是代数方程。状态变量分析法对于多输入、多输出系统(multi-input and multi-output system)的分析将显示出优越性。

状态变量分析法不仅适用于线性时不变系统,也便于推广应用于非线性系统和时变系统。

### 2. 时域分析法和变换域分析法

在建立了描述线性时不变系统的数学模型后,还需要对其进行求解。从系统数学模型的求解方法来讲,大体上可分为时域分析法(time domain analysis)和变换域分析法(transform domain analysis)两大类。

时域分析法是直接分析时间变量的函数,研究系统的时间响应特性,或称时域特性。也就是说,求解系统的响应完全在时域中进行。对于输入-输出描述的数学模型,可以利用经典法求解常系数线性微分方程或差分方程。对于状态变量描述的数学模型,则需求解矩阵方程。

对于高阶系统或激励信号较为复杂的情况,时域分析法的计算过程繁复,不便求解。这时若采用变换域分析法,问题就能迎刃而解。变换域分析法是将信号与系统模型的时间函数变换成相应变换域的某种函数。对连续系统可采用傅里叶变换或拉普拉斯变换的方法来分析;

而对于离散系统常采用  $z$  变换 (ZT) 的方法来分析。傅里叶变换以频率  $\Omega$  为独立变量, 以频域特性为主要研究对象; 而拉普拉斯变换及  $z$  变换则分别以复频率  $s$  及  $z$  为独立变量, 两者都注重研究极点与零点分析, 利用  $s$  域或  $z$  域来分析系统的诸特性。变换域分析法可以将时域分析中的微分方程或差分方程转化成代数方程, 而将卷积变换为乘积。

线性时不变系统的研究, 以叠加性、均匀性和时不变性作为分析一切问题的基准。按照这种观点去考察问题, 时域分析法与变换域分析法并没有本质区别。这两种方法都是把激励信号分解为某种基本单元, 在这些基本单元信号分别作用下求得系统的响应, 然后叠加。例如, 在时域卷积法中这种基本单元是冲激函数, 在傅里叶变换中是正弦函数或指数函数, 在拉普拉斯变换中则是复指数函数。因此, 变换域分析法不仅可以视为求解数学模型的有力工具, 而且能够赋予明确的物理意义。基于这种物理解释, 时域分析法与变换域分析法得到了统一。

本书按照先输入-输出描述后状态变量描述, 先连续后离散, 先时域后变换域的顺序, 研究线性时不变系统的基本分析方法, 初步介绍这些方法在信号传输与处理方面的简单应用。

## 4.3 线性时不变系统响应的经典求解

### 4.3.1 线性时不变系统的数学模型

在 4.1 节中, 我们已列举了两个较简单系统的数学模型。对于较复杂的连续时间系统, 只要依据电网络的以下两个约束特性, 就可列出微分方程。

(1) 元件特性约束: 即表征元件特性的关系式, 如电容、电感、电阻各自电压与电流的关系等;

(2) 网络拓扑约束: 由网络结构决定的电压、电流约束关系, 如基尔霍夫电压定律 (KVL) 和基尔霍夫电流定律 (KCL) 等。

下面举例说明如何列写系统的数学模型——微分方程。

**例 4.3-1** 图 4.3-1 所示电路中,  $x(t)$  为电压源激励信号, 试写出以电流  $i_2(t)$  为响应信号的微分方程。

**解:** 根据 KVL, 列出两个网孔的回路方程式

$$\begin{cases} 2 \frac{di_1(t)}{dt} + i_1(t) + 2 \int_{-\infty}^t [i_1(\tau) - i_2(\tau)] d\tau = x(t) \\ 2 \int_{-\infty}^t [i_2(\tau) - i_1(\tau)] d\tau + 3i_2(t) = 0 \end{cases}$$

利用消元法来求解联立方程, 可得到  $i_2(t)$  的微分方程

$$6 \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 7 \frac{di_2(t)}{dt} + 8i_2(t) = 2x(t)$$

这是一个二阶常系数线性微分方程。

**例 4.3-2** 图 4.3-2 所示互感耦合电路中,  $x(t)$  为电压源激励信号, 试列写电流  $i_2(t)$  的微分方程式。

**解:** 对于初、次级回路分别应用 KVL, 可得如下两个方程

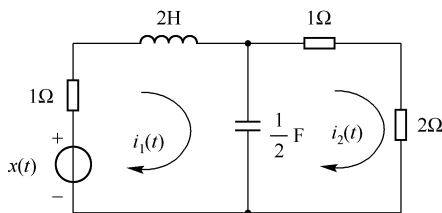


图 4.3-1 例 4.3-1 的电路

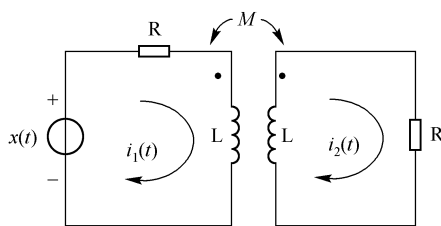


图 4.3-2 互感耦合电路

$$\begin{cases} L \frac{di_1(t)}{dt} + Ri_1(t) - M \frac{di_2(t)}{dt} = x(t) \\ L \frac{di_2(t)}{dt} + Ri_2(t) - M \frac{di_1(t)}{dt} = 0 \end{cases}$$

利用消元法求解联立方程，可得到  $i_2(t)$  的微分方程

$$(L^2 - M^2) \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 2RL \frac{di_2(t)}{dt} + R^2 i_2(t) = M \frac{dx(t)}{dt}$$

这也是一个二阶常系数线性微分方程。

将以上二例推广到一般情况，对于一个  $n$  阶线性时不变连续时间系统，其激励信号  $x(t)$  与响应信号  $y(t)$  之间的关系，可以用下列形式的微分方程式来描述

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ & = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (4.3-1)$$

式中，系数  $a_i, b_j$  均为常数。式(4.3-1)为一个常系数  $n$  阶线性常微分方程。

### 4.3.2 微分方程的经典求解

根据常系数线性微分方程的求解方法可以知道，式(4.3-1)的微分方程的解由齐次解 (homogeneous solution)  $y_h(t)$  和特解 (particular solution)  $y_p(t)$  两部分组成。即

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad (4.3-2)$$

齐次解是当式(4.3-1)中的激励信号  $x(t)$  及各阶导数都等于零时的解。齐次解应满足

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = 0 \quad (4.3-3)$$

上式称为对应于式(4.3-1)的齐次微分方程，它所对应的特征方程 (characteristic equation) 为

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0 \quad (4.3-4)$$

而特征方程的根  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  称为微分方程的特征根 (characteristic root)。

在特征根各不相同 (无重根) 的情况下，微分方程的齐次解为

$$y_h(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + \cdots + A_n e^{\alpha_n t} \quad (4.3-5)$$

这里  $A_1, A_2, \cdots, A_n$  是由初始条件决定的系数。现举例说明求解齐次方程的过程。

**例 4.3-3** 求微分方程  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2x(t)$  的齐次解。

**解：**特征方程为  $\alpha^2 + 6\alpha + 8 = 0$

解得特征根为  $\alpha_1 = -2$ ,  $\alpha_2 = -4$ ，则所对应的齐次解为  $y_h(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-4t}$

上例是特征根为各不相同的实数的情况。若特征根为共轭复数  $\alpha \pm j\beta$  时，则所对应的齐次解为  $A_1 e^{(\alpha+j\beta)t} + A_2 e^{(\alpha-j\beta)t}$ ，且可以化解为  $e^{\alpha t} [A \cos \beta t + B \sin \beta t]$  的形式。

当有重根的情况下，齐次解的形式将有所不同。假设  $\alpha_1$  为特征方程的  $k$  重根，则  $\alpha_1$  对应

的齐次解有  $k$  项, 即

$$(A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \cdots + A_k t^{k-1}) e^{\alpha_t} \quad (4.3-6)$$

**例 4.3-4** 求微分方程  $\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 7 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 16 \frac{dy(t)}{dt} + 12 y(t) = x(t)$  的齐次解。

**解:** 特征方程为  $\alpha^3 + 7\alpha^2 + 16\alpha + 12 = 0$

可求得特征根为  $\alpha_1 = \alpha_2 = -2$ ,  $\alpha_3 = -3$ , 其中  $-2$  为二重根。所以, 齐次方程的解为

$$y_h(t) = (A_1 + A_2 t) e^{-2t} + A_3 e^{-3t}$$

由此可见, 齐次解的形式仅取决于特征方程根的性质, 而与激励信号无关, 所以齐次解有时称为固有解 (natural solution) (或称自由解)。当然齐次解的系数  $A_1, A_2, \cdots, A_n$  与激励信号有关。

微分方程的特解是由输入信号产生的, 所以也叫做强迫解 (forced solution)。特解的形式与激励信号的形式有关。将激励信号代入方程式 (4.3-1) 的右端, 代入后右端的函数式称为自由项。通常, 由观察自由项试选特解函数式, 代入原方程后求得特解函数式中的待定系数, 即可求出特解。下面举例说明特解的求解方法。

**例 4.3-5** 给定微分方程  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 3 y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$

分别求在以下两种情况下方程的特解: (1)  $x(t) = t^2$ ; (2)  $x(t) = e^{-2t}$ 。

**解:** (1) 将  $x(t) = t^2$  代入方程的右端, 得到  $t^2 + 2t$ , 为使等式两边平衡, 可选特解函数为

$$y_p(t) = B_1 t^2 + B_2 t + B_3$$

其中,  $B_1, B_2, B_3$  为待定系数。将  $y_p(t)$  代入微分方程得到

$$3B_1 t^2 + (4B_1 + 3B_2)t + (2B_1 + 2B_2 + 3B_3) = t^2 + 2t$$

等式两端对应的同次幂项系数应相等, 即

$$\begin{cases} 3B_1 = 1 \\ 4B_1 + 3B_2 = 2 \\ 2B_1 + 2B_2 + 3B_3 = 0 \end{cases}$$

解得  $B_1 = 1/3, B_2 = 2/9, B_3 = -10/27$ , 所以特解为  $y_p(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{10}{27}$ 。

(2) 当  $x(t) = e^{-2t}$  时, 右端自由项为  $-e^{-2t}$ , 很明显, 可选择  $y_p(t) = B e^{-2t}$  为特解, 这里  $B$  是待定系数。代入方程后有  $3B e^{-2t} = -e^{-2t}$ , 解得  $B = -1/3$ , 于是特解为  $y_p(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t}$ 。

用类似的方法, 可以求得其他几种典型激励信号对应的特解函数形式, 如表 4.3-1 所示。

表 4.3-1 与几种典型的自由项对应的特解

| 自由项               | 响应函数的特解 $y_p(t)$ 的形式                               |
|-------------------|----------------------------------------------------|
| $E$ (常数)          | $B$                                                |
| $t^p$             | $B_p t^p + B_{p-1} t^{p-1} + \cdots + B_1 t + B_0$ |
| $e^{\alpha t}$    | $B e^{\alpha t}$                                   |
| $\cos \Omega_0 t$ | $B_1 \cos \Omega_0 t + B_2 \sin \Omega_0 t$        |
| $\sin \Omega_0 t$ |                                                    |

续表

| 自由项                          | 响应函数的特解 $y_p(t)$ 的形式                                                                                                                                    |
|------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $t^p e^{at} \cos \Omega_0 t$ | $(B_p t^p + B_{p-1} t^{p-1} + \cdots + B_1 t + B_0) e^{at} \cos \Omega_0 t + (D_p t^p + D_{p-1} t^{p-1} + \cdots + D_1 t + D_0) e^{at} \sin \Omega_0 t$ |
| $t^p e^{at} \sin \Omega_0 t$ |                                                                                                                                                         |

注：（1）表中  $B, D$  均为待定系数。

（2）若自由项为几种激励函数组合，则特解也为其相应的组合。

（3）若表中所列特解与齐次解重复，则应在特解中增加一项： $t$  倍乘以表中特解。例如自由项为  $e^{at}$ ，而齐次解也是  $e^{at}$ （特征根  $\alpha = a$ ），则特解为  $B_0 t e^{at} + B_1 e^{at}$ 。

下面通过例子说明经典法求解的全部过程。

**例 4.3-6** 图 4.3-3 所示电路，已知激励信号  $x(t) = \cos 2t \cdot u(t)$ ，初始时刻电容两端电压均为零，求输出信号  $v_2(t)$  的表达式。

**解：**（1）列写微分方程。根据 KCL，可列出节点电流方程为

$$\begin{cases} \frac{x(t) - v_1(t)}{R_1} = C_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_2} \\ \frac{v_1(t) - v_2(t)}{R_2} = C_2 \frac{dv_2(t)}{dt} \end{cases}$$

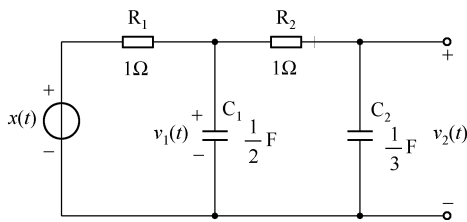


图 4.3-3 例 4.3-6 的电路

化简可得  $v_2(t)$  的微分方程为

$$\frac{d^2 v_2(t)}{dt^2} + 7 \frac{dv_2(t)}{dt} + 6v_2(t) = 6 \cos 2t \cdot u(t)$$

（2）求齐次解。特征方程为  $\alpha^2 + 7\alpha + 6 = 0$ ，特征根为  $\alpha_1 = -1$ ， $\alpha_2 = -6$ ，于是齐次解为  $v_{2h}(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t}$ 。

（3）求特解。根据表 4.3-1 可知

$$y_p(t) = B_1 \sin 2t + B_2 \cos 2t$$

将  $y_p(t)$  代入微分方程求待定系数

$$-4B_1 \sin 2t - 4B_2 \cos 2t + 14B_1 \cos 2t - 14B_2 \sin 2t + 6B_1 \sin 2t + 6B_2 \cos 2t = 6 \cos 2t$$

简化为

$$(2B_1 - 14B_2) \sin 2t + (14B_1 + 2B_2 - 6) \cos 2t = 0$$

即

$$\begin{cases} 2B_1 - 14B_2 = 0 \\ 14B_1 + 2B_2 - 6 = 0 \end{cases}$$

解得  $B_1 = 21/50$ ,  $B_2 = 3/50$ ，于是，特解为

$$y_p(t) = \frac{21}{50} \sin 2t + \frac{3}{50} \cos 2t$$

这样，全响应为

$$v_2(t) = A_1 e^{-t} + A_2 e^{-6t} + \frac{21}{50} \sin 2t + \frac{3}{50} \cos 2t$$

（4）系数  $A_1, A_2$  的确定。由于已知电容  $C_2$  上的初始电压为零，故有  $v_2(0) = 0$ 。又因为电容  $C_1$  上的初始电压也为零，则流过  $R_2, C_2$  的电流也为零，即  $v_2'(0) = 0$ 。借助这两个初始条件可以得到

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + \frac{3}{50} = 0 \\ -A_1 - 6A_2 + \frac{42}{50} = 0 \end{cases}$$

解得  $A_1 = -6/25$ ,  $A_2 = 9/50$ , 所以, 完全解为

$$v_2(t) = \frac{9}{50}e^{-6t} - \frac{6}{25}e^{-t} + \frac{21}{50}\sin 2t + \frac{3}{50}\cos 2t \quad t \geq 0$$

### 4.3.3 初始条件的确定

从以上分析可知, 为求系数  $A$ , 我们利用了  $n$  个条件  $y(0), \frac{dy(0)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}$ 。实际上, 由于  $t=0$  时刻加入了激励, 由于激励的作用,  $y(t)$  及各阶导数在  $t=0$  时刻可能发生跳变而出现不连续。为区分跳变前后的数值, 我们以  $0^-$  表示激励接入前的瞬间, 而以  $0^+$  表示激励接入后的瞬间。将  $y(0^-), \frac{dy(0^-)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0^-)}{dt^{n-1}}$  称为系统的起始条件 (original condition), 简称为  $y^{(k)}(0^-)$ , 它总结了为计算未来响应所需的过去全部“信息”, 而  $y(0^+), \frac{dy(0^+)}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y(0^+)}{dt^{n-1}}$  被称为系统的初始条件 (initial condition), 简称为  $y^{(k)}(0^+)$ 。若  $y^{(k)}(0^+) \neq y^{(k)}(0^-)$ , 则表明起始点发生了跳变。由于用经典法求解微分方程时, 是考虑了激励作用以后的解, 时间范围是  $0^+ \leq t < \infty$ , 所以要利用  $y^{(k)}(0^+)$  来确定系数  $A$ , 而不能利用  $y^{(k)}(0^-)$ 。通常给出的只是  $y^{(k)}(0^-)$ , 所以必须根据激励信号和微分方程来确定  $y^{(k)}(0^+)$ 。

下面研究如何从起始条件来确定初始条件。

在网络分析中, 可以利用系统内部储能的连续性决定初始条件, 即: 没有受到冲激电流 (或阶跃电压) 的作用, 电容两端的电压  $v_C(t)$  不会发生跳变; 当电感没有受到冲激电压 (或阶跃电流) 的作用时, 流过电感的电流  $i_L(t)$  不会发生跳变。即有  $v_C(0^-) = v_C(0^+)$ ,  $i_L(0^-) = i_L(0^+)$ 。但电容中流过的电流  $i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$  和电感两端的电压  $v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ , 以及电阻上的电流及电压均可能发生跳变。

对于简单电路可以按照上述原则判断起始点是否发生跳变。但对复杂电路或非电路系统, 跳变值往往不易获得, 这时可借助于微分方程两端奇异函数平衡的方法做出判断。这种方法称为奇异函数平衡法。下面举例说明。

**例 4.3-7** 在图 4.3-2 所示电路中, 若激励为单位阶跃信号  $x(t) = u(t)$ , 系统起始无储能, 试求  $i_2(t)$ 。

**解:** 在例 4.3-2 中已给出电路的微分方程式, 将  $x(t) = u(t)$  代入, 得

$$(L^2 - M^2) \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 2RL \frac{di_2(t)}{dt} + R^2 i_2(t) = M \frac{du(t)}{dt}$$

$$\text{即} \quad (L^2 - M^2) \frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} + 2RL \frac{di_2(t)}{dt} + R^2 i_2(t) = M \delta(t)$$

(1) 求齐次解。特征方程为

$$(L^2 - M^2)\alpha^2 + 2RL\alpha + R^2 = 0$$

特征根  $\alpha_{1,2} = -\frac{R}{L \pm M}$ ，所以，齐次解为

$$i_{2h}(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

(2) 求特解。由于  $t > 0$  以后，微分方程右端为零，显然，其特解为零，所以齐次解即为完全解，即

$$i_2(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

(3) 确定初始条件。由题意可知， $i_2(0^-) = 0$ ， $i_2'(0^-) = 0$ ，下面利用奇异函数平衡法确定  $i_2(0^+)$  和  $i_2'(0^+)$ 。

由系统的微分方程可以看出，在等式的右端出现冲激函数项  $M\delta(t)$ ，为使方程平衡，等式左端也应有对应的  $\delta(t)$  函数，而且也只能出现在最高阶项中，即  $(L^2 - M^2)\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}$  中包含有  $M\delta(t)$ 。否则，若在低阶项中出现  $\delta(t)$  函数，方程左端第一项将导致冲激偶函数的出现，则不能与右端平衡。所以可以判断， $(L^2 - M^2)\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}$  中包含有  $M\delta(t)$ ，则  $\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}$  中包含有  $\frac{M}{L^2 - M^2}\delta(t)$ （切记， $\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} \neq \frac{M}{L^2 - M^2}\delta(t)$ ，而是包含有  $\delta(t)$  函数）； $\frac{di_2(t)}{dt}$  为  $\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}$  的积分，则  $\frac{di_2(t)}{dt}$  项中应包含  $\frac{M}{L^2 - M^2}u(t)$ （即  $\frac{di_2(t)}{dt}$  在  $t=0$  处有一个不连续点，即有跳变值  $\frac{M}{L^2 - M^2}$ ，其导数将出现  $\delta(t)$  函数），而其积分  $i_2(t)$  在  $t=0$  处是连续的，不产生跳变。可将上述平衡过程简记为

$$\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} \xrightarrow{\text{包含}} \frac{M}{L^2 - M^2}\delta(t), \quad \frac{di_2(t)}{dt} \xrightarrow{\text{包含}} \frac{M}{L^2 - M^2}u(t), \quad i_2(t) \xrightarrow{\text{包含}} \frac{M}{L^2 - M^2}tu(t)$$

$$\text{于是可以写出} \quad \begin{cases} i_2(0^+) - i_2(0^-) = 0 \\ i_2'(0^+) - i_2'(0^-) = \frac{M}{L^2 - M^2} \end{cases}$$

由上式及已知的起始条件可求得  $i_2(0^+) = 0$ ， $i_2'(0^+) = \frac{M}{L^2 - M^2}$ 。

(4) 利用初始条件求系数。

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 0 \\ \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = \frac{M}{L^2 - M^2} \end{cases}$$

$$\text{解得} \quad A_1 = \frac{M}{(L^2 - M^2)(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{1}{2R}, \quad A_2 = -\frac{M}{(L^2 - M^2)(\alpha_1 - \alpha_2)} = -\frac{1}{2R}$$

$$\text{响应为} \quad i_2(t) = \frac{1}{2R}(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t})u(t)$$

$$\text{对响应 } i_2(t) \text{ 求导得} \quad \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{1}{2} \left[ -\frac{e^{\alpha_1 t}}{L+M} + \frac{e^{\alpha_2 t}}{L-M} \right] u(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2} &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{L+M} + \frac{1}{L-M} \right] \delta(t) + \frac{1}{2} \left[ -\frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 t}}{L+M} + \frac{\alpha_2 e^{\alpha_2 t}}{L-M} \right] u(t) \\ &= \frac{M}{L^2 - M^2} \delta(t) + \frac{1}{2} \left[ -\frac{\alpha_1 e^{\alpha_1 t}}{L+M} + \frac{\alpha_2 e^{\alpha_2 t}}{L-M} \right] u(t)\end{aligned}$$

可以看出  $\frac{di_2(0^+)}{dt} = \frac{M}{L^2 - M^2}$

而  $\frac{di_2(0^-)}{dt} = 0$ ，即产生幅度为  $\frac{M}{L^2 - M^2}$  的跳变， $\frac{d^2 i_2(t)}{dt^2}$  中包含有  $\frac{M}{L^2 - M^2} \delta(t)$  项。

$i_2(t)$  及  $\frac{di_2(t)}{dt}$  的波形如图 4.3-4 所示。

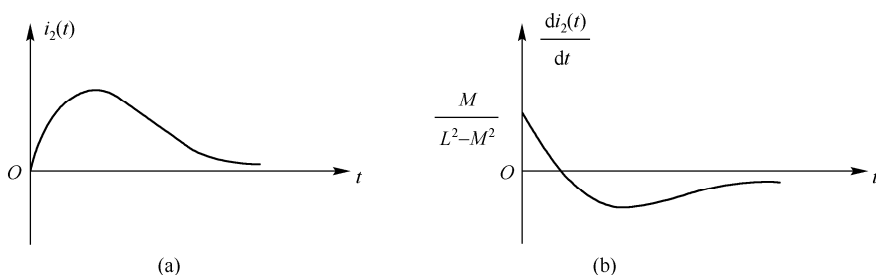


图 4.3-4 例 4.3-7 的波形

上例中，根据奇异函数平衡法由起始条件  $y^{(k)}(0^-)$  来求初始条件  $y^{(k)}(0^+)$ ，只经过了一次匹配（方程右端只有  $\delta(t)$  一项），较为简单。下面再举一较复杂的例子来说明平衡过程。

**例 4.3-8** 已知微分方程为  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4 \frac{dx(t)}{dt}$ ，激励信号  $x(t) = u(t)$ ，起始条件  $y(0^-) = 2$ ， $y'(0^-) = 3$ ，试确定初始条件  $y(0^+)$  及  $y'(0^+)$ 。

**解：**将  $x(t) = u(t)$  代入原方程，则微分方程成为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \delta'(t) + 4\delta(t)$$

匹配过程如下：

(1) 先匹配最高阶项。因为方程右端奇异函数的最高阶项是  $\delta'(t)$ ，所以，方程左端最高阶项  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$  中应包含  $\delta'(t)$ 。

(2) 最高阶项匹配好后对低阶项的影响。因为  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$  项中包含  $\delta'(t)$ ，这样， $\frac{dy(t)}{dt}$  中应包含  $\delta(t)$ ， $y(t)$  中应包含  $u(t)$ ，考虑到  $\frac{dy(t)}{dt}$  和  $y(t)$  项前面的系数，方程左端  $3 \frac{dy(t)}{dt}$  中应有  $3\delta(t)$ ，而  $2y(t)$  中应有  $2u(t)$ 。

(3) 匹配低阶项。方程左端有  $3\delta(t)$ ，而方程右端有  $4\delta(t)$ ，方程左右不平衡，那么，需要返回到最高阶项  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$  中进行补偿，也就是说， $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$  项中还应包含  $\delta(t)$ ，才能与方程右端的  $4\delta(t)$  相平衡。这样又导致了  $\frac{dy(t)}{dt}$  项中还应包含  $u(t)$ ，这样方程左边有  $5u(t)$ ，右边却



没有  $u(t)$ ，因此  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$  项中还存在  $-5u(t)$ 。

为清楚起见，我们用下述形式来概括整个匹配过程：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} \xrightarrow{\text{包含}} \delta'(t) + \delta(t) - 5u(t), \quad \frac{dy(t)}{dt} \xrightarrow{\text{包含}} \delta(t) + u(t), \quad y(t) \xrightarrow{\text{包含}} u(t)$$

这样由上述第二个式子可看出， $\frac{dy(t)}{dt}$  在  $t=0$  点有一个 1 的跳变量（注意  $\delta(t)$  不是跳变，它只是在  $t=0$  处的瞬时冲激）；由第三个式子看出， $y(t)$  在  $t=0$  点也有一个 1 的跳变量。即

$$\begin{cases} y'(0^+) - y'(0^-) = 1 \\ y(0^+) - y(0^-) = 1 \end{cases}$$

所以  $y'(0^+) = y'(0^-) + 1 = 4$ ， $y(0^+) = y(0^-) + 1 = 3$

由上两例可见，采用时域经典法求解系统微分方程时，求初始条件  $y^{(k)}(0^+)$  的过程有些麻烦。特别是，当阶次较高，且激励信号的奇异函数较复杂时，求初始条件非常困难。所以，在线性系统分析中，常采用其他分析方法以避开求  $y^{(k)}(0^+)$  这一步，具体方法将在后面加以讨论。

## 4.4 零输入响应与零状态响应

从 4.3 节的分析可知，系统的解可以分解为齐次解  $y_h(t)$  和特解  $y_p(t)$ 。由于齐次解的函数依赖于系统本身的特性，与激励函数的形式无关（虽然系数  $A_i$  与激励信号有关），所以齐次解也称为自由响应（natural response），而特解的形式是由激励函数决定的，所以  $y_p(t)$  也称为强迫响应（forced response）。

线性系统可以根据需要分解为其他的形式，以方便计算或适应不同的物理解释。其中分解为零输入响应和零状态响应是重要的一种。

### 1. 零输入响应与零状态响应

**零输入响应（zero-input response）：**没有外加激励信号的作用，只由起始状态（起始时刻系统的储能）所产生的响应。一般用  $y_{zi}(t)$  表示。

**零状态响应（zero-state response）：**不考虑起始时刻系统的储能的作用（起始状态为零），由系统的外加激励信号所产生的响应。一般用  $y_{zs}(t)$  表示。

由式(4.3-2)可知，系统的全响应为

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

当特征方程无重根时，其一般形式为

$$y(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t} + y_p(t)$$

对于  $y_{zi}(t)$ ，由于外部激励为零，则  $y_{zi}(t)$  中不包含  $y_p(t)$ ，所以  $y_{zi}(t)$  的形式与齐次解相同

$$y_{zi}(t) = \sum_{k=1}^n A_{zik} e^{\alpha_k t} \quad (4.4-1)$$

由于外部没有加激励, 所以系统的储能不会发生变化, 这样  $\mathbf{y}_{zi}^{(k)}(0^+) = \mathbf{y}_{zi}^{(k)}(0^-) = \mathbf{y}^{(k)}(0^-)$ , 也就是说, 可用起始状态  $\mathbf{y}^{(k)}(0^-)$  来确定  $y_{zi}(t)$  中的系数  $A_{zik}$ 。

对于  $y_{zs}(t)$ , 由于不考虑起始时刻系统的储能的作用, 即  $\mathbf{y}_{zs}^{(k)}(0^-) = 0$ , 这时  $y_{zs}(t)$  的形式为

$$y_{zs}(t) = \sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{\alpha_k t} + y_p(t) \quad (4.4-2)$$

虽然  $\mathbf{y}_{zs}^{(k)}(0^-) = 0$ , 但由于激励  $x(t)$  的加入, 系统的初始状态可能会产生跳变, 使得  $\mathbf{y}_{zs}^{(k)}(0^+) \neq 0$ , 因此, 求零状态响应  $y_{zs}(t)$  的系数  $A_{zsk}$  要用跳变量  $\mathbf{y}_{zs}^{(k)}(0^+) = \mathbf{y}^{(k)}(0^+) - \mathbf{y}^{(k)}(0^-)$  来确定。这样, 全响应可以写成

$$y(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zik} e^{\alpha_k t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n A_{zsk} e^{\alpha_k t}}_{\text{零状态响应}} + y_p(t) \quad (4.4-3)$$

或

$$y(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^n (A_{zik} + A_{zsk}) e^{\alpha_k t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{强迫响应}} \quad (4.4-4)$$

可以看出, 两种分解方法有着明显的区别, 虽然自由响应  $y_h(t)$  与零输入响应  $y_{zi}(t)$  都能满足齐次方程的解, 但  $A_k$  是由系统的初始条件  $\mathbf{y}^{(k)}(0^+)$  和外部激励  $x(t)$  共同决定的, 而  $A_{zik}$  仅仅由系统的起始储能  $\mathbf{y}^{(k)}(0^-)$  决定。在起始条件为零的条件下, 必然有  $y_{zi}(t) = 0$ , 但  $y_{zs}(t)$  不为零, 而且  $y_{zs}(t)$  中所包含的自由响应分量一般也不为零。也就是说, 自由响应也可以分解为两部分, 一部分由系统的起始储能产生, 另一部分由激励信号产生。当系统的起始状态为零, 且前一部分为零时, 后一部分仍可存在。

**例 4.4-1** 系统的微分方程为  $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 3u(t)$ ,  $y(0^-) = 3/2$ , 求自由响应、强迫响应、零输入响应、零状态响应和全响应。

**解:** (1) 求齐次解。由特征方程可方便地得到特征根为  $\alpha = -3$ , 所以  $y_h(t) = Ae^{-3t}$ 。  
而  $y_p(t) = 1$ , 所以全响应为

$$y(t) = Ae^{-3t} + 1 \quad t \geq 0$$

由微分方程两端奇异函数平衡条件可以判断,  $y(t)$  在起始点无跳变,  $y(0^+) = y(0^-) = 3/2$ 。利用  $y(0^+)$  可求出系数  $A = 1/2$ , 所以

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-3t} + 1 \quad t \geq 0$$

$$y_h(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}, \quad y_p(t) = 1$$

(2) 求零输入响应。这时  $y_{zi}(t) = A_{zi}e^{-3t}$ , 借助  $y(0^-) = 3/2$  可得  $A_{zi} = 3/2$ , 于是有

$$y_{zi}(t) = \frac{3}{2}e^{-3t} \quad t \geq 0$$

(3) 求零状态响应。其形式为

$$y_{zs}(t) = A_{zs}e^{-3t} + 1$$

这时令  $y_{zs}(0^+) = 0$  (起始点无跳变), 将其代入到  $y_{zs}(t)$  中, 可得  $A_{zs} = -1$ , 所以

$$y_{zs}(t) = -e^{-3t} + 1 \quad t \geq 0$$

这样, 全响应可分解为

$$y(t) = \underbrace{\frac{3}{2}e^{-3t}}_{\text{自由响应}} - \underbrace{e^{-3t}}_{\text{强迫响应}} + \underbrace{1}_{\text{零状态响应}} \quad t \geq 0$$

零输入响应

## 2. 零输入线性与零状态线性

在 4.2 节中曾指出, 线性时不变系统一定满足均匀性与叠加性及微积分特性。但这种线性时不变特性是在一定条件下满足的。下面举例说明。

若系统的微分方程为  $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

当起始状态  $y(0^-) = 2$  时, 则系统对激励  $x_1(t) = e^{-t}$  的全响应为

$$y_1(t) = e^{-2t} + e^{-t}$$

若把激励信号乘以 5, 即  $x_2(t) = 5e^{-t}$ , 则可以求得全响应为

$$y_2(t) = -3e^{-2t} + 5e^{-t}$$

很明显,  $y_2(t) \neq 5y_1(t)$ , 不符合均匀性的要求, 但不能据此说明该系统是一个非线性系统。产生这一现象的原因在于, 虽然系统的激励被放大, 但是系统的起始储能  $y(0^-)$  没有随着外部激励而变化, 所以导致了系统的全响应不满足线性特性。

将系统的全响应分解为零输入响应和零状态响应来分别计算, 根据微分方程和起始状态很容易获得在  $x_1(t) = e^{-t}$  及  $y(0^-) = 2$  的条件下, 系统的全响应为

$$y_1(t) = \underbrace{2e^{-2t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{(-e^{-2t} + e^{-t})}_{\text{零状态响应}}$$

而在  $x_2(t) = 5e^{-t}$  和  $y(0^-) = 2$  的条件下, 全响应为

$$y_2(t) = \underbrace{2e^{-2t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{5(-e^{-2t} + e^{-t})}_{\text{零状态响应}}$$

比较  $y_1(t)$  和  $y_2(t)$  可见, 零状态响应满足线性系统的特性。

若把  $y(0^-)$  也按照同样的比例放大, 得  $y(0^-) = 10$ , 则在  $x_2(t) = 5e^{-t}$  激励下, 全响应为

$$y_3(t) = \underbrace{10e^{-2t}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{5(-e^{-2t} + e^{-t})}_{\text{零状态响应}}$$

可见, 这时  $y_3(t)$  与  $y_1(t)$  满足线性系统的均匀性, 但是这是以改变系统的起始储能为条件的。上面的例子说明常系数线性微分方程描述的系统在下面几点上是线性的。

- (1) 响应的可分解性: 系统响应可分解为零输入响应和零状态响应。
- (2) 零状态响应线性: 系统的零状态响应与各激励信号成线性关系。
- (3) 零输入响应线性: 系统的零输入响应与各起始状态成线性关系。

上面已讨论了将响应分解为零输入响应和零状态响应的方法及求解方法, 讨论了线性特性。从讨论中可看出, 求零输入响应比较简单, 而求零状态响应比较复杂。为了简化零状态响应的求解方法, 可采用卷积积分法, 具体内容详见 4.6 节。

## 4.5 冲激响应与阶跃响应

以单位冲激信号  $\delta(t)$  作为激励, 系统产生的零状态响应称为单位冲激响应 (impulse response), 或简称冲激响应, 用  $h(t)$  表示。

以单位阶跃信号  $u(t)$  作为激励, 系统产生的零状态响应称为单位阶跃响应 (step response), 或简称阶跃响应, 用  $g(t)$  表示。

前面介绍过, 任意信号可以分解为阶跃信号或冲激信号的组合, 这样可以借助于冲激响应或阶跃响应来分析系统的零状态响应 (下节将介绍这方面的内容)。另一方面,  $h(t)$  还与后面将要介绍的系统函数及系统的稳定性等系统的许多特性有关。所以  $h(t)$  和  $g(t)$  是系统的两个重要响应。

### 1. 冲激响应的求解

若系统的微分方程为

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

在  $x(t) = \delta(t)$  时求得的零状态响应即为  $h(t)$ 。把  $x(t) = \delta(t)$  代入微分方程, 则在方程的右端将出现  $\delta(t)$  及其各阶导数, 为保证方程两端奇异函数平衡, 则  $h(t)$  中是否包含有  $\delta(t)$  及  $\delta(t)$  的各阶导数将和  $n$  与  $m$  的相对大小有关。在  $n > m$  的情况下, 方程右端最高阶次为  $\frac{d^m \delta(t)}{dt^m}$ , 为

与之相匹配,  $\frac{d^n h(t)}{dt^n}$  中应包含有  $\frac{d^m \delta(t)}{dt^m}$ , 则  $\frac{d^{n-1} h(t)}{dt^{n-1}}$  中应包含有  $\frac{d^{m-1} \delta(t)}{dt^{m-1}}$ ; 以此类推,  $\frac{d^{n-m} h(t)}{dt^{n-m}}$

中将包含有  $\delta(t)$ , 而  $\frac{d^{n-m-1} h(t)}{dt^{n-m-1}}, \dots, \frac{dh(t)}{dt}, h(t)$  中将不包含  $\delta(t)$  函数。在  $n = m$  的情况下,  $h(t)$  中将包含  $\delta(t)$  信号; 而当  $n < m$  时,  $h(t)$  中除含有  $\delta(t)$  外, 还将有  $\delta(t)$  的导数。今后我们可以看到, 为保证系统稳定, 有  $n \geq m$  的要求。这里仅讨论  $n > m$  的情况。

由定义可知,  $\delta(t)$  及其各阶导数在  $t > 0$  时都为零, 于是  $h(t)$  的形式应与齐次解的形式相同, 不包含特解。若系统的特征方程共有  $n$  个非重根, 则

$$h(t) = \left( \sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t} \right) u(t) \quad (4.5-1)$$

这说明  $\delta(t)$  的加入, 在  $t=0$  时刻引起了系统储能的变化, 而在  $t > 0$  以后, 外部激励将不存在, 这样只有冲激信号引起的系统储能起作用, 所以  $h(t)$  必然与齐次解形式相同。

剩下的问题是确定系数  $A_k$ 。由于系统的起始状态为零, 即  $h(0^-) = h'(0^-) = \dots = h^{(n-1)}(0^-) = 0$ , 这样可以利用在 4.3 节中介绍的奇异函数平衡法来求出初始条件  $h(0^+)$ ,  $h'(0^+)$ ,  $\dots$ ,  $h^{(n-1)}(0^+)$ , 从而代入式(4.5-1)来确定系数  $A_k$ 。但这种方法求解过程比较麻烦, 容易引起错误。这里, 再介绍一种确定  $A_k$  的方法, 即将  $h(t)$  的表达式(4.5-1)及  $h(t)$  的各阶导数代入微分方程, 使方程两端奇异函数的系数相匹配, 从而求出  $A_k$ 。下面将举例说明。

**例 4.5-1** 系统的微分方程为  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$ , 求冲激响应。

解：将  $x(t) = \delta(t)$  代入微分方程的右端，同时将左端的  $y(t)$  换成  $h(t)$ ，则微分方程变为

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} + 3 \frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = 2 \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t)$$

求得其特征根为  $\alpha_1 = -1$ ,  $\alpha_2 = -2$ 。于是有

$$h(t) = (A_1 e^{-t} + A_2 e^{-2t})u(t)$$

对  $h(t)$  逐次求导得到  $\frac{dh(t)}{dt} = (A_1 + A_2)\delta(t) - (A_1 e^{-t} + 2A_2 e^{-2t})u(t)$

$$\frac{d^2 h(t)}{dt^2} = (A_1 + A_2)\delta'(t) - (A_1 + 2A_2)\delta(t) + (A_1 e^{-t} + 4A_2 e^{-2t})u(t)$$

将  $h(t)$ ,  $\frac{dh(t)}{dt}$ ,  $\frac{d^2 h(t)}{dt^2}$  代入微分方程，得

$$(A_1 + A_2)\delta'(t) + (2A_1 + A_2)\delta(t) = 2\delta'(t) + \delta(t)$$

再利用奇异函数平衡的原则，令左右两端对应的奇异函数项系数相等，可以得到

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ 2A_1 + A_2 = 1 \end{cases}$$

解得  $A_1 = -1$ ,  $A_2 = 3$ 。于是，冲激响应为

$$h(t) = (3e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

这里采用了将  $h(t)$  直接代入微分方程的方法来求系数，避免了求  $h(0^+)$ ,  $h'(0^+)$ , ... 等初始条件的问题。

## 2. 阶跃响应的求解

阶跃响应  $g(t)$  的形式与微分方程两端的阶次有关，在  $n \geq m$  的情况下， $g(t)$  中将不包含冲激函数。而且  $g(t)$  是由自由响应和强迫响应构成的。当特征方程有  $n$  个非重根时， $g(t)$  的形式为

$$g(t) = \left( \sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t} + B \right) u(t) \quad (4.5-2)$$

其中  $B$  为常数，可用待定系数法求特解的方法确定。而  $A_k$  可以用代入微分方程然后用奇异函数平衡的方法确定，与求  $h(t)$  的方法类似。这里就不详细举例介绍了。

根据线性时不变系统的特性， $h(t)$  与  $g(t)$  之间有一定的依从关系。由于  $\delta(t)$  是  $u(t)$  的微分，而  $u(t)$  是  $\delta(t)$  的积分，所以  $h(t)$  和  $g(t)$  也满足微积分关系，即有

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} \quad (4.5-3)$$

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (4.5-4)$$

那么知道了  $h(t)$  和  $g(t)$  中的任一个，另一个就可以方便地求得。

## 4.6 系统的卷积积分分析

从以上的分析可以看出，用经典法求零状态响应比较复杂，特别是当激励函数较复杂和

系统的阶次较高时, 求解将十分困难。而求  $h(t)$  则相对容易。因此, 可以利用信号的分解原理, 将信号分解为冲激信号的组合, 然后将这些冲激信号分别通过线性系统, 得到各个冲激信号所对应的冲激响应, 再利用线性时不变系统的线性特性和时不变特性, 将各冲激响应叠加, 就得到零状态响应。这就是系统的卷积积分分析的基本原理。

卷积积分是分析线性时不变系统的一个重要工具, 随着信号与系统理论研究的深入, 以及计算机技术的发展, 卷积积分得到了更为广泛的应用。

在 2.4 节中, 我们已经介绍了卷积积分的定义、计算方法和性质, 本节将介绍卷积积分的物理含义以及在线性时不变系统中的应用。

## 1. 卷积积分的物理含义

设线性时不变系统的激励为  $x(t)$ , 冲激响应为  $h(t)$ , 根据式(2.5-9)和式(2.5-8), 信号  $x(t)$  可以分解为  $\delta(t)$  的线性组合, 即

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)\delta(t-k\Delta t)\Delta t$$

因为对于  $\delta(t)$  的零状态响应为  $h(t)$ , 根据时不变特性, 对于  $\delta(t-\Delta t)$  的零状态响应则为  $h(t-\Delta t)$ ; 又根据齐次性, 对于  $x(k\Delta t)\delta(t-\Delta t)\Delta t$  的零状态响应为  $x(k\Delta t)h(t-\Delta t)\Delta t$ ; 最后, 根据叠加性, 对于激励  $x(t)$  的零状态响应则为

$$y_{zs}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t)h(t-k\Delta t)\Delta t$$

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 可将  $\Delta t$  写成  $d\tau$ , 而  $k\Delta t$  可写成  $\tau$ , 同时对各项求和将转化成求积分, 即

$$y_{zs}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad (4.6-1)$$

即系统的零状态响应恰为  $x(t)$  与  $h(t)$  的卷积积分。如果  $x(t)$  与  $h(t)$  均为因果信号, 即当  $t < 0$  时,  $x(t) = 0$ ,  $h(t) = 0$ , 式(4.6-1)可改写为 (零状态响应的下标省略)

$$y(t) = \int_0^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t) \quad (4.6-2)$$

可见, 若  $x(t)$  和  $h(t)$  的定义域不同, 则积分限将有所变化。

这表明卷积积分的物理含义就是将激励信号分解为一系列冲激信号的组合, 然后让这些冲激信号依次通过系统, 得到一系列的冲激响应, 再将这些冲激响应叠加起来, 从而得到系统的零状态响应。

利用卷积求零状态响应, 再与零输入响应相加即得到全响应, 表达式如下

$$y(t) = \sum_{k=1}^n A_{zik} e^{\alpha_k t} + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (4.6-3)$$

式中, 第一项为零输入响应[引用式(4.4-1)],  $\alpha_k$  为特征根, 共  $n$  个且无重根, 系数  $A_{zik}$  由系统的起始状态  $y^{(k)}(0^-)$  决定; 而第二项是卷积积分, 即系统的零状态响应。

## 2. 卷积积分在线性时不变系统中的应用

在 2.4 节中介绍了卷积积分的代数性质, 即交换律、分配律和结合律, 利用这些代数性质来分析线性时不变系统, 可以得到以下各种重要的结论。

### (1) 交换律

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

此定律的物理意义是：线性时不变系统的激励信号与系统冲激响应之间有互易性，即把激励信号  $x(t)$  作为系统的冲激响应  $h(t)$ ，而将  $h(t)$  当做系统的激励  $x(t)$ ，所得响应不变。

### (2) 分配律

$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

此定律的物理意义是：系统对几个相加信号的零状态响应等于几个信号分别通过系统的零状态响应之和。

从分配律还可以得到如下结论：若将两个冲激响应分别为  $h_1(t)$  和  $h_2(t)$  的子系统并联，则并联系统总的冲激响应为

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

如图 4.6-1 所示。

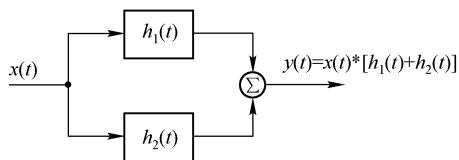


图 4.6-1 并联系统的冲激响应

### (3) 结合律

$$[f_1(t) * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2(t) * f_3(t)]$$

从结合律可以得到如下结论：若将两个冲激响应分别为  $h_1(t)$  和  $h_2(t)$  的子系统串联，则串联系统总的冲激响应为

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

如图 4.6-2 所示。

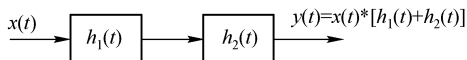


图 4.6-2 串联系统的冲激响应

## 4.7 用 MATLAB 对连续时间系统的时域分析

在连续时间系统的时域分析中，主要讨论线性时不变连续系统，简称 LTI 连续系统。描述 LTI 连续系统的数学模型是线性常系数微分方程。其一般形式为

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

其中方程右边多项式系数构成行向量  $\mathbf{b} = [b_m, b_{m-1}, \dots, b_0]$ ，方程左边多项式系数构成行向量  $\mathbf{a} = [a_n, a_{n-1}, \dots, a_0]$ ，通过调用 MATLAB 函数  $tf(\mathbf{b}, \mathbf{a})$  得到系统函数。如果已知系统的系统函数，就可以用函数  $lsim$  来分析系统的时域响应。

**例 4.7-1** 已知某连续系统的微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

当系统的输入信号为  $x(t) = e^{-t}u(t)$  时，绘制系统的响应和输入信号的波形。

**解：**该问题的程序非常简单，其程序 `exec401` 清单如下，波形如图 4.7-1 所示。

```
a=[1 2 2];b=[1 3];
sys=tf(b,a);           %定义系统的系统函数
t=0:0.01:6;           %定义采样间隔和时间范围
f=exp(-t);lsim(sys,f,t); %对系统输出进行仿真
gtext('系统激励');gtext('系统响应'); %用鼠标添加文本注释
```

**例 4.7-2** 已知某连续系统的微分方程为

$$\frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 3 \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

绘制系统的冲激响应和阶跃响应的波形。

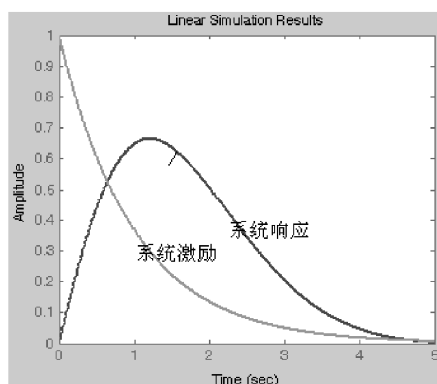


图 4.7-1 连续系统的响应仿真

**解：**该问题的程序也比较简单，其程序 `exec402` 清单如下，波形如图 4.7-2 所示。

```
%exec402 连续系统冲激响应和阶跃响应波形
a=[1 2 2 1];b=[3 2];sys=tf(b,a);
subplot(1,2,1);impz(b,a,8); %调用冲激函数，显示 0~8 秒波形
subplot(1,2,2);step(b,a,10); %调用阶跃函数，显示 0~10 秒波形
```

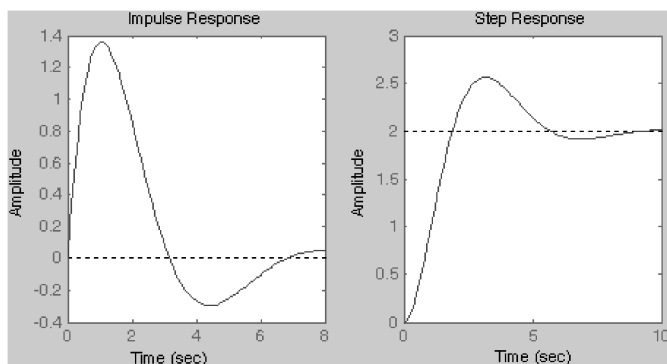


图 4.7-2 连续系统的冲激响应和阶跃响应



**例 4.7-3** 已知信号  $f_1(t) = u(t-1) - u(t-4)$  和  $f_2(t) = 0.5t[u(t) - u(t-2)]$ ，用 MATLAB 计算卷积积分  $s(t) = f_1(t) * f_2(t)$ ，并绘制  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$  和  $s(t)$  的时域波形。

**解：**用卷积可以计算系统的零状态响应，MATLAB 中没有直接计算连续信号卷积的函数。实际是将连续信号  $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$  以等间隔采样后得到的离散序列的卷积和（有关离散序列及卷积和将在第 7 章讲解），我们再利用专用函数 `conv` 来实现连续信号卷积的计算。有关程序 `exec403` 清单如下，时域波形如图 4.7-3 所示。

```

k1=0:0.01:5;k2=-1:0.01:3;p=0.01;           %采样时间间隔 p=0.01
f1=Heaviside(k1-1)-Heaviside(k1-4);          %定义 f1(t)信号
f2=0.5*k2.*[Heaviside(k2)-Heaviside(k2-2)]; %定义 f2(t)信号
f=conv(f1,f2); f=f*p;                         %计算序列 1 与序列 2 的卷积和
k0=k1(1)+k2(1);                               %计算序列 f 非零样值的起点位置
k3=length(f1)+length(f2)-2;                  %计算卷积和 f 的非零样值宽度
k=k0:p:k0+k3*p; subplot(2,2,1);              %确定卷积和 f 的非零样值时间向量
plot(k1,f1);axis([0,5,-0.2,1.2]);             %在子图 1 绘制 f1(t)时域波形图
title('f1(t)');
subplot(2,2,2);plot(k2,f2);                   %在子图 2 绘制 f2(t)时域波形图
title('f2(t)');axis([-1,3,-0.2,1.2]);
subplot(2,2,3);plot(k,f);                     %画卷积 f(t)的时域波形
h=get(gca,'position');h(3)=2.4*h(3);
set(gca,'position',h);                        %第三子图的横坐标范围扩为原来的 2.4 倍
title('f(t)=f1(t)*f2(t)');axis([0,7,-0.2,1.2]);

```

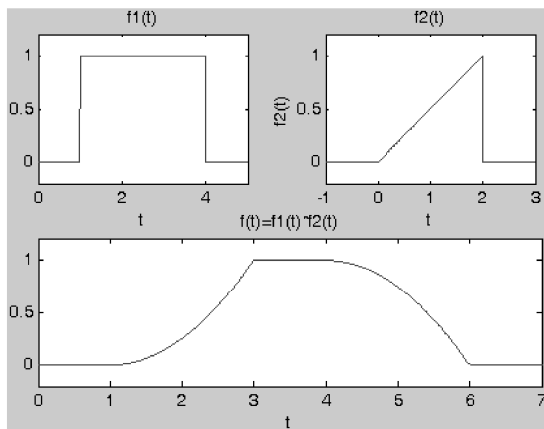


图 4.7-3 连续信号卷积的时域波形

## 习 题

4-1 判断下列系统是线性的还是非线性的，是时不变的还是时变的。

(1)  $y(t) = 4x(3t) + 2$       (2)  $y(t) = |x(t)|$       (3)  $y(t) = e^{-t}x(t)$       (4)  $y(t) = \int_{t-1}^t x(\tau) d\tau$

4-2 有一线性时不变系统，当激励  $x_1(t) = tu(t)$  时，其响应为  $y_1(t) = e^{-2t}u(t)$ ，当激励  $x_1(t) = \delta(t)$  时，试求其响应  $y_2(t)$  的表达式，并画出  $y_2(t)$  的波形（假设起始时刻系统无储能）。

4-3 有一线性时不变系统，当激励  $x_1(t) = u(t)$  时，其响应为  $y_1(t) = (1 - e^{-t})u(t)$ 。试求当激励为图题 4-3 所示的  $x_2(t)$  时的响应  $y_2(t)$  的表达式（假设起始时刻系统无储能）。

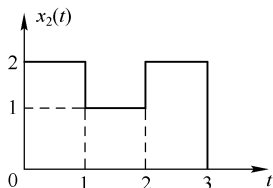


图 题 4-3

4-4 对图题 4-4(a)和(b)所示的电路分别列写电流  $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$  和电压  $v_o(t)$  的微分方程式。

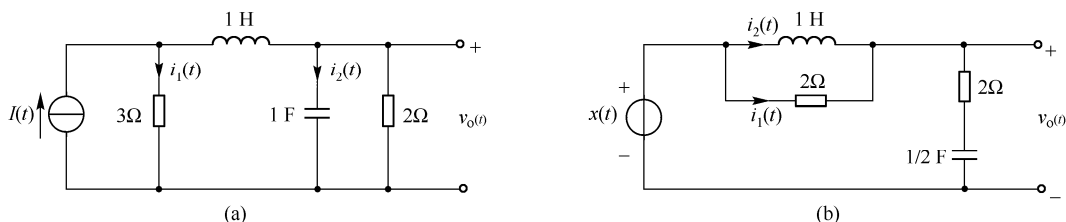


图 题 4-4

4-5 给定系统微分方程、起始状态及激励信号分别如下，试判断系统在起始点是否发生跳变，并求出  $y^{(k)}(0^+)$  的值。

(1)  $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 3\frac{dx(t)}{dt}$        $y(0^-) = 0$ ,  $x(t) = u(t)$

(2)  $2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$        $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = 1$ ,  $x(t) = u(t)$

\*\* (3)  $2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$        $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = 1$ ,  $x(t) = \delta(t)$

4-6 已知系统的微分方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} - 2\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

激励信号为  $x(t) = u(t)$ ，初始条件为  $y(0^+) = -4$ ,  $y'(0^+) = 6$ ，求起始条件  $y(0^-)$  和  $y'(0^-)$ 。

4-7 已知系统的微分方程为  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$

若激励信号与起始状态为以下二种情况时，分别求全响应。并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应和强迫响应各分量（应注意在起始点是否发生跳变）。

(1)  $x(t) = u(t)$ ,  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = 2$

(2)  $x(t) = e^{-3t}u(t)$ ,  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = 2$

\*\*4-8 电路如图题 4-8 所示。 $t=0$  以前开关 S 位于“1”，电路已进入稳态。 $t=0$  时刻，开关由“1”转至“2”。求输出电流  $i(t)$  的全响应，并指出其零输入响应、零状态响应、自由响应和强迫响应各分量。

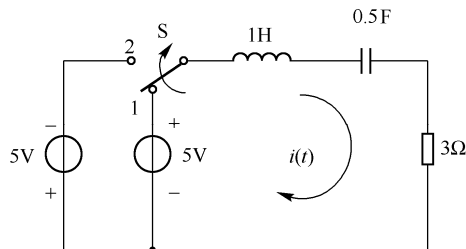


图 题 4-8

4-9 一线性时不变系统在相同的起始状态下，当输入为  $x(t)$  时，全响应为  $(2e^{-t} + \cos 2t)u(t)$ ；当输入为  $2x(t)$  时，全响应为  $(e^{-t} + 2\cos 2t)u(t)$ ，求输入为  $4x(t)$  时的全响应。

4-10 系统的微分方程由下列各式描述，分别求系统的冲激响应与阶跃响应。

(1)  $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

(2)  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$

\*\* (3)  $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$

\*\*4-11 某因果线性时不变系统，其输入、输出之间用下列微分积分方程表示

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)f(t-\tau)d\tau - x(t)$$

其中， $f(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t)$ ，求该系统的冲激响应  $h(t)$ 。

4-12 电路如图题 4-12 所示，其中， $L = \frac{1}{5}H$ ， $C = 1F$ ， $R = \frac{1}{2}\Omega$ ，

输出为电流  $i_L(t)$ ，试求冲激响应。

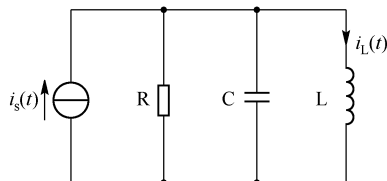


图 题 4-12

\*\*4-13 一线性时不变系统，当输入为  $x(t) = e^{-t}u(t)$  时，零状态

响应为  $y_{zs}(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$ ，求系统的冲激响应  $h(t)$ 。

\*\*4-14 设线性时不变系统的起始状态为零，输入  $x(t)$  和零状态响应  $y_{zs}(t)$  分别如图题 4-14(a)和(b)所示。

(1) 画出系统冲激响应的波形；

(2) 当输入分别为图题 4-14(c), (d)和(e)所示各信号时，画出各输出信号的波形。

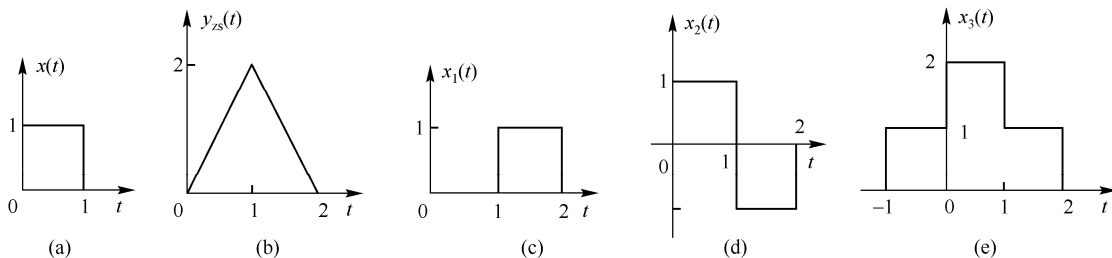


图 题 4-14

\*\*4-15 一线性时不变系统，当激励信号为  $x_1(t) = \delta(t)$  时，全响应为  $y_1(t) = \delta(t) + e^{-t}u(t)$ ；当激励信号为  $x_2(t) = u(t)$  时，全响应为  $y_2(t) = 3e^{-t}u(t)$ 。求系统的冲激响应  $h(t)$ （两种激励下，起始状态相同）。

\*\*4-16 一线性时不变系统对激励信号  $x(t) = \sin t \cdot u(t)$  的零状态响应  $y_{zs}(t)$  如图题 4-16 所示，求系统的冲激响应  $h(t)$ ，并画出  $h(t)$  的波形。

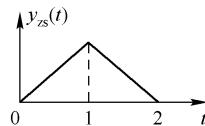


图 题 4-16

4-17 图题 4-17 所示系统是由几个子系统组合而成的，各子系统的冲激响应分别为  $h_D(t) = \delta(t-1)$ ， $h_G(t) = u(t) - u(t-3)$ ，试求总系统的冲激响应  $h(t)$ ，并画出  $h(t)$  的波形。

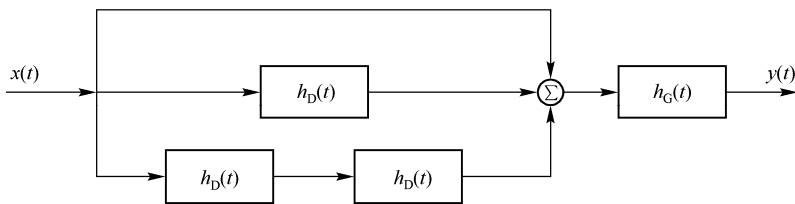


图 题 4-17

以下为 MATLAB 习题

4-18 已知某连续系统的微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

当系统的输入信号为  $x(t) = e^{-0.5t}u(t)$  时，绘制系统的零状态响应和输入信号的波形。

4-19 已知某连续系统的微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - 3x(t)$$

绘制系统的冲激响应和阶跃响应的波形。

4-20 已知信号  $x_1(t) = u(t) - 2u(t-3)$  和  $x_2(t) = t[u(t-1) - u(t-4)]$ ，用 MATLAB 计算卷积积分  $s(t) = x_1(t) * x_2(t)$ ，并绘制  $x_1(t)$ ， $x_2(t)$  和  $s(t)$  的时域波形。

## 第5章 连续时间系统的变换域分析

上一章研究了线性时不变系统的时域特性，通过系统的微分方程可以计算系统的时域响应。时域分析法的优点是直观，物理意义明确。但它也存在明显的不足：其一是系统的时域响应无法直接同原系统的结构和参数关联；其二是系统的结构和参数的微小变化，都将导致时域分析的从头再来，而系统的变换域分析正好弥补上述不足。

系统的变换域分析主要包括频域分析和  $s$  域分析。通过系统的变换域分析，可以看到系统的结构与参数的变化对系统性能的影响。本章将引入系统函数、系统频响特性的概念，从而可以更加全面地研究系统的时域、频域和  $s$  域特性。通过本章的学习，将对系统分析的问题有更深入的理解，也为今后学习系统综合、设计打下基础。

### 5.1 系统响应的拉氏变换求解

拉氏变换是分析线性时不变系统强有力的工具。利用拉氏变换求系统响应是其重要的应用之一。用拉氏变换分析法可以同时求出系统的零输入响应、零状态响应和全响应。

#### 5.1.1 微分方程的拉氏变换求解

利用拉氏变换求系统响应，需首先将描述系统输入-输出关系的微分方程进行拉氏变换，得到一个代数方程，求出其解（复频域解）后，经拉氏逆变换即可得到时域解。在求解过程中自动包含了系统起始状态的作用。利用这种方法，可以很方便地求出系统的零输入响应与零状态响应。由拉氏变换将微分方程转化为代数方程的求解过程的原理如图 5.1-1 所示。

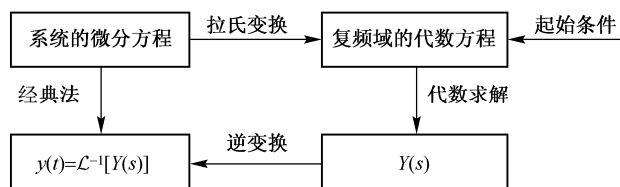


图 5.1-1 用拉氏变换求解微分方程的过程

下面将举例来说明这种方法的求解过程。

**例 5.1-1** 已知系统的微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 6 \frac{dy(t)}{dt} + 8y(t) = 2 \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

激励信号为  $x(t) = e^{-t}u(t)$ ，起始状态为  $y(0^-) = 1$ ， $y'(0^-) = 2$ ，求系统的零输入响应  $y_{zi}(t)$ 、零状态响应  $y_{zs}(t)$  和全响应  $y(t)$ 。

**解：**对微分方程两边取拉氏变换，可得

$$s^2 Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 6[sY(s) - y(0^-)] + 8Y(s) = (2s + 5)X(s)$$

$$Y(s) = \frac{2s+5}{s^2+6s+8} X(s) + \frac{(s+6)y(0^-) + y'(0^-)}{s^2+6s+8} = Y_{zs}(s) + Y_{zi}(s)$$

将  $X(s) = \mathcal{L}[e^{-t}u(t)] = \frac{1}{s+1}$ ,  $y(0^-) = 1$ ,  $y'(0^-) = 2$  代入上式, 可得

$$\begin{aligned} Y_{zs}(s) &= \frac{2s+5}{s^2+6s+8} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{2s+5}{(s+1)(s+2)(s+4)} \\ &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2(s+2)} - \frac{1}{2(s+4)} \end{aligned}$$

故零状态响应为

$$y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{zs}(s)] = \left( e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-4t} \right) u(t)$$

而

$$Y_{zi}(s) = \frac{s+8}{s^2+6s+8} = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+4}$$

故零输入响应为

$$y_{zi}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{zi}(s)] = (3e^{-2t} - 2e^{-4t})u(t)$$

这样全响应为

$$y(t) = y_{zs}(t) + y_{zi}(t) = \left( e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{2}e^{-4t} \right) u(t)$$

**例 5.1-2** 图 5.1-2 所示电路, 已知:  $E=1\text{V}$ ,  $L=1\text{H}$ ,  $R=2\Omega$ 。当  $t < 0$  时, 开关 S 位于 “1” 端, 电路的状态已稳定; 当  $t = 0$  时, S 从 “1” 端打到 “2” 端, 分别求  $v_R(t)$  与  $v_L(t)$ 。

**解:** (1) 首先求  $v_R(t)$ 。

① 列写微分方程  $\frac{L}{R} \frac{dv_R(t)}{dt} + v_R(t) = Eu(t)$

$$\frac{dv_R(t)}{dt} + 2v_R(t) = 2u(t)$$

由于  $t = 0^-$  时, 回路电流  $i(0^-) = -E/R$ , 从  $0^-$  到  $0^+$  回路电流没有变化, 则电阻电压没有变化。

即  $v_R(0^-) = v_R(0^+) = -E = -1$ 。

② 取拉氏变换:

$$[sV_R(s) - v_R(0^-)] + 2V_R(s) = 2/s$$

$$V_R(s) = \frac{2/s + v_R(0^-)}{s+2} = \frac{2-s}{s(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+2}$$

③ 求  $V_R(s)$  的逆变换:

$$v_R(t) = (1 - 2e^{-2t}) \quad t \geq 0$$

$v_R(t)$  的波形如图 5.1-3(a) 所示。

(2) 再求  $v_L(t)$ 。请注意, 这里遇到  $v_L(t)$  从  $0^-$  到  $0^+$  发生跳变的情况。将采用  $0^-$  系统与  $0^+$  系统两种方法来求解  $v_L(t)$ , 通过两种方法的比较说明选用  $0^-$  系统的好处。

① 列写微分方程

$$\frac{R}{L} \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau + v_L(t) = v_1(t)$$

$$2 \int_{-\infty}^t v_L(\tau) d\tau + v_L(t) = v_1(t)$$

对上式两边求导得

$$\frac{dv_L(t)}{dt} + 2v_L(t) = \frac{dv_1(t)}{dt}$$

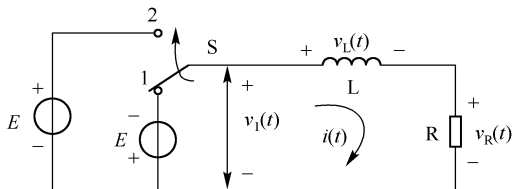


图 5.1-2 例 5.1-2 的电路

式中,  $v_1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$ , 波形如图 5.1-3(c)所示。

初始条件为  $v_L(0^-) = 0$ ,  $v_L(0^+) = 2E = 2$ 。

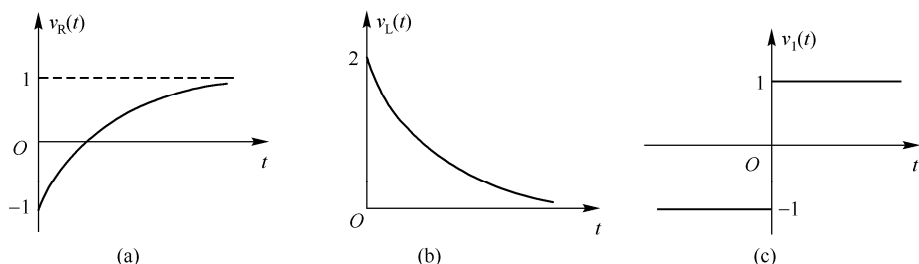


图 5.1-3 例 5.1-2 的波形

② 若采用  $0^-$  系统分析, 这时有

$$\frac{dv_1(t)}{dt} = 2\delta(t)$$

$$sV_L(s) - v_L(0^-) + 2V_L(s) = 2$$

由于  $v_L(0^-) = 0$ , 所以  $V_L(s) = \frac{2}{s+2}$ 。则  $v_L(t) = 2e^{-2t}u(t)$ , 波形如图 5.1-3(b)所示。

③ 若采用  $0^+$  系统分析, 对  $v_L(t)$  求导应从  $0^+$  计算, 于是有  $\frac{dv_1(t)}{dt} = 0$ 。相应地, 初始条件也应用  $v_L(0^+)$  代入, 这样有

$$sV_L(s) - v_L(0^+) + 2V_L(s) = 0$$

即

$$sV_L(s) + 2V_L(s) = 2$$

这时可得到相同的结果。由于在一般电路分析中,  $0^-$  条件往往给定(或容易求出), 选用  $0^-$  系统就可避免计算  $0^+$  条件; 对于较复杂的电路, 求  $0^+$  条件比较困难, 因此用  $0^-$  条件将使分析过程简化。以后都采用  $0^-$  系统来分析。

**例 5.1-3** 已知激励信号  $x(t)$  为矩形脉冲, 如图 5.1-4(a)所示, 系统为 RC 电路, 电容起始电压等于零, 求响应  $v_C(t)$ 。

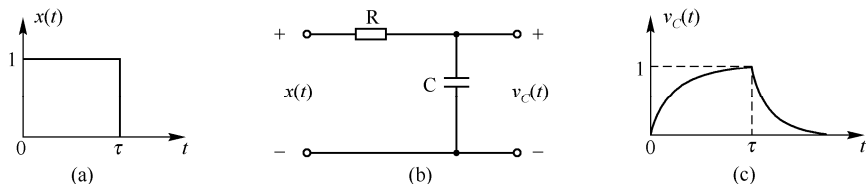


图 5.1-4 例 5.1-3 的电路及波形

**解:** (1) 写出  $x(t)$  的表达式, 并求它的拉氏变换。

$$x(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

于是容易求得

$$\mathcal{L}[x(t)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s\tau}$$

(2) 列写电路的微分方程, 有

$$RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = x(t)$$

(3) 取拉氏变换

$$RCsV_C(s) + V_C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s\tau}$$

$$V_C(s) = \frac{1}{RC} \frac{1 - e^{-s\tau}}{s\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}\right)(1 - e^{-s\tau})$$

(4) 求  $V_C(s)$  之逆变换。注意, 由延时特性可知, 含有因子  $e^{-s\tau}$  的各项, 其逆变换应在  $t > \tau$  时存在, 所以

$$v_C(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t) - (1 - e^{-\frac{t-\tau}{RC}})u(t - \tau)$$

最后, 画出  $v_C(t)$  的波形, 如图 5.1-4(c) 所示。

**例 5.1-4** 如图 5.1-5 所示电路, 起始状态为 0,  $t = 0$  时开关 S 闭合, 接入直流电源  $E$ , 求电流  $i(t)$ 。

**解:** (1) 根据电路可以得到如下微分方程

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau = Eu(t)$$

$$i(0^-) = 0, \quad \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \Big|_{t=0^-} = 0$$

(2) 对微分方程求拉氏变换

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = \frac{E}{s}$$

$$I(s) = \frac{E}{s\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)} = \frac{E}{s^2 + 2s + 2} = \frac{E}{(s+1)^2 + 1}$$

(3) 求拉氏逆变换  $i(t) = Ee^{-t} \sin t \cdot u(t)$

电流  $i(t)$  的时域波形如图 5.1-6 所示。

通过以上几个实例的研究容易看出, 在求解常系数线性微分方程方面, 拉氏变换优于经典法。

## 5.1.2 s 域的元素模型

以列写微分方程取拉氏变换的方法分析电路, 虽然具有许多优点, 但是, 对于比较复杂的电路 (回路或节点较多), 列写微分方程就较困难。实际上, 在分析具体网络时, 可不必列出微分方程, 根据原电路图就能画出其  $s$  域模型, 从而可根据基尔霍夫定律直接列出其像函数方程 (代数方程), 并进一步解出网络的像函数。为此, 我们来讨论基尔霍夫定律在  $s$  域的形式, 以及网络元件的  $s$  域模型。

基尔霍夫电流定律 (KCL) 所表明的是: 对任意节点, 在同一时刻流入 (或流出) 该节点电流的代数和恒等于零, 即  $\sum i(t) = 0$ 。对上式进行拉氏变换, 根据变换的线性性质可得 KCL

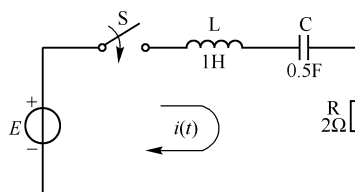


图 5.1-5 例 5.1-4 的电路

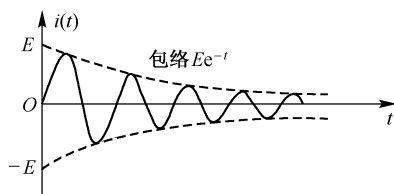


图 5.1-6 例 5.1-4 的波形



在  $s$  域的形式为

$$\sum I(s) = 0 \quad (5.1-1)$$

式中,  $I(s)$  为各相应电流  $i(t)$  的像函数。式(5.1-1)表明, 对任意节点, 流入 (或流出) 该节点的像电流的代数和恒等于零。仍将式(5.1-1)称为基尔霍夫电流定律。

同理, 可得基尔霍夫电压定律 (KVL) 在  $s$  域的形式为

$$\sum V(s) = 0 \quad (5.1-2)$$

式中,  $V(s)$  为各相应支路电压  $v(t)$  的像函数。式(5.1-2)表明, 沿任意闭合回路, 各段像电压的代数和恒等于零。仍将式(5.1-2)称为基尔霍夫电压定律。

下面讨论电阻、电感和电容等元件的  $s$  域模型。

已知  $R, L, C$  元件的时域关系为

$$v_R(t) = Ri_R(t) \quad v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau + v_C(0^-)$$

将以上三式分别进行拉氏变换, 得到

$$V_R(s) = RI_R(s) \quad (5.1-3)$$

$$V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0^-) \quad (5.1-4)$$

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{1}{s} v_C(0^-) \quad (5.1-5)$$

经过变换以后的方程式可以直接用来处理  $s$  域中  $V(s)$  与  $I(s)$  之间的关系, 对每个关系式都可构成一个网络模型, 如图 5.1-7 所示, 元件符号是  $s$  域中广义欧姆定律的符号, 也就是说, 电阻符号表示下列关系

$$V_R(s) = RI_R(s)$$

而电感与电容的符号分别表示 (不考虑起始条件)

$$V_L(s) = sLI_L(s) \quad V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s)$$

式(5.1-4)和式(5.1-5)中起始状态引起的附加项, 在图 5.1-7 中用串联的电压源来表示。这样做, 实质上是把 KVL 和 KCL 直接用于  $s$  域, 就像把它用于时域以及用于复数符号法一样。

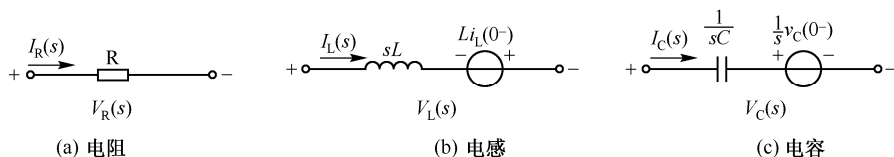


图 5.1-7  $s$  域元件模型 (回路分析)

然而, 图 5.1-7 的模型并不是唯一的, 将式(5.1-3)至式(5.1-5)对电流求解, 得到

$$I_R(s) = \frac{1}{R} V_R(s) \quad (5.1-6)$$

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} V_L(s) + \frac{1}{s} i_L(0^-) \quad (5.1-7)$$

$$I_C(s) = sC V_C(s) - C v_C(0^-) \quad (5.1-8)$$

与此对应的  $s$  域网络模型如图 5.1-8 所示。在列写节点方程式时，用图 5.1-8 的模型比较方便；而列写回路方程式时，则宜采用图 5.1-7 的模型。

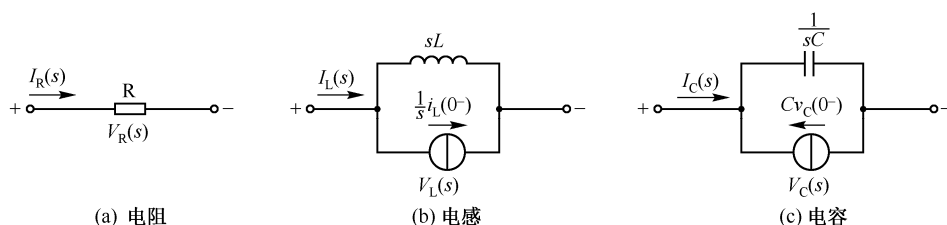


图 5.1-8  $s$  域元件模型（节点分析）

把网络中每个元件都用它的  $s$  域模型来代替，把信号源直接写为变换式，这样就得到全部网络的  $s$  域模型图，对此电路模型采用 KVL 和 KCL 分析，即可列出所需求解的变换式，这时，所进行的数学运算是代数关系，使得求解更为方便。

**例 5.1-5** 图 5.1-9 所示电路中，当  $t < 0$  时开关 S 位于“1”端，电路的状态已经稳定。当  $t = 0$  时开关 S 从“1”端倒向“2”端，求  $i_L(t)$ 。

**解：**由题意求得电流起始值  $i_L(0^-) = -E_1 / R_1$ 。 $s$  域模型如图 5.1-10 所示。这里，为便于求解，将  $E_2, R_2$  等效为电流源与电阻并联。

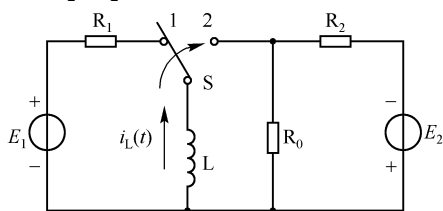


图 5.1-9 例 5.1-5 的电路

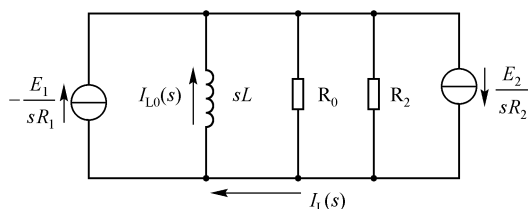


图 5.1-10 例 5.1-5 的  $s$  域模型

假定流过  $sL$  的电流为  $I_{L0}(s)$ ，不难写出

$$I_{L0}(s) = \frac{\frac{E_1}{sR_1} + \frac{E_2}{sR_2}}{\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{sL}} \times \frac{1}{sL} = \frac{\frac{1}{s} \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right)}{\frac{sL(R_0 + R_2)}{R_0 R_2} + 1}$$

引用符号  $\tau = \frac{L(R_0 + R_2)}{R_0 R_2}$ ，则

$$I_{L0}(s) = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}}{s(s\tau + 1)} = \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right)$$

由节点电流关系求得

$$I_L(s) = I_{L0}(s) - \frac{E_1}{sR_1} = \frac{E_2}{sR_2} - \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

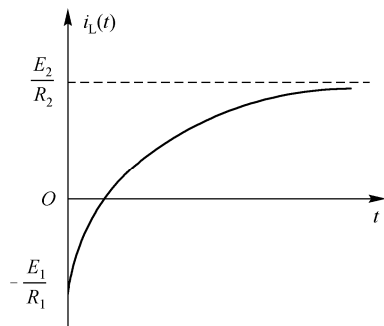


图 5.1-11 例 5.1-5 的波形

显然，逆变换为

$$i_L(t) = \frac{E_2}{R_2} - \left( \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t \geq 0$$

波形如图 5.1-11 所示。

**例 5.1-6** 图 5.1-12 所示电路中, 已知  $E = 28\text{V}$ ,  $L = 4\text{H}$ ,  $C = 1/4\text{F}$ ,  $R_1 = 12\ \Omega$ ,  $R_2 = R_3 = 2\ \Omega$ 。当  $t = 0$  时, 将开关 S 断开, 设开关断开前电路已稳定, 求开关断开后其两端电压  $y(t)$  的零输入响应和零状态响应。

**解:** 首先, 求出电容电压和电感电流的起始值  $v_C(0^-)$  和  $i_L(0^-)$ 。在  $t = 0^-$  时, 开关尚未断开, 由图 5.1-12 可求得电容电压和电感中电流

$$v_C(0^-) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E = 4\text{ V} \quad i_L(0^-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 2\text{ A}$$

其次, 画出图 5.1-12 电路的  $s$  域模型, 如图 5.1-13 所示。

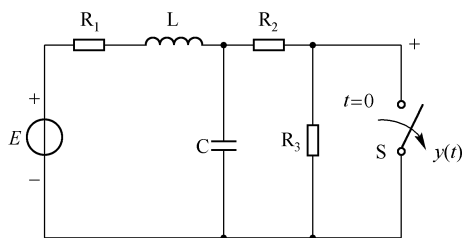


图 5.1-12 例 5.1-6 的电路

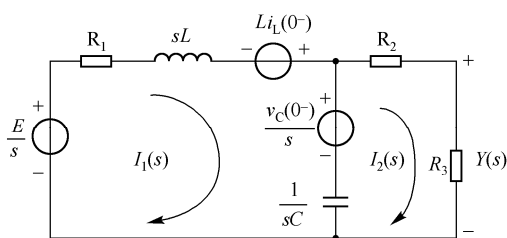


图 5.1-13 例 5.1-6 的  $s$  域模型

先求零状态响应, 这时令  $i_L(0^-) = 0$ ,  $v_C(0^-) = 0$ , 由图 5.1-13 可以列出回路方程, 即

$$\begin{cases} \left( R_1 + sL + \frac{1}{sC} \right) I_1(s) - \frac{1}{sC} I_2(s) = \frac{E}{s} \\ -\frac{1}{sC} I_1(s) + \left( R_2 + R_3 + \frac{1}{sC} \right) I_2(s) = 0 \end{cases}$$

将激励信号及各元件参数代入上式, 可得

$$\begin{cases} \left( 12 + 4s + \frac{4}{s} \right) I_1(s) - \frac{4}{s} I_2(s) = \frac{28}{s} \\ -\frac{4}{s} I_1(s) + \left( 4 + \frac{4}{s} \right) I_2(s) = 0 \end{cases}$$

可以求出

$$I_2(s) = \frac{7}{s(s^2 + 4s + 4)}$$

这样

$$Y_{zs}(s) = R_3 I_2(s) = \frac{14}{s(s^2 + 4s + 4)} = \frac{7}{2s} - \frac{7}{2(s+2)} - \frac{7}{(s+2)^2}$$

取上式的拉氏逆变换, 得

$$y_{zs}(t) = 3.5 - (3.5 + 7t)e^{-2t} \quad t \geq 0$$

再求零输入响应, 这时只要令激励信号等于零, 即在图 5.1-13 中将  $E/s$  短路, 可列出回路方程, 即

$$\begin{cases} \left( R_1 + sL + \frac{1}{sC} \right) I_1(s) - \frac{1}{sC} I_2(s) = Li_L(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s} \\ -\frac{1}{sC} I_1(s) + \left( R_2 + R_3 + \frac{1}{sC} \right) I_2(s) = \frac{v_C(0^-)}{s} \end{cases}$$

将各元件参数代入上式，用与求解零状态响应相类似的方法，可求出零输入响应的像函数，即

$$Y_{zi}(s) = \frac{2s+10}{(s+2)^2} = \frac{2}{s+2} + \frac{6}{(s+2)^2}$$

取上式的拉氏逆变换，得  $y_{zi}(t) = (2+6t)e^{-2t} \quad t \geq 0$

通过以上举例可以看出，用  $s$  域模型求响应的方法，不需要建立微分方程，就能求出零输入响应、零状态响应和全响应。

## 5.2 系统函数与冲激响应

### 1. 系统函数的定义

设  $n$  阶系统的微分方程为

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = \\ b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \cdots + b_1 x^{(1)}(t) + b_0 x(t) \end{aligned} \quad (5.2-1)$$

若系统的各起始状态为零，即  $y^{(k)}(0^-) = 0$ ，且激励信号  $x(t)$  为因果信号，即  $x^{(k)}(0^-) = 0$ ，对式(5.2-1)两边取拉氏变换可求出系统的零状态响应的拉氏变换

$$Y_{zs}(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} X(s) \quad (5.2-2)$$

将零状态响应的拉氏变换与激励信号的拉氏变换之比称为系统函数（system function）或网络函数(network function)，记为  $H(s)$ ，即

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (5.2-3)$$

式中， $B(s)$  和  $A(s)$  分别是  $H(s)$  的分子多项式和分母多项式。为了书写方便起见，一般省略  $Y_{zs}(s)$  中的下标，即

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \quad (5.2-4)$$

在零状态条件下，元件的  $s$  域模型中，描述动态元件（L,C）起始状态的电压源或电流源将不存在，这时网络的  $s$  域模型与原电路形式相同。按照网络的  $s$  域模型，运用电路分析的方法，可直接求得系统函数  $H(s)$ ，而不必列写该系统的微分方程。例如，例 5.1-3 中的 RC 电路，其系统函数为

$$H(s) = \frac{V_C(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \quad (5.2-5)$$

在网络分析中，由于激励与响应既可以是电压，也可能是电流，因此系统函数可以是阻抗（电压比电流），或为导纳（电流比电压），也可以是数值比（电流比或电压比）。此外，若

激励与响应是同一端口，则系统函数叫做策动点函数（driving function）或驱动点函数；若激励与响应不在同一端口，就叫做转移函数（transfer function）或传输函数。显然，策动点函数只可能是阻抗和导纳；而转移函数可以是阻抗、导纳或比值。例如式(5.2-5)，它是转移函数，为数值比。在一般的系统分析中，对于这些名称往往不加区分，统称为系统函数或网络函数。

## 2. 系统函数与冲激响应的关系

引入系统函数概念以后，根据式(5.2-4)，零状态响应的拉氏变换可以写为

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \quad (5.2-6)$$

由前所述，当系统的激励为单位冲激函数  $\delta(t)$  时，其零状态响应称为冲激响应  $h(t)$ 。此时  $X(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ ，故由式(5.2-6)可得系统的冲激响应

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \quad (5.2-7)$$

或

$$\mathcal{L}[h(t)] = H(s) \quad (5.2-8)$$

上式说明，系统函数  $H(s)$  是冲激响应  $h(t)$  的拉氏变换，也就是说， $H(s)$  与  $h(t)$  之间是一对拉氏变换。这样，在求冲激响应  $h(t)$  时，只需取  $H(s)$  的逆变换即可获得，这一步常常是较为简便的。

对式(5.2-6)两边取拉氏逆变换，并利用时域卷积定理，得

$$y_{zs}(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_{zs}(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)X(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] * \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = h(t) * x(t) \quad (5.2-9)$$

这正是 4.6 节中所得出的结论：系统的零状态响应是冲激响应  $h(t)$  与激励信号  $x(t)$  的卷积积分。这一重要结论在  $s$  域的对应关系是：零状态响应的拉氏变换  $Y_{zs}(s)$  等于系统函数  $H(s)$  与激励信号的拉氏变换  $X(s)$  的乘积。换句话说， $h(t)$  和  $H(s)$  分别从时域和复频域两个方面表征了同一系统的特性。

## 3. 系统函数的求解

系统函数可以由零状态下系统的微分方程经拉氏变换求得，或由系统冲激响应的拉氏变换求得。对于具体的电路，系统函数还可以用零状态下的  $s$  域模型（实际上它与原电路形式相同，只是把  $x(t)$  和  $y(t)$  改为  $X(s)$  和  $Y(s)$ ）应用电路的分析方法求得。下面举例说明。

**例 5.2-1** 已知系统的微分方程为

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 5x(t)$$

求系统函数  $H(s)$ 。

**解法一：**将给定系统的微分方程在零状态下两边取拉氏变换，得

$$(2s^2 + 5s + 2)Y(s) = (s + 5)X(s)$$

则

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 5}{2s^2 + 5s + 2}$$

**解法二：**应用 4.5 节的方法，先求得系统的冲激响应

$$h(t) = (1.5e^{-0.5t} - e^{-2t})u(t)$$

则

$$H(s) = \mathcal{L}[h(t)] = \frac{1.5}{s + 0.5} - \frac{1}{s + 2} = \frac{s + 5}{2s^2 + 5s + 2}$$

可见,这两种方法求得的  $H(s)$  是一样的。

**例 5.2-2** 求图 5.2-1 所示电路的转移导纳函数  $Y_1(s) = \frac{I(s)}{V_1(s)}$  和  $Y_2(s) = \frac{I(s)}{V_2(s)}$ 。

**解:** 设流过电感的电流为  $I_1(s)$ , 如图 5.2-1 所示, 列写电路的方程如下

$$\begin{cases} (s+1)[I(s) + I_1(s)] + 2I(s) = V_1(s) \\ -(s+2)I_1(s) + 2I(s) = V_2(s) \end{cases}$$

消去中间变量  $I_1(s)$ , 得

$$(s^2 + 7s + 8)I(s) - (s+1)V_2(s) = (s+2)V_1(s)$$

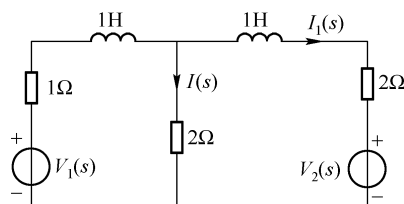


图 5.2-1 例 5.2-2 的电路

上式中, 令  $V_2(s) = 0$ , 得

$$Y_1(s) = \frac{I(s)}{V_1(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 7s + 8}$$

同理, 令  $V_1(s) = 0$ , 得

$$Y_2(s) = \frac{I(s)}{V_2(s)} = -\frac{s+1}{s^2 + 7s + 8}$$

**例 5.2-3** 图 5.2-2(a)是常用的分压电路 (也称为衰减器), 若以电容  $C_2$  上的电压为输出, 试求其冲激响应。

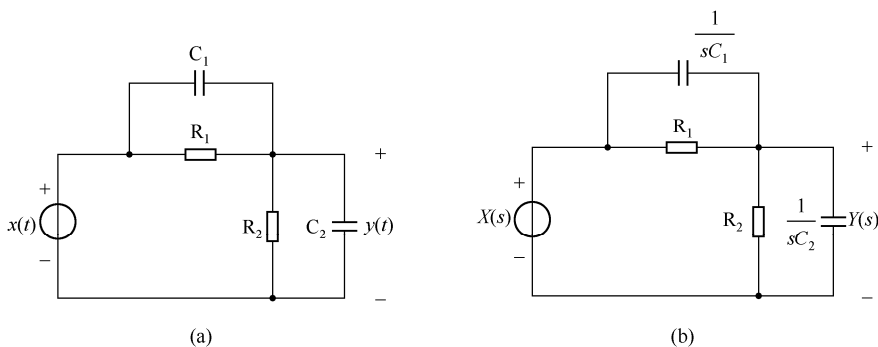


图 5.2-2 例 5.2-3 的电路

**解:** 画出图 5.2-2(a)的零状态  $s$  域模型, 如图 5.2-2(b)所示。

$$\text{令 } Z_1(s) = \frac{R_1 \frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = \frac{1}{C_1 \left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)} \quad Z_2(s) = \frac{R_2 \frac{1}{sC_2}}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} = \frac{1}{C_2 \left( s + \frac{1}{R_2 C_2} \right)}$$

$$\text{则求得其系统函数 } H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Z_2(s)}{Z_1(s) + Z_2(s)} = \frac{C_1 \left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)}{(C_1 + C_2)s + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

$$= \frac{C_1}{C_1 + C_2} + \frac{R_2 C_2 - R_1 C_1}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)^2} \cdot \frac{1}{s + \alpha}$$

式中,  $\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}$ 。则冲激响应为

$$h(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \delta(t) + \frac{R_2 C_2 - R_1 C_1}{R_1 R_2 (C_1 + C_2)^2} e^{-\alpha t} u(t)$$

若适当选择元件值, 使  $R_1 C_1 = R_2 C_2$ , 则

$$H(s) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$h(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \delta(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t)$$

这时网络函数  $H(s)$  是常数, 电路的冲激响应是冲激函数。由卷积定理可知, 在  $R_1 C_1 = R_2 C_2$  的条件下, 对于任何输入信号  $x(t)$ , 图 5.2-2(a) 电路的零状态响应为

$$y(t) = h(t) * x(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t) * x(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} x(t)$$

即该网络的输出信号  $y(t)$  与输入信号  $x(t)$  的波形相同, 而为输入信号的  $\frac{R_2}{R_1 + R_2}$  倍, 不产生失真。因此许多仪器、设备中常用它作为分压电路。

## 5.3 零、极点分布与时域响应特性

### 5.3.1 零点与极点的概念

线性时不变系统的系统函数一般是以多项式之比的形式出现的, 即

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

系统函数分母多项式  $A(s) = 0$  的根称为系统函数的极点 (pole), 而系统函数分子多项式  $B(s) = 0$  的根称为系统函数的零点 (zero); 极点使系统函数变为无穷大, 而零点使系统函数变为零。

$A(s)$  和  $B(s)$  都可以分解成线性因子的乘积形式, 即

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m (s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_n (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (5.3-1)$$

这里  $z_1, z_2, \cdots, z_m$  是系统函数的零点,  $p_1, p_2, \cdots, p_n$  是系统函数的极点。  $(s - z_j)$  称为零点因子 ( $j = 1, 2, \cdots, m$ ), 而  $(s - p_i)$  称为极点因子 ( $i = 1, 2, \cdots, n$ ), 所以系统函数是由零点因子、极点因子及标量系数  $H_0 = b_m / a_n$  三部分所确定的。

应该注意，系统函数可能有多重零点或多重极点。

把系统函数的零点与极点表示在  $s$  平面上的图形，叫做系统函数的零、极点分布图，或简称为系统函数的零极点图（zero-pole plot）。其中零点用“ $\circ$ ”表示，极点用“ $\times$ ”表示。若为  $n$  阶零点或极点，则在零点或极点旁注以  $(n)$ 。

例如某系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{s^2(s+3)}{(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{s^2(s+3)}{(s+1)(s+2+j)(s+2-j)}$$

那么，它的零点位于  $\begin{cases} z_1 = z_2 = 0 & (\text{二阶}) \\ z_3 = -3 & (\text{一阶}) \end{cases}$

而其极点位于  $\begin{cases} p_1 = -1 & (\text{一阶}) \\ p_2 = -2 + j & (\text{一阶}) \\ p_3 = -2 - j & (\text{一阶}) \end{cases}$

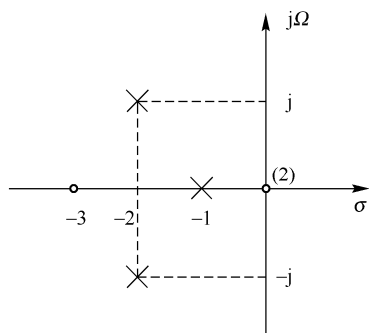


图 5.3-1  $H(s)$  的零、极点分布图示例

该系统函数的零、极点如图 5.3-1 所示。

由式(5.3-1)可以看出，系统函数一般有  $n$  个有限的极点和  $m$  个有限的零点。如果  $n > m$ ，则当  $s \rightarrow \infty$  时，函数值  $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} b_m s^{m-n} / a_n = 0$ ，所以  $H(s)$  在无穷远处有一个  $(n-m)$  阶零点。如果  $n < m$ ，则当  $s \rightarrow \infty$  时，函数值  $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} b_m s^{m-n} / a_n$  为无穷大，所以  $H(s)$  在无穷远处有一个  $(m-n)$  阶的极点。概括起来说，系统函数极点和零点的数目应该相等。但根据系统函数分子和分母幂次的高低，可以有若干零点在无穷远处，或者若干极点在无穷远处。

### 5.3.2 零、极点分布与时域响应特性

设系统函数具有以下形式

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (5.3-2)$$

由于系统函数  $H(s)$  与冲激响应  $h(t)$  是一对拉普拉斯变换，那么把  $H(s)$  展开成部分分式，则  $H(s)$  的每个极点就对应于一项时间函数  $h_i(t)$ ，由于极点的阶数不同，下面对一阶极点和二阶极点的情况分别进行讨论。

#### 1. 一阶极点

设式(5.3-2)中的  $p_i$  均为一阶极点，则  $H(s)$  可展开成如下形式

$$H(s) = \sum_{i=1}^n H_i(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}$$

则冲激响应的形式如下

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n H_i(s)\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}\right] = \sum_{i=1}^n h_i(t)$$



这里  $p_i$  可以是实数，也可以成对共轭复数形式出现。我们来研究几种典型情况的极点分布与原函数波形的对应关系。

(1) 若极点位于  $s$  平面坐标原点，如  $H_i(s)=1/s$ ，那么，冲激响应就为阶跃函数，即： $h_i(t)=u(t)$ 。

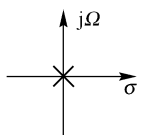
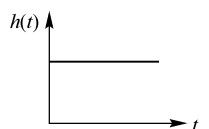
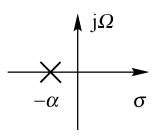
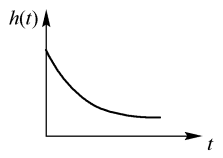
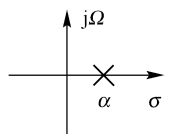
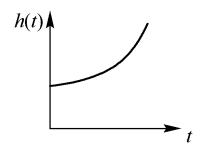
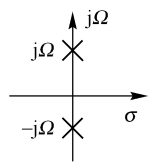
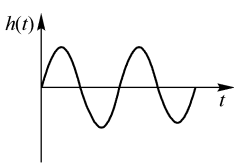
(2) 若极点位于  $s$  平面的实轴上，则冲激响应具有指数函数形式。例如， $H_i(s)=\frac{1}{s+\alpha}$  (式中  $\alpha>0$ )，则  $h_i(t)=e^{-\alpha t}u(t)$ ，此时极点为负实数 ( $p_i=-\alpha<0$ )，冲激响应是指数衰减 (单调减幅) 形式；如果  $H_i(s)=\frac{1}{s-\alpha}$  (式中  $\alpha>0$ )，则  $h_i(t)=e^{\alpha t}u(t)$ ，这时极点是正实数 ( $p_i=\alpha>0$ )，对应的冲激响应是指数增长 (单调增幅) 形式。

(3) 虚轴上的共轭极点对应的冲激响应具有等幅振荡形式。例如， $H_i(s)=\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}$ ，则  $h_i(t)=\sin \Omega t \cdot u(t)$ ，它的两个极点位于  $p_1=+j\Omega$  和  $p_2=-j\Omega$ 。

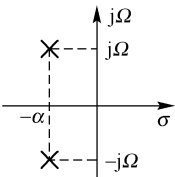
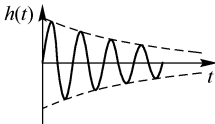
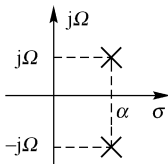
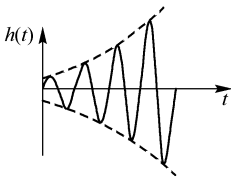
(4) 落于左半  $s$  平面内的共轭极点对应的冲激响应为衰减振荡形式。如  $H_i(s)=\frac{\Omega}{(s+\alpha)^2+\Omega^2}$  (式中  $\alpha>0$ )，则  $h_i(t)=e^{-\alpha t} \sin \Omega t \cdot u(t)$ ，它的两个极点位于  $p_1=-\alpha+j\Omega$  和  $p_2=-\alpha-j\Omega$ 。与此相反，落于  $s$  右半平面内的共轭极点对应的冲激响应为增幅振荡。例如， $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Omega}{(s-\alpha)^2+\Omega^2}\right)=e^{\alpha t} \sin \Omega t \cdot u(t)$  (式中  $\alpha>0$ )，它的极点是  $p_1=\alpha+j\Omega$  和  $p_2=\alpha-j\Omega$ 。

将以上结果整理成表 5.3-1。

表 5.3-1 极点分布与原函数波形对应关系 (一)

| $H(s)$                        | $s$ 平面上的零极点                                                                         | $t$ 平面上的波形                                                                          | $h(t)(t \geq 0)$ |
|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| $\frac{1}{s}$                 |  |  | $u(t)$           |
| $\frac{1}{s+\alpha}$          |  |  | $e^{-\alpha t}$  |
| $\frac{1}{s-\alpha}$          |  |  | $e^{\alpha t}$   |
| $\frac{\Omega}{s^2+\Omega^2}$ |  |  | $\sin \Omega t$  |

(续表)

| $H(s)$                                   | $s$ 平面上的零极点                                                                       | $t$ 平面上的波形                                                                        | $h(t)(t \geq 0)$              |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $\frac{\Omega}{(s+\alpha)^2 + \Omega^2}$ |  |  | $e^{-\alpha t} \sin \Omega t$ |
| $\frac{\Omega}{(s-\alpha)^2 + \Omega^2}$ |  |  | $e^{\alpha t} \sin \Omega t$  |

## 2. 二阶极点

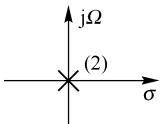
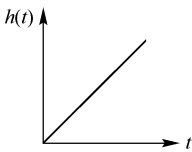
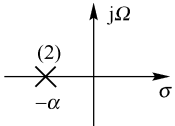
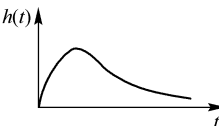
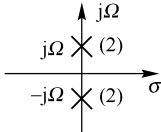
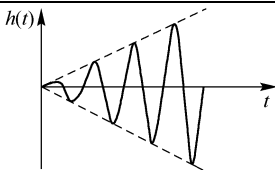
(1) 位于  $s$  平面坐标原点的二阶极点, 对应的冲激响应具有线性增长形式。例如,  $H_i(s) = 1/s^2$ , 则  $h_i(t) = tu(t)$ 。

(2) 负实轴上的二阶极点对应的冲激响应是  $t$  与指数函数的乘积。例如,  $H_i(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$ , 则  $h_i(t) = te^{-\alpha t}u(t)$ , 这里  $\alpha > 0$ 。

(3) 虚轴上的二阶共轭极点对应的冲激响应为幅度按线性增长的正弦振荡。例如,  $H_i(s) = \frac{2\Omega s}{(s^2 + \Omega^2)^2}$ , 则  $h_i(t) = t \sin \Omega t \cdot u(t)$ 。

其他的二阶极点及多重极点的情况在此不再赘述, 读者可自行分析。以上二阶极点分布与原函数的对应关系列于表 5.3-2。

表 5.3-2 极点分布与原函数波形对应关系 (二)

| $H(s)$                                 | $s$ 平面上的零极点                                                                         | $t$ 平面上的波形                                                                           | $h(t)(t \geq 0)$  |
|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| $\frac{1}{s^2}$                        |  |   | $t$               |
| $\frac{1}{(s+\alpha)^2}$               |  |   | $te^{-\alpha t}$  |
| $\frac{2\Omega s}{(s^2 + \Omega^2)^2}$ |  |  | $t \sin \Omega t$ |

综合一阶、二阶极点情况,从表 5.3-1 和表 5.3-2 可以看出,若  $H(s)$  的极点落于左半  $s$  平面,则  $h(t)$  波形为衰减形式;若  $H(s)$  的极点落于右半  $s$  平面,则  $h(t)$  波形为增长形式;落于虚轴上的一阶极点对应的  $h(t)$  呈等幅振荡或阶跃形式;而虚轴上的二阶极点将使  $h(t)$  呈增长形式。

以上分析了  $H(s)$  极点分布与冲激响应  $h(t)$  的对应关系。至于  $H(s)$  的零点位置的改变只会影响  $h(t)$  的幅度和相位,而对于  $h(t)$  波形的形式没有影响。例如,  $H_1(s) = \frac{s+3}{(s+3)^2+2^2}$ , 零点为  $z=-3$ , 极点为  $p_1=-3+j2$ ,  $p_2=-3-j2$ , 则  $h_1(t) = e^{-3t} \cos 2t \cdot u(t)$ ; 若  $H_2(s) = \frac{s+1}{(s+3)^2+2^2}$ , 极点保持不变, 零点变为  $z=-1$ , 则

$$\begin{aligned} h_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+1}{(s+3)^2+2^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s+3}{(s+3)^2+2^2} - \frac{2}{(s+3)^2+2^2} \right] \\ &= e^{-3t} [\cos 2t - \sin 2t] u(t) = \sqrt{2} e^{-3t} \cos(2t + 45^\circ) u(t) \end{aligned}$$

冲激响应  $h_2(t)$  与  $h_1(t)$  相比,其形式仍为同频率的衰减振荡,只是幅度和相位发生了变化。

以上分析的  $H(s)$  的零、极点分布与冲激响应  $h(t)$  的对应关系,同样适合于任何像函数  $F(s)$  的零、极点分布与其相对应的原函数  $f(t)$  之间的关系。也就是说,从  $F(s)$  的零、极点分布图可以判断其原函数  $f(t)$  的形式。这里不再赘述。

### 5.3.3 自由响应与强迫响应、暂态响应与稳态响应

在第 4 章时域分析法中,讨论了自由响应与强迫响应的概念。下面,将以  $s$  域的观点,也即从  $X(s)$  与  $H(s)$  的极点分布特性来研究这一问题。

如前所述,在  $s$  域中,系统的零状态响应  $Y(s)$  与激励信号  $X(s)$ 、系统函数  $H(s)$  之间满足

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad (5.3-3)$$

显然,  $Y(s)$  的零、极点由  $H(s)$  与  $X(s)$  的零、极点所决定。在式(5.3-3)中  $H(s)$  和  $X(s)$  可以分别写成如下形式

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad X(s) = X_0 \frac{\prod_{l=1}^u (s - z_l)}{\prod_{k=1}^v (s - p_k)}$$

式中,  $z_j$  和  $z_l$  分别表示  $H(s)$  和  $X(s)$  的第  $j$  个和第  $l$  个零点, 零点数目分别为  $m$  个与  $u$  个;  $p_i$  和  $p_k$  分别表示  $H(s)$  和  $X(s)$  的第  $i$  个和第  $k$  个极点, 极点数目分别为  $n$  个与  $v$  个。

如果  $H(s)$  和  $X(s)$  都不含有多重极点, 而且两者没有相同的极点, 则将  $Y(s)$  用部分分式展开后可得

$$Y(s) = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i} + \sum_{k=1}^v \frac{K_k}{s - p_k} \quad (5.3-4)$$

式中,  $K_i$  和  $K_k$  分别表示部分分式展开式中各项的系数。

不难看出,  $Y(s)$  的极点来自两方面: 一是系统函数的极点  $p_i$ , 二是激励信号的极点  $p_k$ 。

取  $Y(s)$  的逆变换, 可得

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t} + \sum_{k=1}^v K_k e^{p_k t} \quad (5.3-5)$$

响应函数  $y(t)$  由两部分组成, 前面一部分由系统函数的极点所产生, 称为自由响应; 后面一部分则由激励信号的极点所产生, 称为强迫响应。而自由响应中的极点  $p_i$  只由系统本身的特性所决定, 与激励函数的形式无关。然而, 系数  $K_i$  则与  $H(s)$  和  $X(s)$  都有关系。同样, 系数  $K_k$  也不仅由  $X(s)$  决定, 也与  $H(s)$  有关。也就是说, 自由响应的形式仅由  $H(s)$  决定, 但它的幅度和相位却受  $H(s)$  与  $X(s)$  两方面影响。同样, 强迫响应的形式只取决于激励信号  $X(s)$ , 而其幅度与相位却与  $X(s)$  与  $H(s)$  都有关系。另外, 对于有多重极点的情况, 可以得到与此类似的结果。

**例 5.3-1** 如图 5.3-2 所示电路, 若输入信号  $x(t) = 5\cos 2t \cdot u(t)$ , 试求输出信号  $y(t)$ , 并指出  $y(t)$  中的自由响应和强迫响应分量。

**解:** 图 5.3-2 的系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{s+1}$$

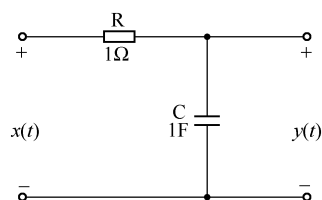


图 5.3-2 例 5.3-1 的电路

输入信号  $x(t)$  的变换式为  $X(s) = \mathcal{L}[5\cos 2t] = \frac{5s}{s^2 + 4}$

输出信号  $y(t)$  的变换式为  $Y(s) = X(s)H(s) = \frac{5s}{(s+1)(s^2 + 4)} \quad (5.3-6)$

将  $Y(s)$  展开为部分分式  $Y(s) = \frac{s+4}{s^2 + 4} + \frac{-1}{s+1}$

取逆变换得到  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 4} + \frac{4}{s^2 + 4} - \frac{1}{s+1}\right] = -e^{-t} + \cos 2t + 2\sin 2t$

$$= \underbrace{-e^{-t}}_{\text{自由响应}} + \underbrace{\sqrt{5}\cos(2t - 63.4^\circ)}_{\text{强迫响应}} \quad t \geq 0$$

与自由响应和强迫响应有着密切联系而且又容易发生混淆的另一对名词是: 暂态响应 (transient response) 与稳态响应 (steady-state response)。暂态响应是指激励信号接入后的一段时间内, 完全响应中暂时出现的分量, 随着时间  $t$  的增大, 它将逐渐消失。由完全响应中减去暂态响应即得稳态响应。

一般情况下, 对于稳定系统 (stable system) (稳定性的概念将在 5.8 节中介绍),  $H(s)$  的极点  $p_i$  均在左半  $s$  平面, 即  $\text{Re}[p_i] < 0$ , 故自由响应呈衰减形式, 在此情况下, 自由响应就是暂态响应。若  $X(s)$  的所有极点  $p_k$  落在右半  $s$  平面或虚轴上, 即  $\text{Re}[p_k] \geq 0$ , 则强迫响应就是稳态响应。例如, 正弦激励信号, 它的  $\text{Re}[p_k] = 0$ , 这样正弦稳态响应 (即强迫响应) 就是稳态响应。

若激励信号本身为衰减函数, 即  $\text{Re}[p_k] < 0$ , 如  $e^{-\alpha t}u(t)$ ,  $e^{-\alpha t}\sin \Omega t \cdot u(t)$  ( $\alpha > 0$ ) 等, 在时间  $t$  趋于无限大后, 强迫响应也等于零, 这时强迫响应与自由响应一起构成暂态响应, 而系统的稳态响应等于零。

若系统函数的极点  $p_i$  落于虚轴上, 即  $\text{Re}[p_i]=0$  时, 其自由响应就是无休止的等幅振荡 (如无损 LC 谐振电路), 于是, 自由响应也成为稳态响应, 这是一种特例 (称为边界稳定系统)。

若系统函数的极点  $p_i$  落于右半  $s$  平面, 即  $\text{Re}[p_i]>0$ , 则自由响应是增幅振荡, 这属于不稳定系统。

还有一种情况需要说明, 这就是  $H(s)$  的零点与  $X(s)$  的极点相同 (出现  $z_j = p_k$ ), 此时对应因子相消, 与  $p_k$  相应的强迫响应不复存在。同理, 若  $H(s)$  的极点与  $X(s)$  零点相同 (出现  $p_i = z_l$ ), 则与  $p_i$  相应的自由响应不复存在。

将上述不同条件下各响应分量的关系示意于图 5.3-3。

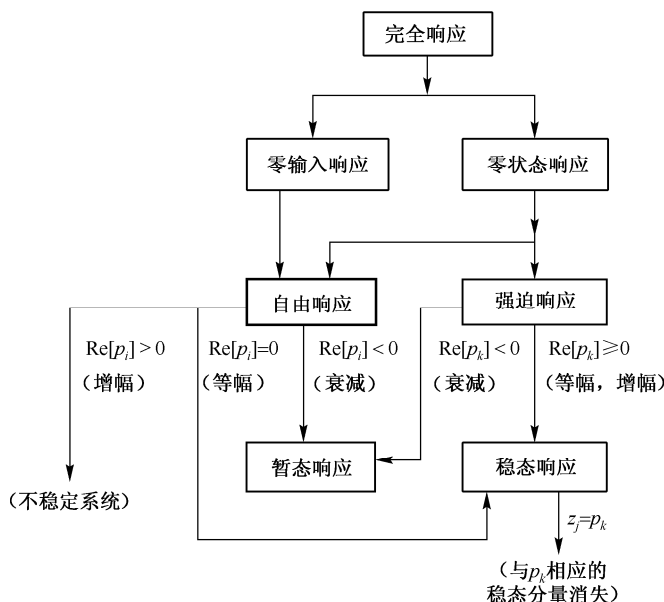


图 5.3-3 不同条件下各响应分量之间的关系

**例 5.3-2** 电路如图 5.3-4 所示, 已知激励信号  $x(t) = 2\sin t \cdot u(t)$ , 求 RLC 串联谐振电路中的响应电流  $i(t)$ 。并指出其稳态响应与暂态响应、强迫响应与自由响应各分量。

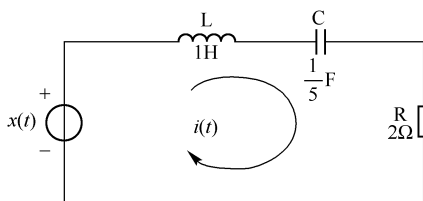


图 5.3-4 例 5.3-2 的电路

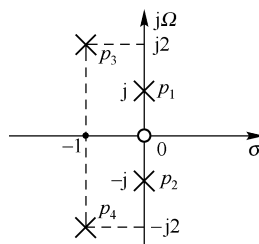


图 5.3-5  $I(s)$  的零、极点分布图

**解:** (1) 激励信号的拉氏变换为  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \frac{2}{s^2 + 1}$

其中,  $p_{1,2} = \pm j$  为一对共轭极点。

(2) 系统函数为  $H(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s}{(s+1)^2 + 4}$

其中,  $p_3 = -1 + j2$ ,  $p_4 = -1 - j2$  为  $H(s)$  的极点。  $I(s)$  的零、极点分布如图 5.3-5 所示。

(3) 响应电流的拉氏变换为

$$I(s) = \mathcal{L}[i(t)] = H(s)X(s) = \frac{2s}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)(s-p_4)}$$

$$= \frac{2s}{(s^2+1)(s^2+2s+5)}$$

(4) 将  $I(s)$  做部分分式展开

$$I(s) = \frac{2s+1}{5(s^2+1)} - \frac{2s+5}{5(s^2+2s+5)} = \frac{2s+1}{5(s^2+1)} - \frac{2(s+1)+3}{5[(s+1)^2+2^2]}$$

(5) 求各响应分量。由  $I(s)$  展开式可以看出,  $p_1, p_2$  是由激励源产生的极点, 在响应中对应的分量是系统的强迫响应分量。图 5.3-5 中示出了  $p_1, p_2$  位于  $s$  平面虚轴上, 因而, 也是系统的稳态响应分量, 以  $i_{ss}(t)$  表示。而  $p_3, p_4$  是由系统函数产生的极点, 在响应中构成自由响应分量。  $p_3, p_4$  位于左半  $s$  平面, 成共轭对 (如图 5.3-5 所示), 相应的时间函数是衰减振荡, 因而也是系统的暂态响应分量, 以  $i_{tr}(t)$  表示。

$$i_{ss}(t) = \frac{1}{5} \sin t + \frac{2}{5} \cos t \quad i_{tr}(t) = -\left( \frac{3}{10} e^{-t} \sin 2t + \frac{2}{5} e^{-t} \cos 2t \right)$$

一般情况下, RLC 回路的谐振频率  $\Omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  未调得与激励频率一致 (谐振)。本例就是这种情况。在暂态过程中, 回路电流包含两个频率成分, 其一取决于回路

参量确定的自然谐振频率  $\Omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$ , 其二

则决定于激励信号频率  $\Omega_{01}$ 。这样两个频率较靠近的振荡在回路中产生差拍, 致使电流幅度在建立过程中先随时间增长, 然后围绕其稳定值起伏振荡, 如图 5.3-6 所示。这种起伏随时间而减弱, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 自由振荡频率  $\Omega_d$  的成分衰减为零, 响应电流只有频率为  $\Omega_{01}$  的强迫振荡, 即稳态分量。

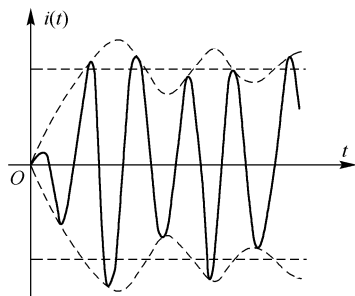


图 5.3-6 正弦激励接入 RLC 回路的响应波形

## 5.4 零、极点分布与系统频率响应特性的关系

### 5.4.1 频率响应特性的定义

系统在正弦信号激励下稳态响应随信号频率的变化而变化的特性, 称为系统的频率响应特性。这包括幅度随频率的变化及相位随频率的变化两个方面。频率响应特性 (frequency response) 简称为频响特性。

下面我们从系统函数的观点来考察系统的正弦稳态响应, 并借助零、极点分布图来研究频响特性。

设系统函数为  $H(s)$ , 正弦激励信号为  $x(t) = E_m \sin \Omega_0 t$ , 其拉氏变换为

$$X(s) = E_m \frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}$$

于是，系统响应的拉氏变换为

$$Y(s) = \frac{E_m \Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2} H(s) = \frac{A}{s + j\Omega_0} + \frac{B}{s - j\Omega_0} + \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s - p_n} \quad (5.4-1)$$

式中， $p_1, p_2, \dots, p_n$  是  $H(s)$  的  $n$  个极点，且假设为一阶极点；式中

$$A = (s + j\Omega_0)Y(s)\big|_{s=-j\Omega_0} = \frac{E_m \Omega_0 H(-j\Omega_0)}{-2j\Omega_0} = \frac{E_m H_0 e^{-j\varphi_0}}{-2j}$$

$$B = (s - j\Omega_0)Y(s)\big|_{s=j\Omega_0} = \frac{E_m \Omega_0 H(j\Omega_0)}{2j\Omega_0} = \frac{E_m H_0 e^{j\varphi_0}}{2j}$$

这里引用了符号  $H(j\Omega_0) = H_0 e^{j\varphi_0}$ ， $H(-j\Omega_0) = H_0 e^{-j\varphi_0}$ ，这样可以求得

$$\frac{A}{s + j\Omega_0} + \frac{B}{s - j\Omega_0} = \frac{E_m H_0}{2j} \left( -\frac{e^{-j\varphi_0}}{s + j\Omega_0} + \frac{e^{j\varphi_0}}{s - j\Omega_0} \right) \quad (5.4-2)$$

式(5.4-2)即式(5.4-1)前两项的逆变换为

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{A}{s + j\Omega_0} + \frac{B}{s - j\Omega_0} \right] = \frac{E_m H_0}{2j} (-e^{-j\varphi_0} e^{-j\Omega_0 t} + e^{j\varphi_0} e^{j\Omega_0 t}) = E_m H_0 \sin(\Omega_0 t + \varphi_0)$$

所以，系统的完全响应为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = E_m H_0 \sin(\Omega_0 t + \varphi_0) + K_1 e^{p_1 t} + \cdots + K_n e^{p_n t} \quad (5.4-3)$$

对于稳定系统， $H(s)$  的极点  $p_1, p_2, \dots, p_n$  的实部必小于零，式(5.4-3)中各指数项均为指数衰减函数，当  $t \rightarrow \infty$  时，它们都趋于零，也就是说它们均为暂态响应。所以稳态响应  $y_{ss}(t)$  就是式(5.4-3)中的第一项，即  $y_{ss}(t) = E_m H_0 \sin(\Omega_0 t + \varphi_0)$ 。

可见，在频率为  $\Omega_0$  的正弦激励信号作用之下，系统的稳态响应仍为同频率的正弦信号，但幅度乘以  $H_0$ ，相位移动  $\varphi_0$ ， $H_0$  和  $\varphi_0$  由系统函数  $H(s)$  在  $j\Omega_0$  处的取值所决定

$$H(s)\big|_{s=j\Omega_0} = H(j\Omega_0) = H_0 e^{j\varphi_0}$$

对于稳定系统，当正弦激励信号的频率  $\Omega$  改变时，将变量  $\Omega$  代入  $H(s)$  之中，即可得到频率响应特性

$$H(s)\big|_{s=j\Omega} = H(j\Omega) = |H(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)} \quad (5.4-4)$$

式中， $|H(j\Omega)|$  是幅频响应特性 (amplitude frequency response) (或称幅频特性)， $\varphi(\Omega)$  是相频响应特性 (phase frequency response) (或称相频特性)。为便于分析，常将式(5.4-4)的结果绘制成频响特性曲线，这时横坐标是变量  $\Omega$ ，纵坐标分别为  $|H(j\Omega)|$  和  $\varphi(\Omega)$ 。

## 5.4.2 频响特性的矢量作图法

频响特性  $H(j\Omega) = H(s)\big|_{s=j\Omega} = |H(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)}$ ，其中幅频特性与相频特性可根据表达式由

逐点描图法绘制。但是若 $|H(j\Omega)|$ 和 $\varphi(\Omega)$ 表达式较复杂时,这种逐点描图法就不适用了。因此,必须寻找一种新的方法使得绘制频响特性曲线较为方便。下面所介绍的矢量作图法正是为此目的而提出的。

矢量作图法是根据系统函数 $H(s)$ 在 $s$ 平面的零、极点分布来绘制频响特性曲线的,这包括幅频特性 $|H(j\Omega)|$ 曲线和相频特性 $\varphi(\Omega)$ 曲线。下面介绍这种方法的原理。

假设系统函数 $H(s)$ 的表达式为

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (5.4-5)$$

其中, $z_1, z_2, \dots, z_m$ 为 $H(s)$ 的 $m$ 个零点, $p_1, p_2, \dots, p_n$ 为 $H(s)$ 的 $n$ 个极点。取 $s = j\Omega$ ,即在 $s$ 平面中 $s$ 沿虚轴 $j\Omega$ 移动,从而得到频响特性

$$H(j\Omega) = H_0 \frac{\prod_{j=1}^m (j\Omega - z_j)}{\prod_{i=1}^n (j\Omega - p_i)} \quad (5.4-6)$$

容易看出,频率特性取决于零、极点的分布,即取决于 $z_j, p_i$ 的位置,而式(5.4-6)中的 $H_0$ 是系数,如果 $H_0 > 0$ ,只影响幅频特性的幅度,而不影响相频特性。分母中的任一因子 $(j\Omega - p_i)$ 相当于由极点 $p_i$ 指向虚轴上某点 $j\Omega$ 的一个矢量,称为极点矢量;同理,分子中任一因子 $(j\Omega - z_j)$ 相当于由零点 $z_j$ 指向虚轴上某点 $j\Omega$ 的一个矢量,称为零点矢量。在图 5.4-1 中示意画出了由零点 $z_1$ 和极点 $p_1$ 与 $j\Omega$ 点连接构成的两个矢量,图中 $N_1, M_1$ 分别表示矢量的模, $\psi_1, \theta_1$ 分别表示矢量的辐角。

对于任意零点 $z_j$ 构成的零点矢量,以及任意极点 $p_i$ 所构成的极点矢量,都可以表示为

$$j\Omega - z_j = N_j e^{j\psi_j} \quad (5.4-7)$$

$$j\Omega - p_i = M_i e^{j\theta_i} \quad (5.4-8)$$

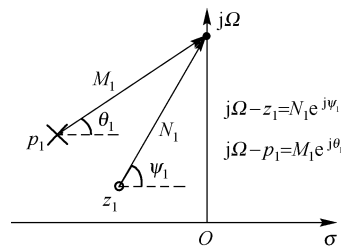


图 5.4-1  $j\Omega - z_1$  和  $j\Omega - p_1$  矢量

这里, $N_j, M_i$ 分别表示矢量的模, $\psi_j, \theta_i$ 则分别表示它们的辐角。于是,式(5.4-6)可以改写成

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= H_0 \frac{N_1 e^{j\psi_1} N_2 e^{j\psi_2} \dots N_m e^{j\psi_m}}{M_1 e^{j\theta_1} M_2 e^{j\theta_2} \dots M_n e^{j\theta_n}} \\ &= H_0 \frac{N_1 N_2 \dots N_m}{M_1 M_2 \dots M_n} e^{j[(\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]} \\ &= |H(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)} \end{aligned} \quad (5.4-9)$$

式中

$$|H(j\Omega)| = H_0 \frac{N_1 N_2 \dots N_m}{M_1 M_2 \dots M_n} \quad (5.4-10)$$

$$\varphi(\Omega) = (\psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) \quad (5.4-11)$$



当  $\Omega$  自原点沿虚轴向上移动并趋于无限大时, 相应频率由 0 变到无穷大, 各零点矢量和极点矢量的模和辐角都随之改变, 于是得出幅频特性和相频特性曲线。为了便于理解, 在应用这种方法画频响特性曲线之前, 我们举例说明如何由  $s$  平面用几何法确定频响特性曲线上的一个特定点的数值。

**例 5.4-1** 已知系统函数为  $H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$ , 试求  $\Omega = 1$  时的  $|H(j1)|$  和  $\varphi(1)$ 。

**解:** 将  $H(s)$  的分母多项式进行因式分解, 可得

$$H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)(s^2 + s + 1)}$$

其极点为  $p_1 = -1$ ,  $p_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。在图 5.4-2 中分别给出各极点与  $j1$  点连接构成的各极点矢量, 由几何图形可求得

$$M_1 = \sqrt{2} = 1.414, \quad \theta_1 = 45^\circ$$

$$M_2 = \sqrt{(1/2)^2 + (1 - \sqrt{3}/2)^2} = 0.518, \quad \theta_2 = \arctan \frac{1 - \sqrt{3}/2}{1/2} = 15^\circ$$

$$M_3 = \sqrt{(1/2)^2 + (1 + \sqrt{3}/2)^2} = 1.932, \quad \theta_3 = \arctan \frac{1 + \sqrt{3}/2}{1/2} = 75^\circ$$

由式(5.4-10)和式(5.4-11)可得

$$|H(j1)| = \frac{1}{M_1 M_2 M_3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi(1) = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = -135^\circ$$

本例的目的在于理解由  $s$  平面用矢量作图法绘制频响特性曲线的原理。5.5 节将举例说明如何用矢量作图法来确定频响特性。

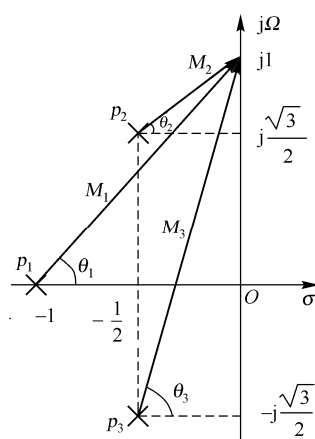


图 5.4-2 例 5-1 用图

## 5.5 典型系统的频响特性

### 1. 一阶系统的频响特性

下面研究由 RC 组成的一阶系统 (first order system) 的频响特性。

**例 5.5-1** 研究图 5.5-1 所示 RC 高通滤波网络 (high-pass filter network) 的频响特性  $H(j\Omega) = V_2(j\Omega)/V_1(j\Omega)$ 。

**解:** 写出系统函数表达式

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

它有一个零点在坐标原点, 而一个极点位于  $-\frac{1}{RC}$  处, 即

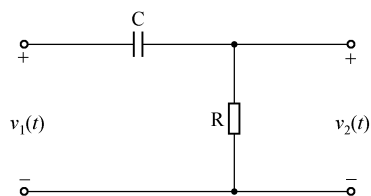


图 5.5-1 RC 高通滤波网络

$z_1 = 0$ ,  $p_1 = -\frac{1}{RC}$ 。零、极点在  $s$  平面上的分布以及各零、极点矢量如图 5.5-2 所示。

将  $s = j\Omega$  代入  $H(s)$  的表达式, 并以矢量因子  $N_1 e^{j\psi_1}, M_1 e^{j\theta_1}$  表示, 可得频响特性为

$$H(j\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega} = \frac{j\Omega}{j\Omega + \frac{1}{RC}} = \frac{N_1 e^{j\psi_1}}{M_1 e^{j\theta_1}} = |H(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)}$$

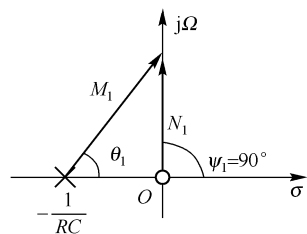


图 5.5-2 零、极点分布

式中,  $|H(j\Omega)| = N_1 / M_1$ ,  $\varphi(\Omega) = \psi_1 - \theta_1$ 。

我们来观察当  $\Omega$  从 0 沿虚轴向  $\infty$  增大时,  $|H(j\Omega)|$  和  $\varphi(\Omega)$  是如何随之改变的。当  $\Omega = 0$  时,  $N_1 = 0$ ,  $M_1 = \frac{1}{RC}$ , 所以  $N_1 / M_1 = 0$ , 也即  $|H(j\Omega)|_{\Omega=0} = 0$ 。因为  $\theta_1 = 0$ ,  $\psi_1 = 90^\circ$  (注意, 不管  $\Omega$  取何值,  $\psi_1$  始终为  $90^\circ$ ), 所以  $\varphi(\Omega)|_{\Omega=0} = \psi_1 - \theta_1 = 90^\circ$ 。当  $\Omega = \frac{1}{RC}$  时,  $\theta_1 = 45^\circ$ , 所以  $\varphi(\Omega)|_{\Omega=\frac{1}{RC}} = 45^\circ$ , 而  $N_1 = \frac{1}{RC}$ ,  $M_1 = \frac{\sqrt{2}}{RC}$ , 于是  $\frac{N_1}{M_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , 也即  $|H(j\Omega)|_{\Omega=\frac{1}{RC}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\Omega = \frac{1}{RC}$  称为高通滤波网络的截止频率, 用  $\Omega_c$  来表示。最后, 当  $\Omega$  趋于  $\infty$  时,  $N_1 / M_1$  趋于 1, 也即  $|H(j\Omega)|_{\Omega \rightarrow \infty} = 1$ , 而此时  $\theta_1$  趋于  $90^\circ$ , 所以  $\varphi(\Omega)$  趋于  $0^\circ$ 。按照上述分析绘出 RC 高通滤波网络的幅频特性与相频特性曲线, 如图 5.5-3 所示。

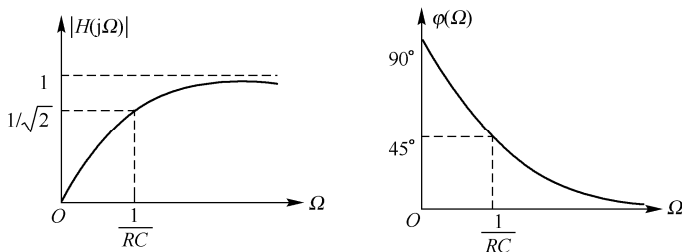


图 5.5-3 RC 高通滤波网络的频响特性

由 RC 组成的高通滤波网络又称 RC 微分电路。

**例5.5-2** 研究图5.5-4所示 RC 低通滤波网络 (low-pass filter network) 的频响特性  $H(j\Omega) = V_2(j\Omega) / V_1(j\Omega)$ 。

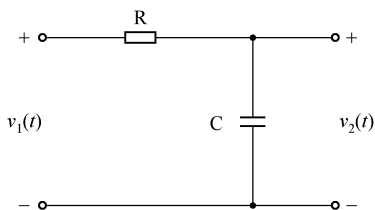


图 5.5-4 RC 低通滤波网络

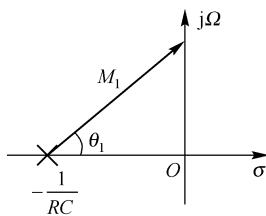


图 5.5-5 RC 低通滤波网络的零、极点分布

**解:** 系统函数为

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

极点位于  $p_1 = -\frac{1}{RC}$  处, 如图 5.5-5 所示。

$$H(j\Omega) = H(s)\Big|_{s=j\Omega} = \frac{\frac{1}{RC}}{j\Omega + \frac{1}{RC}} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{M_1 e^{j\theta_1}} = |H(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)}$$

式中,  $|H(j\Omega)| = \frac{1}{RCM_1}$ ,  $\varphi(\Omega) = -\theta_1$ 。

仿照例 5.5-1 的分析, 容易得出幅频特性与相频特性曲线, 如图 5.5-6 所示。由 RC 组成的低通滤波网络又称 RC 积分电路。

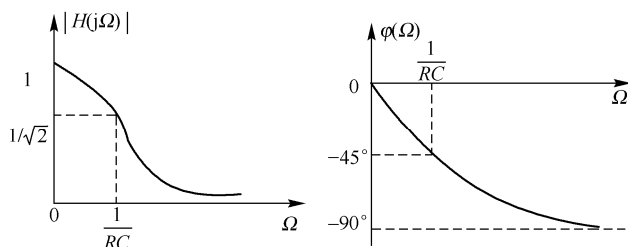


图 5.5-6 RC 低通滤波网络的频响特性

由 5.3 节可知, 借助系统函数的零、极点分布可以直观地确定它们的时域特性——冲激响应。现在, 更全面地认识清楚零、极点分布还可以用来表征系统的频域特性——绘出系统频响特性曲线。就一阶系统而言, 经常遇到的电路还有简单的 RL 电路, 以及含有多个电阻而仅含有一个储能元件的电路。对于它们都可采用类似的方法进行分析。尽管各电路的结构不同, 但只要它们的系统函数的零、极点分布相同, 就会具有一致的时域、频域特性。

## 2. 二阶系统的频响特性

下面将研究由两个储能的元件组成的二阶系统的频响特性。

由同一类型的储能元件构成的二阶系统 (second order system) (如含有两个电容或两个电感), 它们的两个极点都落在实轴上, 不会出现共轭复数极点, 是非谐振系统。下面举一例说明。

**例 5.5-3** 研究图 5.5-7 所示的二阶 RC 网络的频响特性  $H(j\Omega) = V_2(j\Omega)/V_1(j\Omega)$ 。注意, 图中  $kv_3(t)$  是受控电压源, 以及  $R_1C_1 \ll R_2C_2$ 。

**解:** 此网络的系统函数为

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = k \cdot \frac{\frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{sC_2}} \\ &= \frac{k}{R_1C_1} \cdot \frac{s}{\left(s + \frac{1}{R_1C_1}\right)\left(s + \frac{1}{R_2C_2}\right)} \end{aligned}$$

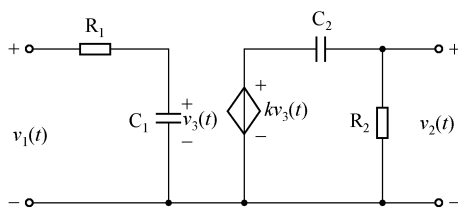


图 5.5-7 二阶 RC 网络

它的极点为  $p_1 = -\frac{1}{R_1 C_1}$ ,  $p_2 = -\frac{1}{R_2 C_2}$ , 只有一个零点在原点, 如图 5.5-8 所示。注意到题给定的条件  $R_1 C_1 \ll R_2 C_2$ , 故  $-\frac{1}{R_2 C_2}$  靠近原点, 而  $-\frac{1}{R_1 C_1}$  则远离原点。以  $s = j\Omega$  代入  $H(s)$  中, 并写成矢量因子形式

$$\begin{aligned} H(j\Omega) &= H(s)|_{s=j\Omega} = \frac{k}{R_1 C_1} \cdot \frac{j\Omega}{\left(j\Omega + \frac{1}{R_1 C_1}\right)\left(j\Omega + \frac{1}{R_2 C_2}\right)} \\ &= \frac{k}{R_1 C_1} \cdot \frac{N_1 e^{j\psi_1}}{M_1 e^{j\theta_1} M_2 e^{j\theta_2}} = \frac{k}{R_1 C_1} \cdot \frac{N_1}{M_1 M_2} e^{j[\psi_1 - (\theta_1 + \theta_2)]} \\ &= |H(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)} \end{aligned}$$

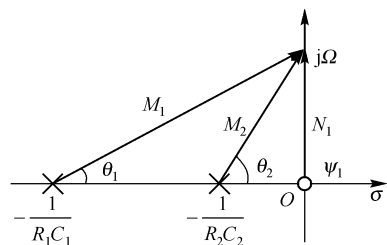


图 5.5-8 二阶 RC 网络的零、极点分布

式中,  $|H(j\Omega)| = \frac{k}{R_1 C_1} \cdot \frac{N_1}{M_1 M_2}$ ,  $\varphi(\Omega) = \psi_1 - (\theta_1 + \theta_2)$ 。

由图 5.5-8 看出, 当  $\Omega$  较低时,  $M_1 \approx \frac{1}{R_1 C_1}$ ,  $\theta_1 \approx 0$ , 几乎都不随频率而变化, 即极点  $p_1$  对频响特性不起作用。这时,  $M_2, \theta_2, N_1, \psi_1$  的作用 (即极点  $p_2$  与零点  $z_1$  的作用) 与例 5.5-1 的一阶 RC 高通滤波网络相同, 即在低频端呈现高通特性, 如图 5.5-9 所示。当  $\Omega$  较高时,  $M_2 \approx N_1$ ,  $\theta_2 \approx \psi_1$ , 极点  $p_2$  与零点  $z_1$  的作用相互抵消, 于是  $M_1, \theta_1$  的作用 (即极点  $p_1$  的作用) 与例 5.5-2 的一阶 RC 低通滤波网络一致。即在高频端呈现低通特性, 如图 5.5-9 所示。当  $\Omega$  位于中间频率范围时, 这时频率  $\Omega$  满足  $\frac{1}{R_2 C_2} \ll \Omega \ll \frac{1}{R_1 C_1}$ , 则有如下表达式

$$\begin{aligned} |H(j\Omega)|_{\frac{1}{R_2 C_2} \ll \Omega \ll \frac{1}{R_1 C_1}} &= \frac{k}{R_1 C_1} \cdot \frac{j\Omega}{\left(j\Omega + \frac{1}{R_1 C_1}\right)\left(j\Omega + \frac{1}{R_2 C_2}\right)} \\ &\approx \frac{k}{R_1 C_1} \cdot \frac{j\Omega}{\frac{1}{R_1 C_1} \cdot j\Omega} = k \end{aligned}$$

所以  $|H(j\Omega)| = k$ ,  $\varphi(\Omega) = 0$ 。

这样, 可画出图 5.5-7 所示的二阶 RC 网络的频响特性曲线, 如图 5.5-9 所示。

从物理概念上讲, 在低频端, 主要是  $R_2 C_2$  的高通特性起主要作用; 在高频端, 则是  $R_1 C_1$  的低通特性起主要作用; 在中频段,  $C_1$  相当于开路,  $C_2$  相当于短路, 它们都不起作用。信号  $v_1$  经受控源的  $k$  倍相乘而送往输出端, 给出  $v_2$ 。可见, 此系统相当于低通与高通级联而构成的带通系统。此带通系统的通频带较宽, 通带内较平坦, 不具有选择性。

含有电容、电感两类储能元件的二阶系统可以具有谐振特性, 在无线电技术中, 常利用它们的这一性能构成带通、带阻滤波网络。

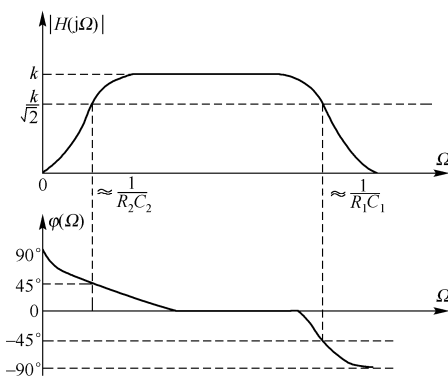


图 5.5-9 二阶 RC 网络的频响特性

**例 5.5-4** 图 5.5-10 为 GCL 并联谐振电路，激励为电流源  $i_1(t)$ ，响应为并联谐振回路的端电压  $v_2(t)$ ，试分析频响特性  $H(j\Omega) = V_2(j\Omega) / I_1(j\Omega)$ 。

**解：**系统函数（此处即阻抗函数）为

$$H(s) = Z(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{1}{G + sC + \frac{1}{sL}}$$

$$= \frac{1}{C} \frac{s}{s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{C} \frac{s}{(s - p_1)(s - p_2)} \quad (5.5-1)$$

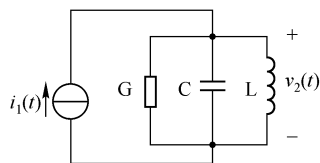


图 5.5-10 GCL 并联谐振电路

引用符号  $\alpha = \frac{G}{2C}$ ,  $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \alpha^2}$ , 得到  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\Omega_d$ 。

下面说明这几个参数的物理意义。其中  $\Omega_0$  是谐振频率。 $\alpha$  是衰减因数， $\alpha$  越大表示电路的能量损耗越大。而  $\Omega_d$  则称为有阻尼的谐振频率。在实际应用中，对于谐振电路损耗情况的另一种描述方法是品质因数  $Q$ ，其定义为

$$Q = \Omega_0 C / G \quad (5.5-2)$$

$Q$  越高表示电路的损耗越小。显然， $\alpha$  与  $Q$  之间的对应关系为

$$\alpha = \Omega_0 / 2Q \quad (5.5-3)$$

下面，对  $\alpha < \Omega_0$  的一般情况来研究系统的频响特性，在这种情况下， $Z(s)$  的极点为一对共轭极点，零、极点分布如图 5.5-11 所示。

在式(5.5-1)中令  $s = j\Omega$ ，并写成矢量因子形式

$$H(j\Omega) = Z(j\Omega) = \frac{1}{G + j\Omega C - j\frac{1}{\Omega L}}$$

$$= \frac{1}{C} \frac{j\Omega}{(j\Omega - p_1)(j\Omega - p_2)}$$

$$= \frac{1}{C} \frac{N_1}{M_1 M_2} e^{j[\psi_1 - (\theta_1 + \theta_2)]} = |H(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)} \quad (5.5-4)$$

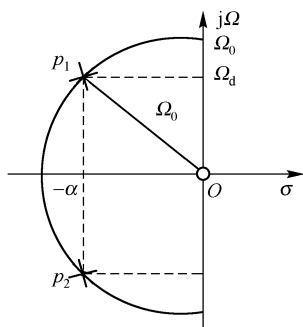


图 5.5-11  $Z(s)$  的零、极点分布

图 5.5-12 示出了在  $\alpha < \Omega_0$  的条件下， $\Omega$  从 0 向  $\infty$  移动时，相应的四幅  $s$  平面矢量图。

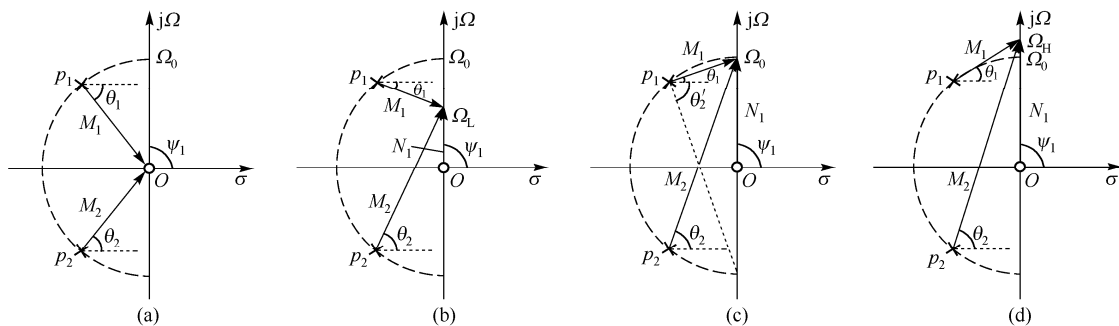


图 5.5-12  $s$  沿  $j\Omega$  轴移动时矢量因子的变化情况

当  $\Omega = 0$  时， $N_1 = 0$ ,  $M_1 = M_2 = \Omega_0$ ,  $\theta_1 = -\theta_2$ ,  $\psi_1 = 90^\circ$ ，于是得到  $|Z(j\Omega)|_{\Omega=0} = 0$ ，

$|\varphi(\Omega)|_{\Omega=0} = 90^\circ$ 。这是图 5.5-12(a)的情况。随着  $\Omega$  的增大,  $N_1$  增大,  $\theta_1$  的绝对值减小,  $\theta_2$  增大, 于是  $|Z(j\Omega)|$  增大,  $\varphi(\Omega)$  从  $90^\circ$  开始减小。这是图 5.5-12(b)的情况, 此时, 频率值  $\Omega$  已移至  $\Omega_L$  点。继续沿虚轴上移至与圆弧交界点  $\Omega_0$  处, 如图 5.5-12(c)所示, 此时, 达到谐振点, 借助图中辅助虚线容易证明  $\theta'_2$  与  $\theta_2$  相等, 而且  $\theta_1 + \theta'_2 = 90^\circ$ , 所以  $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ , 于是  $\varphi(\Omega)|_{\Omega=\Omega_0} = \psi_1 - \theta_1 - \theta_2 = 90^\circ - 90^\circ = 0^\circ$ 。

将  $\Omega = \Omega_0$  代入式(5.5-4), 可求得

$$H(j\Omega_0) = Z(j\Omega_0) = \frac{1}{G + j\Omega_0 C - j\frac{1}{\Omega_0 L}}$$

因为  $\Omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ , 即  $\Omega_0 C = \frac{1}{\Omega_0 L}$ , 所以

$$H(j\Omega_0) = Z(j\Omega_0) = 1/G$$

此时幅频特性  $|H(j\Omega_0)|$  达到最大值<sup>①</sup>。

此后, 再增加  $\Omega$ , 由于  $M_1, M_2$  显著增加, 而  $N_1$  变化平缓, 所以  $|H(j\Omega)|$  逐渐减小。最后, 当  $\Omega$  趋于无限大时,  $M_1, M_2$  和  $N_1$  都趋于无限大, 因此,  $|H(j\Omega)|$  趋于零; 又因为  $\theta_1 + \theta_2$  继续增大, 而且  $\theta_1 + \theta_2 > 90^\circ$ , 所以  $\varphi(\Omega)$  的负值增大, 当  $\Omega$  趋于无限大时,  $\theta_1 + \theta_2$  趋于  $180^\circ$ , 则  $\varphi(\Omega)$  趋于  $-90^\circ$ 。图 5.5-12(d)示出了  $\Omega$  变动至  $\Omega_H$  点 ( $\Omega_H > \Omega_0$ ) 的  $s$  平面矢量图。按上述分析过程可描绘出谐振电路的幅频特性与相频特性曲线, 分别如图 5.5-13(a)和(b)所示(注意图中各频率值与图 5.5-12 的对应关系,  $\Omega_L$  与  $\Omega_H$  关于  $\Omega_0$  对称。)

以上对 GCL 并联谐振电路的频响特性做了较详细的分析。由于图 5.5-14 所示的 RLC 串联谐振电路(以电压源  $v_1(t)$  作为激励, 以回路电流  $i_2(t)$  作为响应)与图 5.5-10 所示的并联谐振电路之间有对偶关系, 所以借助于对偶方法, 可以分析 RLC 串联谐振电路的频响特性, 读者可自行分析。

上述并联谐振电路阻抗函数的特点是具有一对靠近虚轴的共轭极点, 下面再举出系统函数零、极点都在虚轴上的实例。

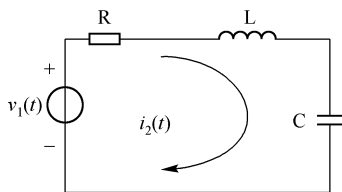


图 5.5-14 RLC 串联谐振电路

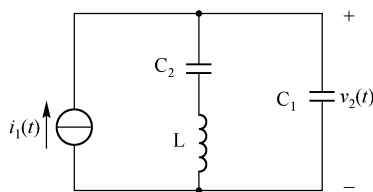


图 5.5-15 同时具有共轭极点和共轭零点的谐振电路

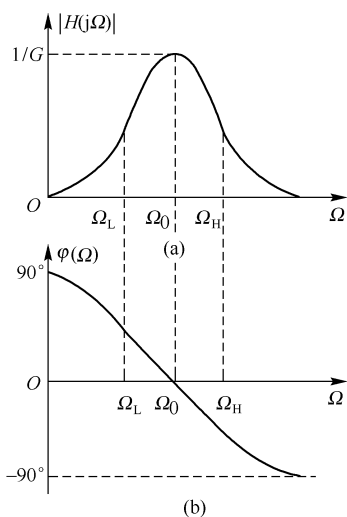


图 5.5-13 谐振电路的频率响应特性

① 也可由直角三角形的几何关系求得, 由图 5.5-12(c)看出,  $M_1 M_2 = 2N_1 \alpha$ , 即  $\frac{1}{C} \cdot \frac{N_1}{M_1 M_2} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{G}$ 。

**例 5.5-5** 求图 5.5-15 所示电路的频响特性。

**解：**此电路有三个独立的储能元件，由于电路中没有电阻，因而它是无损电路。为分析其频响特性，首先写出系统函数（阻抗函数）的表达式

$$Z(s) = \frac{V_2(s)}{I_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC_1} \left( sL + \frac{1}{sC_2} \right)}{\frac{1}{sC_1} + sL + \frac{1}{sC_2}} = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{\left( s^2 + \frac{1}{LC_2} \right)}{s \left( s^2 + \frac{C_1 + C_2}{LC_1 C_2} \right)} = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{s^2 + \Omega_1^2}{s(s^2 + \Omega_2^2)} \quad (5.5-5)$$

式中， $\Omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC_2}}$ ， $\Omega_2 = \frac{1}{\sqrt{L \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}}}$ 。显然， $\Omega_1$  与  $\Omega_2$  之间满足  $\Omega_1 < \Omega_2$ 。

$Z(s)$  的零、极点分布如图 5.5-16 所示。它有一对共轭极点  $\pm j\Omega_2$  和一对共轭零点  $\pm j\Omega_1$ ，此外，在坐标原点也有一个极点。由式(5.5-5)可得

$$Z(j\Omega) = \frac{1}{C_1} \cdot \frac{(j\Omega + j\Omega_1)(j\Omega - j\Omega_1)}{j\Omega(j\Omega + j\Omega_2)(j\Omega - j\Omega_2)} = |Z(j\Omega)| e^{j\varphi(\Omega)}$$

由矢量作图法容易求得：当  $\Omega$  沿虚轴移动时，在  $\Omega = 0$  和  $\Omega = \Omega_2$  两极点处， $|Z(j\Omega)|$  为  $\infty$ ；而在  $\Omega = \Omega_1$  零点处， $|Z(j\Omega)| = 0$ 。相位变化则是在  $0 < \Omega < \Omega_1$  范围内  $\varphi(\Omega) = -90^\circ$ 。当  $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$  时， $\varphi(\Omega) = 90^\circ$ ；而  $\Omega > \Omega_2$  以后又有  $\varphi(\Omega) = -90^\circ$ 。 $|Z(j\Omega)|$  和  $\varphi(\Omega)$  曲线如图 5.5-17 所示。

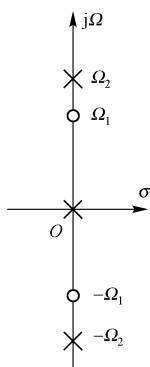


图 5.5-16 阻抗函数的零、极点分布图

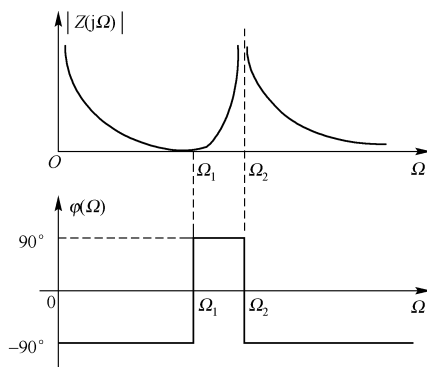


图 5.5-17 例 5.5-5 电路的频响特性

一般情况下，可以认为，若系统函数有一对非常靠近  $j\Omega$  轴的极点  $p = -\sigma_i \pm j\Omega_i$  ( $\sigma_i \ll \Omega_i$ )，则在  $\Omega = \Omega_i$  附近处，幅频响应特性出现峰点，相频响应特性迅速减小。又若系统函数有一对非常靠近  $j\Omega$  轴的零点  $z = -\sigma_j \pm j\Omega_j$  ( $\sigma_j \ll \Omega_j$ )，则在  $\Omega = \Omega_j$  附近处，幅频响应特性下凹，相频响应特性迅速上升。

## 5.6 全通系统和最小相位系统

### 1. 全通系统

如果一个系统的系统函数的全部极点位于左半  $s$  平面，全部零点位于右半  $s$  平面，而且零点与极点对于  $j\Omega$  轴互为镜像，则称这种系统为全通系统 (all-pass system) 或全通网络，对应的系统函数则称为全通函数。

由于  $H(s)$  的零、极点呈对称关系, 使其幅频特性为常数, 这样, 对于全部频率的正弦信号都能按同样的幅度传输系数通过。因此, 这种系统被称为全通系统。

下面举例说明全通系统的频响特性。

**例 5.6-1** 图 5.6-1(a) 为典型的全通系统, 图(b)为支臂的结构组成。

**解:** 观察图 5.6-1 可直接得到

$$V_o(s) = I_a(s)Z_a - I_b(s)Z_b = \frac{Z_a - Z_b}{Z_a + Z_b} X(s)$$

所以 
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{X(s)} = \frac{Z_a - Z_b}{Z_a + Z_b} = \frac{\frac{1}{sC} + sL - R}{\frac{1}{sC} + sL + R}$$

令  $\alpha = \frac{R}{2L}$ ,  $\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , 且  $\Omega_0 \gg \alpha$ , 代入上式可得

$$H(s) = \frac{s^2 - \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} = \frac{s^2 - 2\alpha s + \Omega_0^2}{s^2 + 2\alpha s + \Omega_0^2} = \frac{(s - s_0)(s - s_0^*)}{(s + s_0)(s + s_0^*)}$$

式中,  $s_0 = \alpha + j\sqrt{\Omega_0^2 - \alpha^2}$ ,  $s_0^* = \alpha - j\sqrt{\Omega_0^2 - \alpha^2}$ 。

其零、极点如图 5.6-2 所示。由图可知, 零点矢量的模与极点矢量的模相等, 即  $M_1 = N_1$ ,  $M_2 = N_2$ , 所以幅频特性为  $|H(j\Omega)| = 1$ , 具有全通特性。

下面再研究相频特性, 当  $\Omega = 0$  时,  $\theta_1 = -\theta_2$ ,  $\psi_1 = -\psi_2$ , 所以,  $|\varphi(\Omega)|_{\Omega=0} = 0$ ; 当  $\Omega$  沿  $j\Omega$  轴向上移动时,  $\theta_2$  增加,  $\psi_2$  减小, 而且  $\theta_1$  由负变正,  $\psi_1$  更加变负, 于是  $\varphi(\Omega)$  下降; 而当  $\Omega \rightarrow \infty$  时,  $\theta_1 = \theta_2 = 90^\circ$ ,  $\psi_1 = -270^\circ$ ,  $\psi_2 = 90^\circ$ , 因而  $\varphi(\Omega)|_{\Omega \rightarrow \infty} = -360^\circ$ 。即  $\varphi(\Omega)$  变化的全过程是从 0 下降, 最终趋于  $-360^\circ$ 。此全通网络的幅频特性与相频特性曲线分别如图 5.6-3(a)和(b)所示。

从以上分析不难看出, 全通网络函数的幅频特性虽为常数, 但相频特性却不受什么约束, 它是随  $\Omega$  而变化的。因而, 将全通网络串接在电路中, 可以保证不影响传送信号的幅度频谱特性, 只改变信号的相位频谱特性, 在传输系统中常用来进行相位校正。例如, 可做相位补偿器。

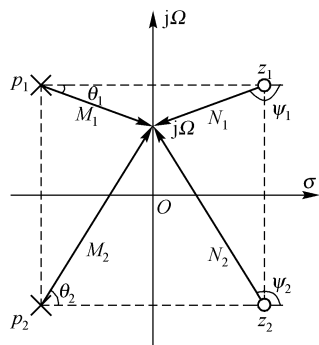


图 5.6-2 全通系统的零、极点分布

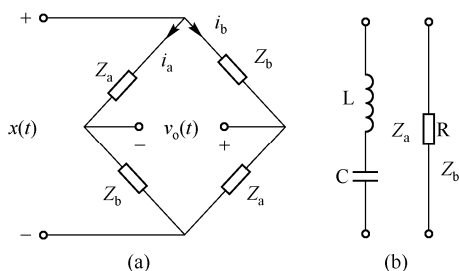


图 5.6-1 全通系统

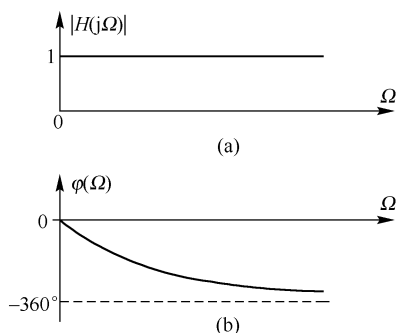


图 5.6-3 全通系统的频响特性

## 2. 最小相位系统

假设两系统  $H_1(s)$  和  $H_2(s)$  的零、极点图分别如图 5.6-4(a)和(b)所示, 由图可知, 它们有



相同的极点，即  $p_{1,2} = p_{3,4} = -2 \pm j2$ 。但它们的零点不同，是关于  $j\Omega$  轴成镜像对称的，即  $z_{1,2} = -1 \pm j1$ ， $z_{3,4} = 1 \pm j1$ 。不难看出，它们的幅频特性是相同的，这是因为两系统中各零、极点构成的矢量因子的长度都对应相等。但图(a)的相位小于图(b)的相位，因为图(b)相位绝对值大。与图 5.6-4(a)和(b)对应的相频特性曲线如图 5.6-5 所示。显然，就相移的绝对值而言，图 5.6-4(a)具有较小的相移。

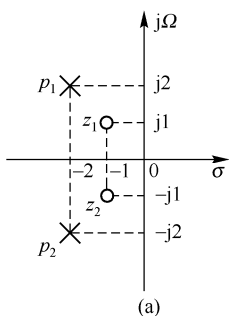


图 5.6-4 最小和非最小相位系统的零、极点分布

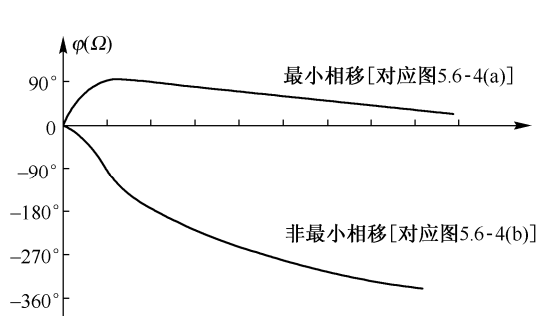
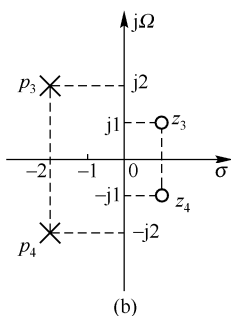
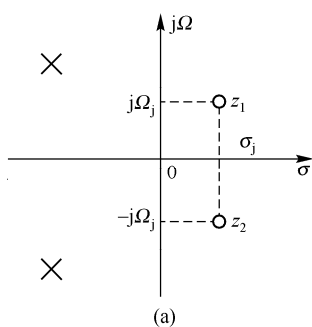


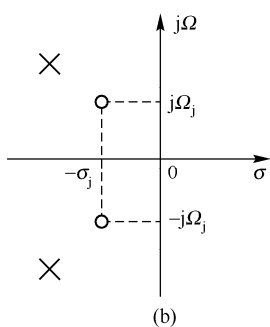
图 5.6-5 与图 5.6-4 对应的相频特性

根据上述分析，引出以下定义：零点仅位于左半  $s$  平面或  $j\Omega$  轴上的系统函数称为最小相位函数。对应的系统称为最小相位系统（minimum-phase system）。反之，如果系统函数有一个或多个零点在右半  $s$  平面，则称该系统为非最小相位系统。

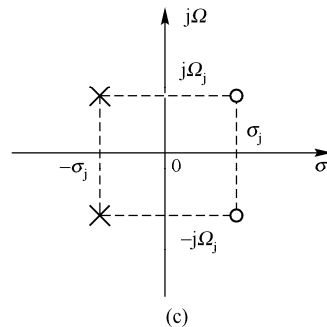
一个非最小相位系统可用最小相位系统与全通系统级联来代替。或者说，非最小相位函数可以表示为最小相位函数与全通函数的乘积。例如，图 5.6-6(a)的函数可表示为图(b)和(c)的乘积。



(a)



(b)



(c)

图 5.6-6 非最小相位函数表示为最小相位函数与全通函数的乘积

设非最小相位函数分子的复数因子为

$$[s - (\sigma_j + j\Omega_j)][s - (\sigma_j - j\Omega_j)] = (s - \sigma_j)^2 + \Omega_j^2$$

于是  $H(s)$  可写成

$$H(s) = H_{\min}(s)[(s - \sigma_j)^2 + \Omega_j^2]$$

由于在  $H(s)$  中已提出非最小相位这一项，余下部分必然是最小相位部分。上式的分子、分母同乘以左半  $s$  平面的零点因子  $(s + \sigma_j)^2 + \Omega_j^2$ ，则有

$$H(s) = \underbrace{H_{\min}(s)[(s + \sigma_j)^2 + \Omega_j^2]}_{\text{最小相位函数}} \underbrace{\frac{(s - \sigma_j)^2 + \Omega_j^2}{(s + \sigma_j)^2 + \Omega_j^2}}_{\text{全通函数}}$$

## 5.7 系统模拟及信号流图

由前几章的讨论可知,对于连续的线性时不变系统,可以用常系数线性微分方程来描述。将一个实际的物理系统模型化,抽象为数学表达式,便于研究系统的性能。有时,也需要对实际系统进行实验室模拟。通过模拟实验研究系统的性能,这时并不需要在实验室里仿制真实的系统,而只要根据系统的数学描述,用模拟装置组成实验系统,使得它与真实系统具有相同的微分方程。也就是说,这种系统的模拟指的是数学意义上的模拟。

### 5.7.1 系统的框图

用方框图(block diagram)表示一个系统的功能常常比用数学表达式更为直观。

对于连续系统的模拟,通常由三种部件组成:加法器、标量乘法器(或称为数乘器)和积分器。图 5.7-1(a)和(b)分别表示加法器和标量乘法器的运算关系。前者的输出信号等于若干个输入信号之和,后者的输出信号是输入信号的  $a$  倍,这里  $a$  是一标量。在图中输入信号用函数  $x(t)$  或其变换式  $X(s)$  表示,输出信号用函数  $y(t)$  或其变换式  $Y(s)$  表示。因为时域中的加法运算对应于复频域中的加法运算,时域中的标量乘法运算对应于复频域中的标量乘法运算,所以加法器和标量乘法器在时域中的模型符号和在复频域中的模型符号相同。

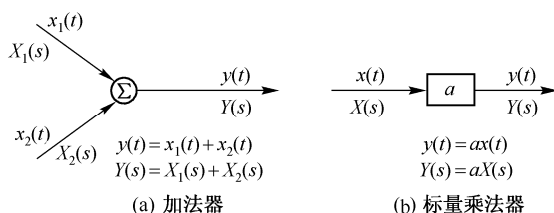


图 5.7-1 加法器和标量乘法器框图

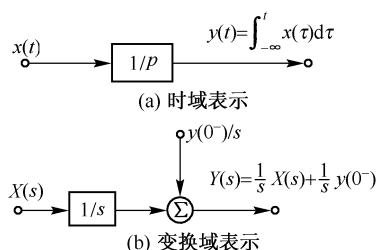


图 5.7-2 积分器方框图

模拟微分方程表述的系统还需要积分器。在理论上积分器和微分器都可以用来模拟动态连续系统,但在实现上往往采用积分器,这是因为积分器抗干扰的性能比微分器好,特别是对脉冲式的工业干扰,积分器的精度比微分器高。积分器用图 5.7-2(a)和(b)来表示。图(a)是积分器的时域表示;图(b)是变换域表示,如果起始状态  $y(0^-) = 0$ ,则图(b)输出端的加法器可以省去。两者物理系统相同,但含义却有区别。在时域表示时用  $1/p$ ,且认为起始条件已含在其中;用系统函数研究系统时,则用  $1/s$  表示,且认为系统起始状态为零。本章只讨论零状态的情形。

在变换域中,方框图除了表示常数  $a$  和  $1/s$  (积分器)的意义外,还可以表示一般的系统函数的含义,如图 5.7-3 所示的框图,它表征了输入  $X(s)$  与输出  $Y(s)$  之间的关系,其输出为

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

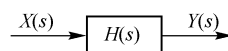


图 5.7-3 系统函数  $H(s)$  的方框图

这里,系统函数  $H(s)$  可能很简单(例如:常数  $a$  或  $1/s$ ),也可以是较复杂的函数。需要说明,信号只能沿箭头方向传输。这样,标量乘法器也可归入系统函数一类,其系统函数  $H(s) = a$ ,其中  $a$  是常数。

一个系统常由许多部件组成，若将其中的每个部件用一个方框表示，并根据信号的流向将各部件连接起来，就能组成整个系统的方框图。根据方框图可以进一步分析系统的性能。

### 5.7.2 信号流图

一个系统，用方框图表示或用信号流图（signal flow graph）表示并没有原则区别。可以认为信号流图是进一步简化了方框图的表示方法。

#### 1. 信号流图的获得

系统的信号流图，就是用一些点和线段来表示系统。如图 5.7-4(a)所示的方框图，可用图 (b)所示的由输入指向输出的有向线段来表示。它的起点标记为  $X(s)$ ，终点标记为  $Y(s)$ ，这些点称为节点。节点是表示系统中的变量或信号的点。线段表示信号传输的路径，称为支路。信号的传输方向用箭头表示。系统函数  $H(s)$  标记在箭头附近，可称为该支路的增益。所以每一条支路相当于乘法器，其输出为

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

节点可以有多个输入和多个输出。如图 5.7-5 所示，节点  $x_4$  有三个输入，两个输出。按流图构成的原则有

$$x_4 = H_{14}x_1 + H_{24}x_2 + H_{34}x_3, \quad x_5 = H_{45}x_4, \quad x_6 = H_{46}x_4$$

类似这样的方程称为节点方程。

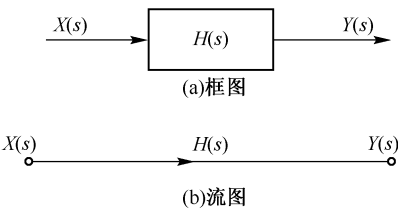


图 5.7-4 框图用信号流图表示

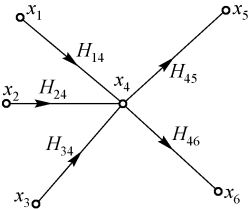


图 5.7-5 多输入多输出的节点

有了流图的概念，就可以把任何系统的方框图用流图形式来表示。例如，图 5.7-6(a)所示的方框图，可以改用信号流图表示，如图 5.7-6(b)所示。

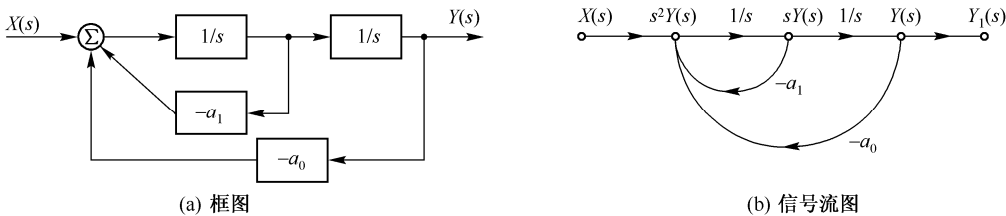


图 5.7-6 框图用信号流图表示

#### 2. 信号流图中的一些术语

参照图 5.7-6(b)，介绍一些信号流图中常用的术语。

节点（node）：表示系统中变量或信号的点。如  $X(s)$ ,  $s^2Y(s)$  等。

支路（branch）：连接两个节点之间的有向线段。

支路增益 (branch gain): 两个节点之间的增益。

输入节点 (source node) (源点): 只有输出支路的节点, 通常表示输入信号, 如  $X(s)$ 。

输出节点 (sink node) (阱点): 只有输入支路的节点, 通常表示输出信号, 如  $Y(s)$ 。

混合节点 (mix node): 既有输入支路又有输出支路的节点, 如  $s^2Y(s)$ ,  $sY(s)$  等。

通路 (path): 从任一节点出发沿着支路箭头的方向连续地穿过各相连支路到达另一节点的路径。

开通路 (open path): 通路与任一节点相交不多于一次, 如  $X(s) \rightarrow s^2Y(s) \rightarrow sY(s)$ 、 $Y(s) \rightarrow s^2Y(s)$  等。

闭通路 (close path) (环路): 如果通路的终点就是通路的起点, 并且与任何其他节点相交不多于一次, 则称为闭通路, 又称环路。如  $s^2Y(s) \rightarrow sY(s) \rightarrow s^2Y(s)$ 、 $s^2Y(s) \rightarrow sY(s) \rightarrow Y(s) \rightarrow s^2Y(s)$  等。

自环路 (self-loop): 仅含有一个支路的环路。

环路增益 (loop gain): 环路中各支路增益的乘积。

不接触环路 (disconnect loop): 两环路之间没有任何公共节点。

前向通路 (forward path): 从输入节点 (源点) 到输出节点 (阱点) 方向的通路上, 通过任何节点不多于一次的路径。如  $X(s) \rightarrow s^2Y(s) \rightarrow sY(s) \rightarrow Y(s) \rightarrow Y_1(s)$ 。

前向通路增益 (forward path gain): 前向通路中各支路增益的乘积。

### 3. 信号流图的性质

在运用信号流图时, 应该遵循流图的基本性质, 即

(1) 信号只能沿支路箭头方向传输, 支路的输出是该支路输入与支路增益的乘积。例如, 图 5.7-4(b) 中,  $Y(s) = H(s)X(s)$ 。

(2) 当节点有几个输入时, 节点将所有输入支路的信号相加, 并将其和传送给所有与该节点相连的输出支路。例如, 图 5.7-5 中,  $x_5 = H_{45}x_4$ ,  $x_6 = H_{46}x_4$ 。该性质表明, 具有两条或两条以上输入支路的节点兼有加法器的功能。

(3) 只有输入和输出支路的混合节点, 通过增加一个具有单位传输的支路, 可以把它变成输出节点。例如, 图 5.7-6(b) 中的  $Y(s)$  与  $Y_1(s)$  实际上是同一个节点, 但分成两个节点以后,  $Y(s)$  是既有输入又有输出的混合节点, 而  $Y_1(s)$  是只有输出的输出节点。

(4) 对于给定系统, 信号流图的形式不是唯一的。这是因为同一系统的方程式可以表示成不同的形式, 因而可以画出不同的信号流图。

(5) 信号流图转置后, 其系统函数保持不变。所谓转置就是流图中各支路的信号传输方向均给以调转, 同时把输入输出节点对换。如图 5.7-7(a) 和 (b) 所示, 两者实际上代表同一个系统, 因而系统函数是不变的。系统函数都是  $H(s) = \frac{b_1s + b_0}{s + a_0}$ 。

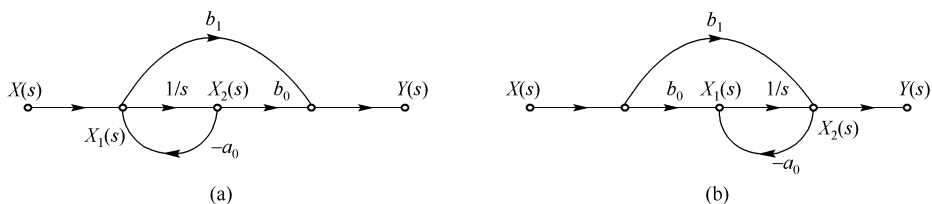


图 5.7-7 流图的转置

#### 4. 信号流图的梅森公式 (Mason formula)

应用梅森公式, 可以直接根据流图很方便地求出输入与输出之间的系统函数。

$$\text{梅森公式的形式为} \quad H = \frac{1}{\Delta} \sum_k G_k \Delta_k \quad (5.7-1)$$

式中  $H$ ——系统的输入与输出间的系统函数, 即系统的总增益;

$\Delta$ ——流图的特征行列式;

$\Delta = 1 - (\text{所有不同环路的增益之和}) + (\text{每两个互不接触环路增益乘积之和}) -$

$(\text{每三个互不接触环路增益乘积之和}) + \cdots$

$$= 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \cdots \quad (5.7-2)$$

$k$  ——表示由源点到阱点之间的第  $k$  条前向通路的标号;

$G_k$  ——表示由源点到阱点之间的第  $k$  条前向通路的增益;

$\Delta_k$  ——称为对于第  $k$  条前向通路特征行列式的余因子。它是除去与第  $k$  条前向通路相接触的环路外, 所余子图的特征行列式。

**例 5.7-1** 求图 5.7-8 中的流图的系统函数。

**解:** 为了求出特征行列式  $\Delta$ , 先求出有关参数。

图 5.7-8 共有 4 个环路, 各环路增益分别为

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \text{ 环路, } L_1 = -G_1 H_1$$

$$x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \text{ 环路, } L_2 = -G_2 H_2$$

$$x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \text{ 环路, } L_3 = -G_3 H_3$$

$$x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1 \text{ 环路, } L_4 = -G_1 G_2 G_3 H_4$$

所以

$$\sum_a L_a = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = -(G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_4)$$

只有一对两个互不接触的环路, 即  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$  与  $x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3$ , 其环路增益乘积为

$$\sum_{b,c} L_b L_c = L_1 L_3 = G_1 G_3 H_1 H_3$$

没有三个以上的互不接触的环路。所以按式(5.7-2)得

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c = 1 + (G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_4) + G_1 G_3 H_1 H_3$$

再求其他参数。图 5.7-8 有两条前向通路:

对于前向通路  $X \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow Y$ , 其增益为  $G_1 = H_1 H_2 H_3 H_5$ 。

由于各环路都与该通路相接触, 故  $\Delta_1 = 1$ 。

对于前向通路  $X \rightarrow x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow Y$ , 其增益  $G_2 = H_4 H_5$ 。不与  $G_2$  接触的环路有  $x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$ , 所以

$$\Delta_2 = 1 - \sum_a L_a = 1 + G_2 H_2$$

最后按式(5.7-1)得

$$H = \frac{Y}{X} = \frac{H_1 H_2 H_3 H_5 + H_4 H_5 (1 + G_2 H_2)}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_3 H_3 + G_1 G_2 G_3 H_4 + G_1 G_3 H_1 H_3}$$

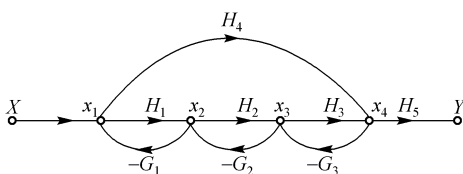


图 5.7-8 例 5.7-1 的流图

### 5.7.3 系统模拟

对于实际系统进行模拟,可以根据描述线性时不变系统输入-输出关系的微分方程进行,也可根据表征系统特性的系统函数进行。由于系统函数是代数表达式,运算较为简便,因而对系统函数模拟更为灵活方便。

对于同一个系统函数,进行不同的运算可以得到多种不同的形式。常用的有直接形式、级联(或称为串联)形式和并联形式等。

#### 1. 直接形式

以二阶系统为例,设微分方程为

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

则系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}} \quad (5.7-3)$$

令

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

其中

$$H_1(s) = \frac{W(s)}{X(s)} = \frac{1}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}} \quad H_2(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2} \quad (5.7-4)$$

所以

$$W(s) = \frac{X(s)}{1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}} \quad (5.7-5)$$

$$Y(s) = (b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2})W(s) \quad (5.7-5)$$

显然,若已知函数 $W(s)$ ,那么根据上式很容易画出它的信号流图或方框图。

式(5.7-4)可以写为

$$W(s)[1 + a_1 s^{-1} + a_0 s^{-2}] = X(s)$$

或者

$$W(s) = X(s) - a_1 s^{-1} W(s) - a_0 s^{-2} W(s) \quad (5.7-6)$$

根据上式可画出信号流图,如图 5.7-9(a)所示。再由式(5.7-5)就得到 $H(s)$ 所表征的系统的信号流图,如图 5.7-9(b)所示,图(c)是该系统的方框图。

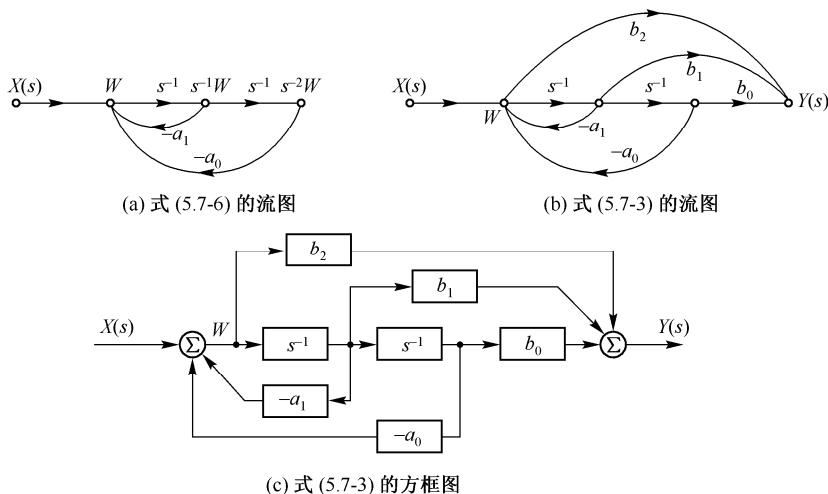


图 5.7-9 直接型结构

根据信号流图的性质, 将图 5.7-9(b)转置后, 其系统函数不变。因此, 可得另一种形式的信号流图, 如图 5.7-10(a)所示, 对应的方框图如图(b)所示。

实际上根据梅森公式可直接得出图 5.7-9(b)和图 5.7-10(a)两种形式的信号流图。将式(5.7-3)写为

$$H(s) = \frac{b_2 + b_1 s^{-1} + b_0 s^{-2}}{1 - (-a_1 s^{-1} - a_0 s^{-2})}$$

上式分母可看成是两个环路组成的特征行列式, 括号内表示两个互相接触的环路, 其增益分别为  $-a_1 s^{-1}$  和  $-a_0 s^{-2}$ 。上式分子表示三条前向通路, 其增益分别为  $b_2, b_1 s^{-1}, b_0 s^{-2}$ , 并且各子图的特征行列式都等于 1, 也就是说, 对于各前向通路而言, 没有不接触的环路。

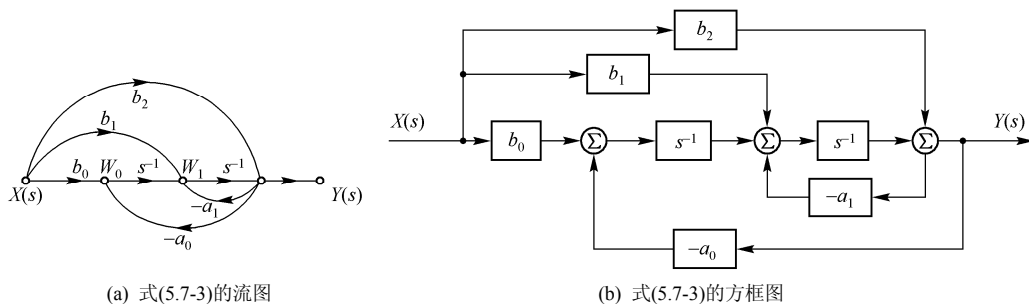


图 5.7-10 图 5.7-9 的转置形式

以上的分析方法可以推广到高阶系统的情形。如系统函数 (式中  $m \leq n$ ) 为

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m s^{-(n-m)} + b_{m-1} s^{-(n-m+1)} + \cdots + b_1 s^{-(n-1)} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \cdots + a_1 s^{-(n-1)} + a_0 s^{-n}} \quad (5.7-7)$$

由梅森公式, 上式的分母可看成是  $n$  个环路组成的特征行列式, 而且各环路都互相接触; 分子可看成是  $(m+1)$  条前向通路的增益, 而且各前向通路都没有不接触环路。这样, 就得到图 5.7-11(a)和(b)的两种直接形式的信号流图。

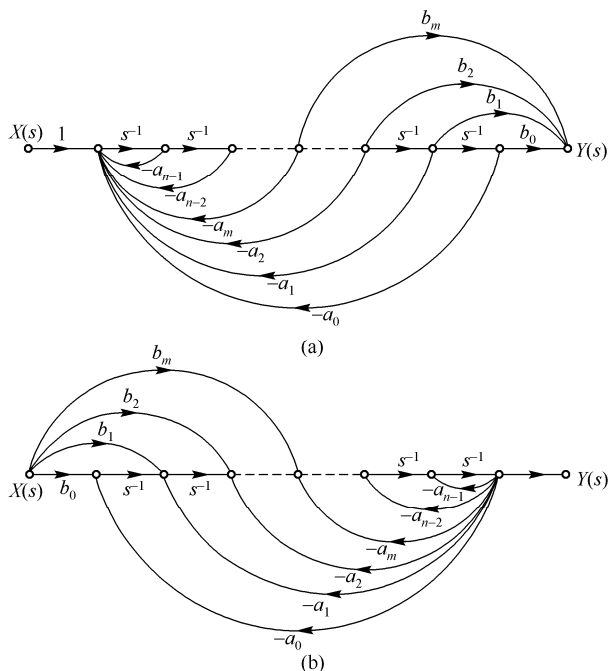


图 5.7-11 式(5.7-7)的流图

## 2. 级联形式

级联形式也称为串联形式。级联形式就是将  $H(s)$  分解为几个简单的系统函数的乘积，即

$$H(s) = A_0 H_1(s) H_2(s) \cdots H_k(s) = A_0 \prod_{i=1}^k H_i(s) \quad (5.7-8)$$

级联的一般形式如图 5.7-12 所示，其中每一子系统  $H_i(s)$  可用直接形式实现。

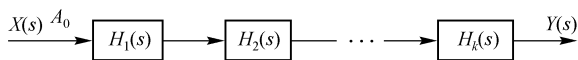


图 5.7-12 级联形式

通常，各子系统可选用一阶函数或二阶函数，分别称为一阶节或二阶节。它们的函数形式为

$$H_i(s) = \frac{1 + b_{1i}s^{-1}}{1 + a_{1i}s^{-1}} \quad (\text{一阶节}); \quad H_i(s) = \frac{1 + b_{1i}s^{-1} + b_{2i}s^{-2}}{1 + a_{1i}s^{-1} + a_{2i}s^{-2}} \quad (\text{二阶节})$$

式(5.7-8)中的系数  $A_0$  也可分摊给各子系统。一阶节和二阶节的结构如图 5.7-13 所示。图中没有画数乘器符号，只把数字标记在传输路径上。

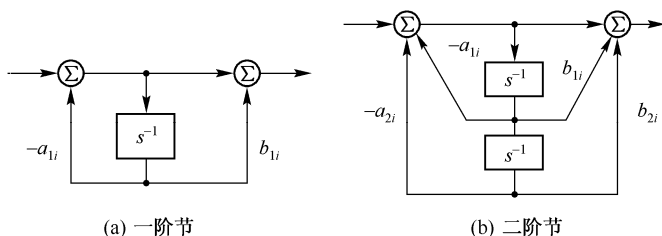


图 5.7-13 子系统结构

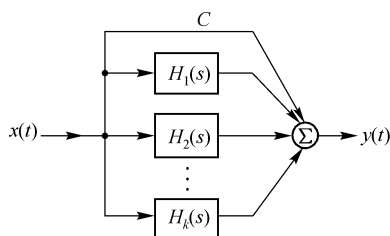


图 5.7-14 并联形式

## 3. 并联形式

并联形式是将  $H(s)$  分解为几个简单系统函数与一常数  $C$  之和，即

$$H(s) = C + H_1(s) + H_2(s) + \cdots + H_k(s) = C + \sum_{i=1}^k H_i(s) \quad (5.7-9)$$

并联的一般形式如图 5.7-14 所示，其中各子系统可用直接形式实现。

需要指出，无论用级联形式还是用并联形式实现，都需要将  $H(s)$  的分母多项式（对于级联形式还有分子多项式）分解为一阶因子和二阶因子的乘积，这些因式的系数必须是实数。也就是说， $H(s)$  的极极点可构成一阶节的分母，也可组合成二阶节的分母，而一对共轭复数极点可构成二阶节的分母。对于级联形式其分子亦然。

**例 5.7-2** 某连续系统的系统函数为  $H(s) = \frac{2s+4}{s^3+3s^2+5s+3}$ ，试分别用直接形式、级联形式和并联形式模拟此系统。

**解：** (1) 直接形式。 
$$H(s) = \frac{2s+4}{s^3+3s^2+5s+3} = \frac{2s^{-2}+4s^{-3}}{1+3s^{-1}+5s^{-2}+3s^{-3}}$$

上式的流图如图 5.7-15(a)所示，将图(a)转置得另一种直接形式的流图，如图(b)所示。其相应的方框图分别如图(c)和(d)所示。



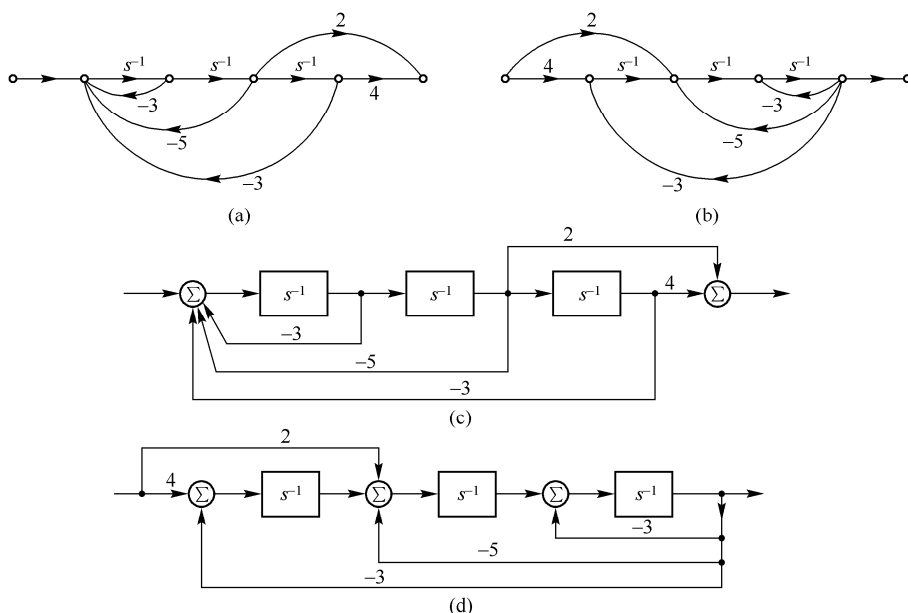


图 5.7-15 例 5.7-2 的直接形式

(2) 级联形式。对给出的系统函数，将其分子和分母进行因式分解，由于  $H(s)$  的分母有一实根  $p_1 = -1$ ，和一对共轭复根  $p_{2,3} = -1 \pm j\sqrt{2}$ ，所以

$$H(s) = \frac{2s+4}{s^3+3s^2+5s+3} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+3)}$$

将上式分解为一阶节和二阶节的级联。例如，令

$$H_1(s) = \frac{2}{s+1} = \frac{2s^{-1}}{1+s^{-1}} \quad H_2(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+3} = \frac{s^{-1}+2s^{-2}}{1+2s^{-1}+3s^{-2}}$$

其一阶节和二阶节的流图分别如图 5.7-16(a)和(b)所示。将二者级联后，如图(c)所示，其相应的方框图如图(d)所示。

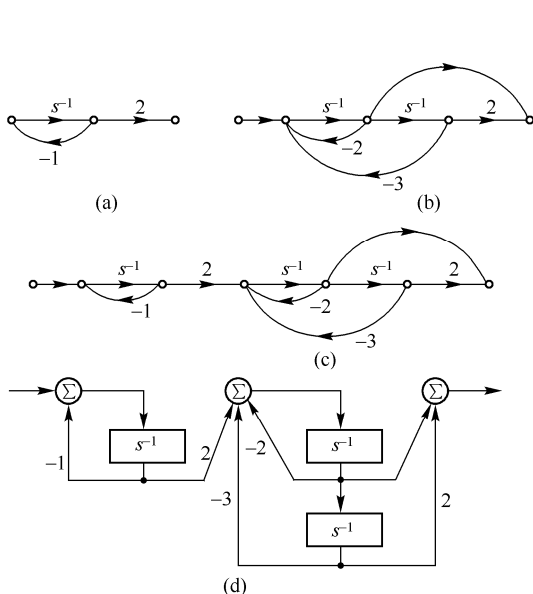


图 5.7-16 例 5.7-2 的级联形式

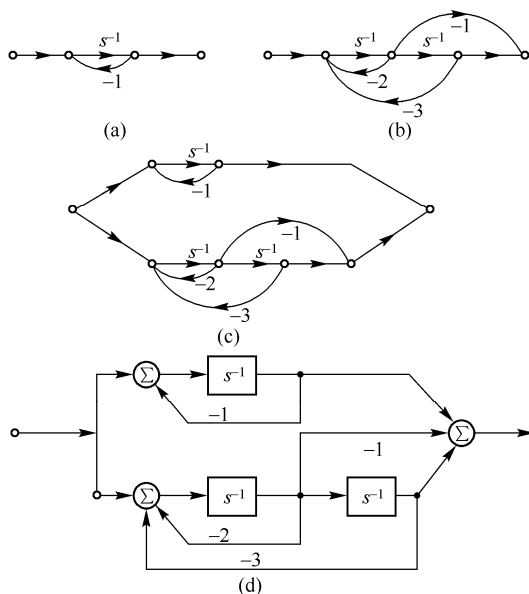


图 5.7-17 例 5.7-2 的并联形式

(3) 并联形式。将  $H(s)$  展开成部分分式

$$H(s) = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+3)} = \frac{1}{s+1} + \frac{-s+1}{s^2+2s+3}$$

$$\text{令} \quad H_1(s) = \frac{1}{s+1} = \frac{s^{-1}}{1+s^{-1}} \quad H_2(s) = \frac{-s+1}{s^2+2s+3} = \frac{-s^{-1}+s^{-2}}{1+2s^{-1}+3s^{-2}}$$

其一阶节和二阶节的流图如图 5.7-17(a)和(b)所示。将二者并联后,如图(c)所示,相应的方框图如图(d)所示。

**例 5.7-3** 电路如图 5.7-18 所示,当  $t < 0$  时, S 打开,电路已达稳定。当  $t = 0$  时,闭合 S。当  $t > 0$  后,求:

(1) 电流  $i_2(t)$  的零输入响应和零状态响应;

(2) 系统函数  $H(s) = \frac{I_2(s)}{V_i(s)}$ ;

(3) 画出系统零极点图和幅频特性曲线;

(4) 画出系统并联结构的方框图或信号流图。

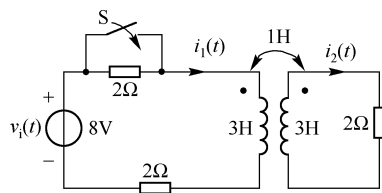


图 5.7-18 例 5.7-3 的电路

**解:** (1) 图 5.7-18 所示电路的去耦等效电路如图 5.7-19 所示。当  $t < 0$  时,电路已达稳定,则各电流的起始值为

$$i_1(0^-) = i_3(0^-) = \frac{8}{2+2} = 2\text{A} \quad i_2(0^-) = 0$$

当  $t > 0$  时,电路的  $s$  域模型如图 5.7-20 所示,以  $I_1(s)$  和  $I_2(s)$  作为变量,可以得到下列方程组

$$\begin{cases} (3s+2)I_1(s) - sI_2(s) = V_i(s) + 4 + 2 \\ -sI_1(s) + (3s+2)I_2(s) = -2 \end{cases}$$

$$\text{求得} \quad I_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} 3s+2 & V_i(s)+6 \\ -s & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3s+2 & -s \\ -s & 3s+2 \end{vmatrix}} = \frac{sV_i(s) - 4}{8s^2 + 12s + 4}$$

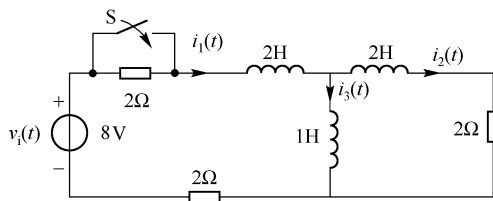


图 5.7-19 例 5.7-3 的去耦电路

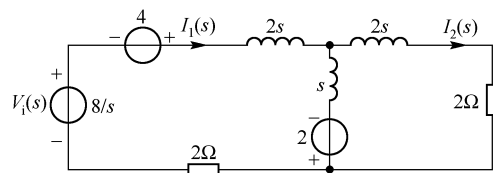


图 5.7-20 例 5.7-3 电路的  $s$  域模型

电流  $i_2(t)$  的零输入响应的像函数为

$$I_{2zi}(s) = \frac{-4}{8s^2 + 12s + 4} = \frac{-1}{(2s+1)(s+1)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+0.5}$$

取  $I_{2zi}(s)$  的拉氏逆变换

$$i_{2zi}(t) = e^{-t} - e^{-0.5t} \quad t \geq 0$$

电流  $i_2(t)$  的零状态响应的像函数为

$$I_{2zs}(s) = \frac{sV_i(s)}{8s^2 + 12s + 4} = \frac{8}{4(2s+1)(s+1)} = \frac{-2}{s+1} + \frac{2}{s+0.5}$$

取  $I_{2zs}(s)$  的拉氏逆变换

$$i_{2zs}(t) = 2e^{-0.5t} - 2e^{-t} \quad t \geq 0$$

(2) 系统函数为 
$$H(s) = \frac{I_{2zs}(s)}{V_i(s)} = \frac{s}{8s^2 + 12s + 4} = \frac{s}{8(s+1)(s+0.5)}$$

(3) 系统函数的零、极点分别为  $z_1 = 0$ ,  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -0.5$ , 如图 5.7-21 所示。幅频特性曲线如图 5.7-22 所示。

(4) 
$$H(s) = \frac{s}{8(s+1)\left(s+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4(s+1)} - \frac{1}{8\left(s+\frac{1}{2}\right)} = \frac{s^{-1}}{4(1+s^{-1})} - \frac{s^{-1}}{8\left(1+\frac{1}{2}s^{-1}\right)}$$

系统并联结构的信号流图如图 5.7-23 所示。

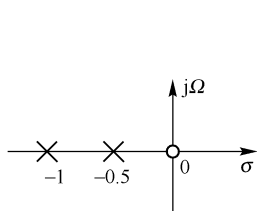


图 5.7-21 零、极点分布

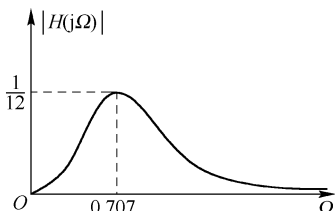


图 5.7-22 幅频特性曲线

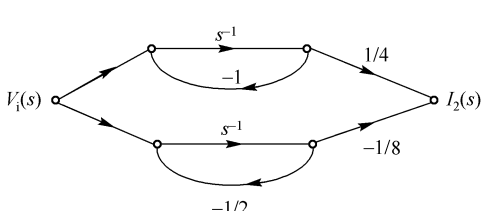


图 5.7-23 系统并联结构流图

## 5.8 系统的稳定性

在研究和设计各类系统中, 系统的稳定性十分重要。所谓稳定, 是指对于有界的激励, 只能产生有界响应的系统。换言之, 对于稳定系统, 若激励函数

$$|x(t)| \leq M_x \quad (5.8-1)$$

则响应函数必有

$$|y(t)| \leq M_y \quad (5.8-2)$$

其中  $M_x$  和  $M_y$  为有限的正实数。反之, 如果对于有界的激励而产生无限增长的响应, 则系统是不稳定的。

稳定性是系统自身的性质之一, 系统是否稳定与激励信号无关。系统的冲激响应  $h(t)$  或系统函数  $H(s)$  表征了系统的本性, 当然, 它们也会反映出系统的稳定性。所以, 判断系统是否稳定, 可以从时域或  $s$  域两方面进行。

### 1. 时域的稳定条件

连续时间系统为稳定系统的充要条件是, 系统的冲激响应  $h(t)$  绝对可积, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt \leq M \quad (5.8-3)$$

式中,  $M$  为有界正常数。现在证明这一结论。

首先证充分性。对于任意有界输入  $x(t)$ , 系统的零状态响应

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

所以

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau$$

将式(5.8-1)代入上式, 则有  $|y(t)| \leq M_x \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau$

如果  $h(t)$  绝对可积, 即式(5.8-3)成立, 则有

$$|y(t)| \leq M_x M$$

即对任意的有界输入  $x(t)$ , 系统的零状态响应均有界。因此, 式(5.8-3)是系统稳定的充分条件。

下面再证必要性。因为如果选择满足下式条件的特定的有界激励

$$x(-t) = \operatorname{sgn}[h(t)] = \begin{cases} 1 & h(t) > 0 \\ -1 & h(t) < 0 \end{cases}$$

于是有

$$x(-t)h(t) = |h(t)|$$

则根据卷积积分有

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

令  $t=0$ , 则

$$y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$$

如果  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$  无界, 则  $y(0)$  也无界, 这说明至少有一个特定的有界激励会产生无界的响应。因此式(5.8-3)也是系统稳定的必要条件。

为了符合绝对可积条件, 在  $t$  趋于无限大时, 冲激响应应趋于零, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ 。

在  $t$  未趋于无限大的一般情况下, 冲激响应  $h(t)$  中, 除了在  $t=0$  处可能有孤立的冲激函数外, 都应是有限的, 即  $|h(t)| < M$ , 其中  $0 < t < \infty$ ,  $M$  是有限的正实数。

## 2. $s$ 域的稳定条件

在复频域(即  $s$  域)中, 稳定系统的系统函数  $H(s)$  的极点都落于左半  $s$  平面。这是因为当  $H(s)$  的极点在左半  $s$  平面内(见 5.3 节)时, 它对应的冲激响应  $h(t)$  呈衰减形式, 即满足  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ , 从而系统是稳定的。

从稳定性考虑, 可划分为下述三类系统:

(1) 稳定系统(也称为渐近稳定系统):  $H(s)$  全部极点落于左半  $s$  平面, 其  $h(t)$  呈衰减形式。

(2) 不稳定系统: 若  $H(s)$  有极点落于右半  $s$  平面, 或在虚轴上具有二阶以上极点, 则对应的  $h(t)$  呈增长形式。

(3) 边界稳定系统: 若  $H(s)$  有极点落于  $s$  平面的虚轴上, 且只是一阶极点, 其余极点位于左半  $s$  平面, 则  $h(t)$  为等幅振荡或趋于非零的常数。这是上述两种类型的边界情况。

为使分类简化, 可以把边界稳定系统也划归为稳定系统。

从物理概念上讲, 无源网络不能对外部供给能量, 所以响应函数的幅度是有限的, 它们总是稳定的或边界稳定的系统。

判断  $H(s)$  的极点是否全部位于左半  $s$  平面, 可以利用劳斯准则(Routh criterion)(亦称劳斯判据)。劳斯准则可参见附录 D。

对于一阶和二阶系统来说, 问题将变得很简单, 只要  $H(s)$  分母多项式  $A(s)$  的系数  $a_i$  满足  $a_i > 0$ ,  $i=0,1,2$ , 即可保证  $H(s)$  的极点位于左半  $s$  平面, 也即  $A(s)$  之根实部都为负。此条

件即是系统稳定的充要条件。

**例 5.8-1** 已知图 5.8-1 所示的运算放大器的电压传输系数为  $A$ ，假定其输入阻抗等于无限大，输出阻抗等于零。

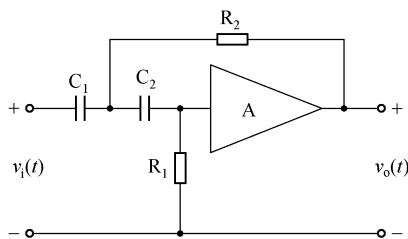


图 5.8-1 例 5.8-1 的电路

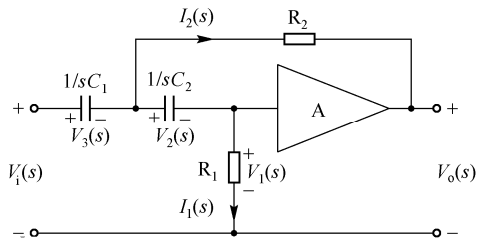


图 5.8-2 例 5.8-1 电路的  $s$  域模型

(1) 求系统函数  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ ;

(2) 要使系统稳定，则电压传输系数  $A$  应满足怎样的条件？

**解：**(1) 画出图 5.8-1 电路的  $s$  域模型，如图 5.8-2 所示。电阻  $R_1$  两端的电压的像函数  $V_1(s)$ ，以及流过电阻  $R_1$  和电容  $C_2$  的电流的像函数  $I_1(s)$  分别为

$$V_1(s) = \frac{V_o(s)}{A} \quad I_1(s) = \frac{V_o(s)}{AR_1}$$

电容  $C_2$  两端的电压的像函数为  $V_2(s) = \frac{1}{sC_2} I_1(s) = \frac{V_o(s)}{AsR_1C_2}$

流过电阻  $R_2$  的电流的像函数为

$$I_2(s) = \frac{V_1(s) + V_2(s) - V_o(s)}{R_2} = \frac{V_o(s)}{AsR_1R_2C_2} [(1-A)sR_1C_2 + 1]$$

电容  $C_1$  两端的电压的像函数为

$$V_3(s) = \frac{1}{sC_1} [I_1(s) + I_2(s)] = \frac{V_o(s)}{As^2R_1R_2C_1C_2} [sR_2C_2 + (1-A)sR_1C_2 + 1]$$

因为  $V_1(s) + V_2(s) + V_3(s) = V_i(s)$ ，则

$$\frac{V_o(s)}{A} + \frac{V_o(s)}{AsR_1C_2} + \frac{V_o(s)}{As^2R_1R_2C_1C_2} [sR_2C_2 + (1-A)sR_1C_2 + 1] = V_i(s)$$

系统函数为 
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{As^2}{s^2 + \left[ \frac{C_1 + C_2}{R_1C_1C_2} + \frac{1-A}{R_2C_1} \right]s + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

(2) 为使此系统稳定， $H(s)$  的极点应落于左半  $s$  平面，故应有  $\frac{C_1 + C_2}{R_1C_1C_2} + \frac{1-A}{R_2C_1} \geq 0$  (取等号

为边界稳定)，所以，当  $A \leq 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2C_1}{R_1C_2}$  时，系统稳定。

**例 5.8-2** 系统如图 5.8-3 所示，已知  $H_1(s) = \frac{2s+1}{s+2}$ ， $H_2(s) = \frac{1}{s+3}$ 。

- (1) 求系统函数  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ ，并讨论  $K$  满足什么条件时，系统稳定；
- (2) 当  $K = -1$  时，求系统的单位冲激响应；
- (3) 画出  $K = -1$  时系统的零极点分布图和系统幅频特性曲线；
- (4) 画出  $K = -1$  时整个系统的级联型信号流程图。

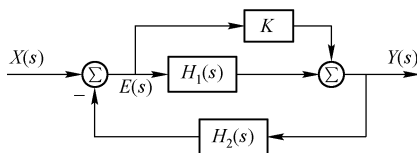


图 5.8-3 例 5.8-2 连续系统结构

解：(1) 根据系统的方框图可得：

$$\begin{cases} E(s) = X(s) - H_2(s) \cdot Y(s) \\ Y(s) = (H_1(s) + K) \cdot E(s) \end{cases}$$

求解得

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s) + K}{1 - (H_1(s) + K) \cdot H_2(s)}$$

代入已知条件

$$H(s) = \frac{(s+3)(2s+Ks+1+2K)}{s^2 + (7+K)s + 7+2K}$$

根据系统稳定的条件得

$$\begin{cases} 7+K > 0 \\ 7+2K > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K > -7 \\ K > -3.5 \end{cases}, \text{ 则 } K > -3.5 \text{ 时, 系统稳定。}$$

(2) 当  $K = -1$  时，系统函数为

$$H(s) = \frac{(s+3)(s-1)}{s^2 + 6s + 5} = 1 - \frac{4s+8}{(s+5)(s+1)} = 1 - \frac{3}{s+5} - \frac{1}{s+1}$$

系统的单位冲激响应为

$$h(t) = \delta(t) - 3e^{-5t} - e^{-t}, \quad t \geq 0$$

(3) 当  $K = -1$  时，系统的零、极点分别为  $z_1 = -3$ ,  $z_2 = 1$ ,  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -5$ ，如图 5.8-4 所示。幅频特性曲线如图 5.8-5 所示。

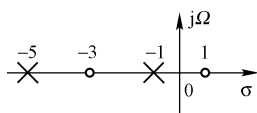


图 5.8-4 系统的零、极点分布图

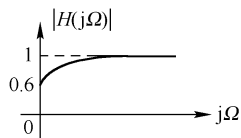


图 5.8-5 系统的幅频特性

(4)

$$H(s) = \frac{(s+3)(s-1)}{(s+5)(s+1)} = \frac{s+3}{s+5} \cdot \frac{s-1}{s+1} = \frac{1+3s^{-1}}{1+5s^{-1}} \cdot \frac{1-s^{-1}}{1+s^{-1}}$$

根据上式可画出系统级联型信号流程图，如图 5.8-6 所示。

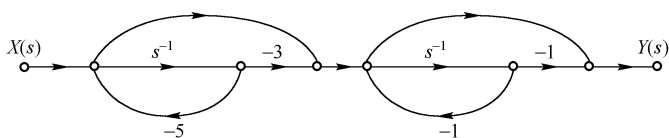


图 5.8-6 系统级联型信号流图

## 5.9 MATLAB 在连续系统变换域分析中的应用

连续时间系统的变换域分析主要借助系统函数来分析系统的性能，通过系统函数我们可以分析系统的频响特性、时域特性和稳定性等；同样，根据系统函数也可以得到系统的微分方程和系统的零、极点分布。通过系统的零、极点分析，可以得到系统的冲激响应，判断系统的稳定性，分析系统的频响特性（包括幅频特性和相频特性）。

MATLAB 的控制系统工具箱为用户提供的 `tf` 函数用来生成系统函数，`pole` 函数用来计算系统函数的极点，`zero` 函数用来计算系统函数的零点，`pzmap` 函数用来绘制系统的零极点图。`impulse` 函数用来计算系统的冲激响应；零、极点图可以判断系统的稳定性；`freqs` 函数用来计算给定系统的频响特性。

**例 5.9-1** 已知连续时间系统的系统函数为： $H(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+5}$ ，用 MATLAB 绘制其零、极点图，对应的冲激响应  $h(t)$  的波形，以及系统的幅频特性和相频特性曲线。

**解：**该系统为二阶系统，其实现程序 `exec501` 如下，得到的图形如图 5.9-1 所示。

```
num=[2 1];den=[1 3 5];           %系统函数的分子与分母多项式
sys=tf(num,den);w=0:0.5:15;      %w=0:0.5:15, 系统频响特性的频率范围
subplot(2,2,1);pzmap(sys);       %绘制零极点图
subplot(2,2,2);impz(sys);grid;    %绘制冲激响应波形
[h,w]=freqs(num,den,w);          %求系统响应函数 H(jw)
h1=abs(h); h2=angle(h);          %求幅频特性和相频特性
subplot(2,2,3);plot(w,h1);grid; xlabel('角频率');ylabel('幅度');
subplot(2,2,4);plot(w,h2*180/pi);grid; xlabel('角频率');ylabel('相位(度)');
```

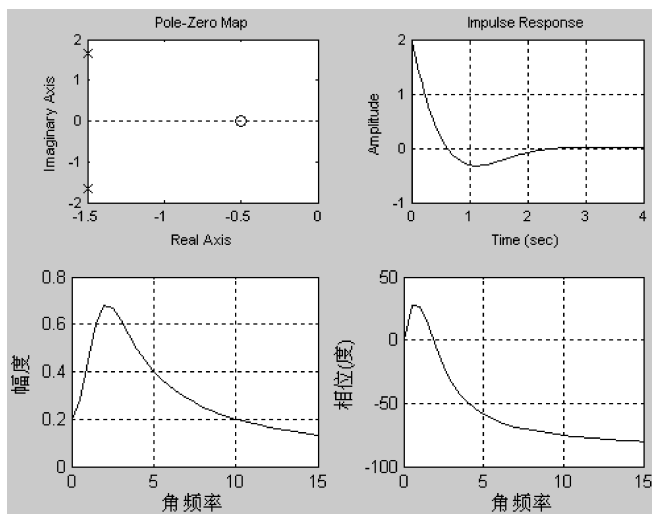


图 5.9-1 二阶系统的零极点、冲激响应和频响特性

例 5.9-2 已知连续时间系统的系统函数如下：

$$H_1(s) = \frac{2}{s+2} \quad H_2(s) = \frac{s}{s+2} \quad H_3(s) = \frac{2s}{s^2+2s+5} \quad H_4(s) = \frac{s^2+5}{s^2+2s+5}$$

用 MATLAB 绘制上述各系统的幅频特性曲线，由系统的幅频特性可以看出系统呈现什么类型的滤波器。

解：上述四个系统分别为一阶和二阶系统，其实现程序 exec502 如下，得到的图形如图 5.9-2 所示。

```
num1=[2];den1=[1 2]; num2=[1 0];den2=[1 2]; w=0:0.5:15;
num3=[2 0];den3=[1 2 5];num4=[1 0 5];den4=[1 2 5];
[h1,w]=freqs(num1,den1,w); subplot(2,2,1);plot(w,abs(h1));grid;title('|H1(jΩ)|');
[h2,w]=freqs(num2,den2,w); subplot(2,2,2);plot(w,abs(h2));grid;title('|H2(jΩ)|');
[h3,w]=freqs(num3,den3,w); subplot(2,2,3);plot(w,abs(h3));grid;title('|H3(jΩ)|');
[h4,w]=freqs(num4,den4,w); subplot(2,2,4);plot(w,abs(h4));grid;title('|H4(jΩ)|');
```

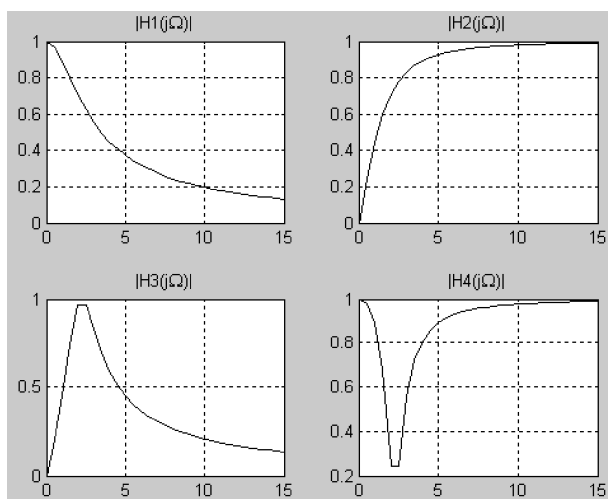


图 5.9-2 四个不同系统的幅频特性

根据系统的幅频特性可以得出：系统  $H_1(s)$  呈现低通滤波性能；系统  $H_2(s)$  呈现高通滤波性能；系统  $H_3(s)$  呈现带通滤波性能；系统  $H_4(s)$  呈现带阻滤波性能。

例 5.9-3 已知连续系统的极点位置为  $p_1 = -2 + j3$ ,  $p_2 = -2 - j3$ ，四个不同的零点位置如下所示：

(1)  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = -2$

(2)  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = -2$

(3)  $z_1 = -1$ ,  $z_2 = 2$

(4)  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 2$

绘制不同系统的相频特性，观察不同系统的相频特性，可以得出什么结论？

解：根据系统的零极点位置，可以得到四个系统的系统函数如下：

$$H_1(s) = \frac{s^2 + s - 2}{s^2 + 4s + 13} \quad H_2(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 4s + 13} \quad H_3(s) = \frac{s^2 - s - 2}{s^2 + 4s + 13} \quad H_4(s) = \frac{s^2 - 3s + 2}{s^2 + 4s + 13}$$

绘制上述系统的相频特性的 MATLAB 程序为 exec503，其程序清单如下，绘制的曲线如图 5.9-3 所示。



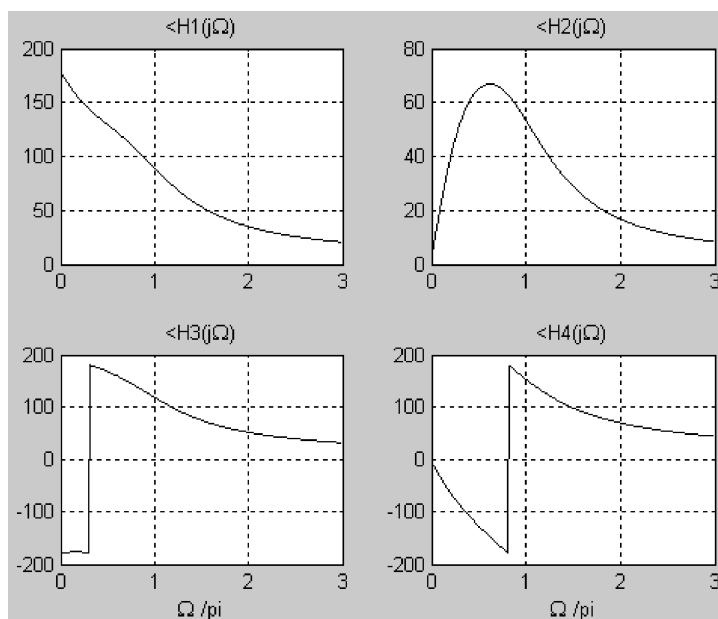


图 5.9-3 四个不同系统的相频特性

```
den=[1 4 13];num1=[1 1 -2];num2=[1 3 2]; num3=[1 -1 -2];num4=[1 -3 2];w=0:0.05:3*pi;
[h1,w]=freqs(num1,den,w);subplot(2,2,1);
plot(w/pi,angle(h1)*180/pi);grid;title('<H1(j\Omega)');
[h2,w]=freqs(num2,den,w);subplot(2,2,2);
plot(w/pi,angle(h2)*180/pi);grid;title('<H2(j\Omega)');
[h3,w]=freqs(num3,den,w);subplot(2,2,3);
plot(w/pi,angle(h3)*180/pi);grid;title('<H3(j\Omega)');xlabel('\Omega /pi');
[h4,w]=freqs(num4,den,w);subplot(2,2,4);
plot(w/pi,angle(h4)*180/pi);grid;title('<H4(j\Omega)');xlabel('\Omega /pi');
```

上述四个系统具有相同的幅频特性，观察系统的相频特性可以得出：系统  $H_2(s)$  的相位差最小，其原因是系统  $H_2(s)$  的零极点均在  $s$  左半平面，这样的系统是最小相位系统。

## 习 题

5-1 图题 5-1 所示 RC 电路中，当  $t=0$  时，开关 S 闭合，求输出信号  $v_R(t)$ 。输入信号分别为以下几种情况。

$$(1) \ x(t) = Eu(t) \quad (2) \ x(t) = (1 - e^{-at})u(t) \quad (3) \ x(t) = \begin{cases} E & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & t < 0, t > \tau \end{cases} \quad (4) \ x(t) = \sin \Omega t \cdot u(t)$$

5-2 图题 5-2 所示电路中，当  $t=0$  以前开关 S 位于“1”端，已进入稳定状态；当  $t=0$  时，开关 S 从“1”倒向“2”。求  $v_2(t)$ 。

5-3 电路如图题 5-3 所示，当  $t < 0$  时，电路元件无储能，当  $t=0$  时，开关闭合。求电压  $v_2(t)$  的表达式，并画出  $v_2(t)$  的波形。

5-4 在图题 5-4 所示电路中， $C_1 = 1F$ ， $C_2 = 2F$ ， $R = 2\Omega$ ，起始条件  $v_{C1}(0^-) = E$ ，方向如图中所示，当  $t=0$  时，开关闭合，求电流  $i_1(t)$ 。

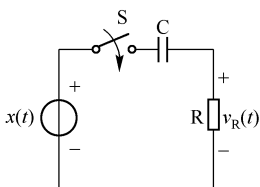


图 题 5-1

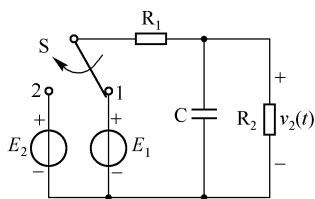


图 题 5-2

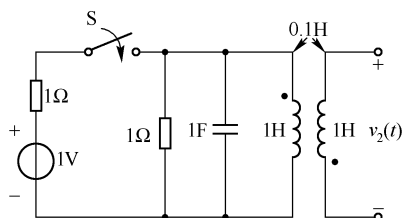


图 题 5-3

5-5 在图题 5-5 所示电路中，同时接入两个激励信号源——电压源阶跃信号  $u(t)$  和电流源冲激信号  $\delta(t)$ 。求  $v_2(t)$  ( $t > 0$ )，设起始值  $v_2(0^-) = 0$ 。

5-6 系统的微分方程为  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 2 \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$ ，起始状态为  $y'(0^-) = 4$ ， $y(0^-) = 1$ 。若激励为  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ 。

(1) 试用拉氏变换分析法求全响应；

(2) 分别求零输入响应、零状态响应和全响应。

5-7 电路如图题 5-7 所示，已知  $E = 4V$ ，当  $t < 0$  时，开关 S 打开，电路已达稳态，设  $v_1(0^-) = 0$ 。当  $t = 0$  时，开关 S 闭合。求  $t \geq 0$  时的  $v_1(t)$  和  $i(t)$ 。

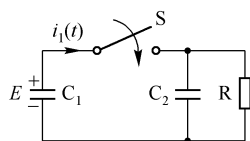


图 题 5-4

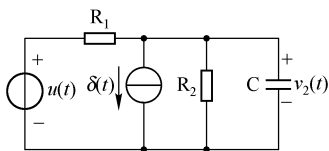


图 题 5-5

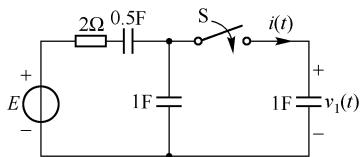


图 题 5-7

5-8 电路如图题 5-8 所示，已知  $E = 12V$ ， $L = 1H$ ， $C = 1F$ ， $R_1 = 3\Omega$ ， $R_2 = 2\Omega$ ， $R_3 = 1\Omega$ 。求  $v(t)$ 。

5-9 求图题 5-9 所示各电路的系统函数  $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ ，在  $s$  平面画出其零、极点分布。若激励信号  $v_1(t)$  为冲激函数  $\delta(t)$ ，求响应  $v_2(t)$ ，并画出波形。

5-10 写出图题 5-10 所示各梯形网络的系统函数  $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ ，在  $s$  平面示出其零、极点分布。

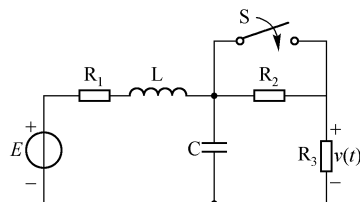


图 题 5-8

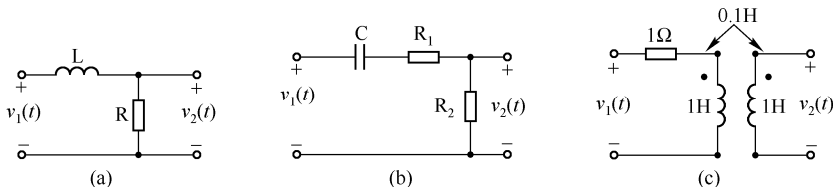


图 题 5-9

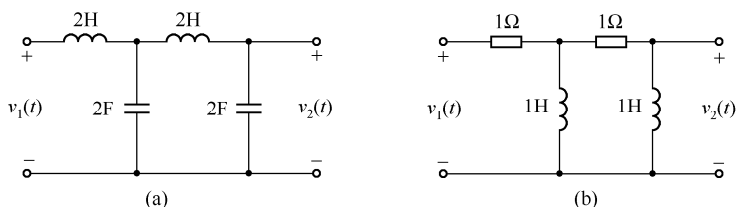


图 题 5-10

5-11 已知策动点阻抗函数分别为下列各式，试画出对应的电路图。

$$\begin{array}{lll} (1) 1+s & (2) s+\frac{1}{s} & (3) 1+\frac{1}{s} \\ (4) \frac{s}{s^2+1} & (5) \frac{s}{1+s} & (6) \frac{s}{s^2+s+1} \end{array}$$

5-12 同上题，但改为策动点导纳函数。

5-13 已知系统函数  $H(s) = \frac{s^2+4s+5}{s^2+3s+2}$ ，若：

$$(1) x(t) = e^{-3t}u(t), y(0^-) = 1, y'(0^-) = 1 \quad (2) x(t) = e^{-t}u(t), y(0^-) = y'(0^-) = 0$$

试求系统全响应  $y(t)$ 。

5-14 已知激励信号为  $x(t) = e^{-t}u(t)$ ，零状态响应为  $y(t) = (0.5e^{-t} - e^{-2t} + 2e^{3t})u(t)$ ，求此系统的冲激响应  $h(t)$ 。

5-15 已知系统的阶跃响应为  $g(t) = (1 - e^{-2t})u(t)$ ，为使其零状态响应为  $y(t) = (1 - e^{-2t} - te^{-2t})u(t)$ ，求激励信号  $x(t)$ 。

5-16 某系统的起始状态一定，已知输入  $x_1(t) = \delta(t)$  时，全响应为  $y_1(t) = -3e^{-t}$ ， $t \geq 0$ ；输入  $x_2(t) = u(t)$  时，全响应为  $y_2(t) = 1 - 5e^{-t}$ ， $t \geq 0$ 。试求输入  $x(t) = tu(t)$  时的全响应  $y(t)$ 。

\*\*5-17 已知 LTI 系统的微分方程如下：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 2 \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau + 2x(t)$$

当  $x(t) = e^{-2t}u(t)$ ， $y(0^-) = 1$ ， $y'(0^-) = 2$  时，求系统的零输入响应  $y_{zi}(t)$ 、零状态响应  $y_{zs}(t)$  以及全响应  $y(t)$ 。

5-18 电路如图题 5-18 所示。

(1) 写出系统函数  $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ ，并在  $s$  平面上画出  $H(s)$  的零、极点分布；

(2) 若激励为  $v_1(t) = 10 \sin t \cdot u(t)$ ，求响应  $v_2(t)$ ，并指出自由响应、强迫响应、暂态响应和稳态响应各分量。

5-19 如图题 5-19 所示电路。

(1) 写出系统函数  $H(s) = \frac{V_0(s)}{X(s)}$ ；

(2) 若激励信号为  $x(t) = \cos 2t \cdot u(t)$ ，为使响应中不存在正弦稳态分量，求  $L$  和  $C$  的值；

(3) 若  $R = 1 \Omega$ ， $L = 1 \text{ H}$ ，按第 (2) 问条件，求  $v_0(t)$ 。

5-20 如图题 5-20 所示电路，已知激励信号为  $x(t) = (3e^{-2t} + 2e^{-3t})u(t)$ ，求响应  $v_2(t)$ ，并指出响应  $v_2(t)$  中的强迫分量、自由分量、暂态分量与稳态分量各分量。

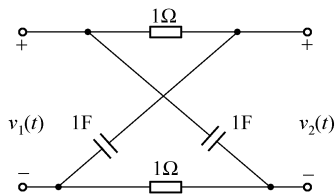
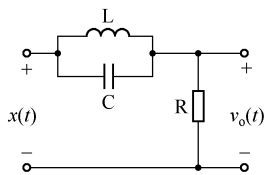
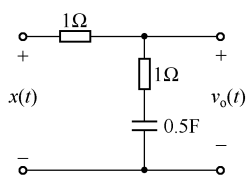


图 题 5-18



题 图 5-19



题 图 5-20

5-21 已知系统函数为  $H(s) = \frac{1}{s+1}$ ，在下列信号激励时，分别求稳态响应。

(1)  $x(t) = \sin t \cdot u(t)$

(2)  $x(t) = \sin(t - t_0) u(t - t_0)$

(3)  $x(t) = \sin(t - t_0) u(t)$

(4)  $x(t) = \sin t \cdot u(t - t_0)$

5-22 已知某系统的系统函数  $H(s)$  的零、极点如图题 5-22 所示, 若冲激响应的初值为  $h(0^+) = 2$ , 激励信号为  $x(t) = \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \cdot u(t)$ , 求稳态响应。

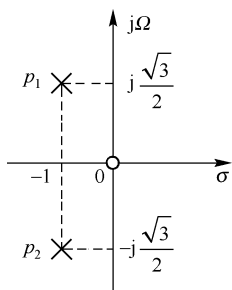


图 题 5-22

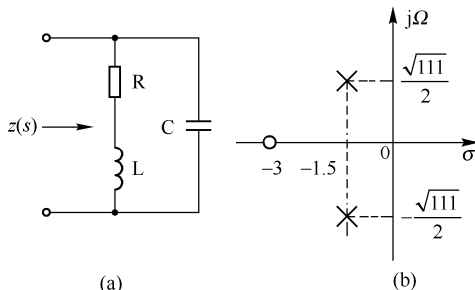


图 题 5-23

5-23 已知图题 5-23(a)所示电路的输入端阻抗为  $Z(s) = \frac{k(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)}$ 。

(1) 写出以元件参数  $R, L, C$  表示的零极点  $z_1, p_1, p_2$  之位置;

(2) 若  $Z(s)$  的零、极点如图题 5-23(b)所示, 已知  $Z(j0) = 1$ , 求  $R, L, C$  的值。

5-24 若  $H(s)$  的零、极点如图题 5-24 所示, 试讨论它们分别是哪种滤波网络 (低通、高通、带通、带阻), 并绘出各自的幅频特性曲线。

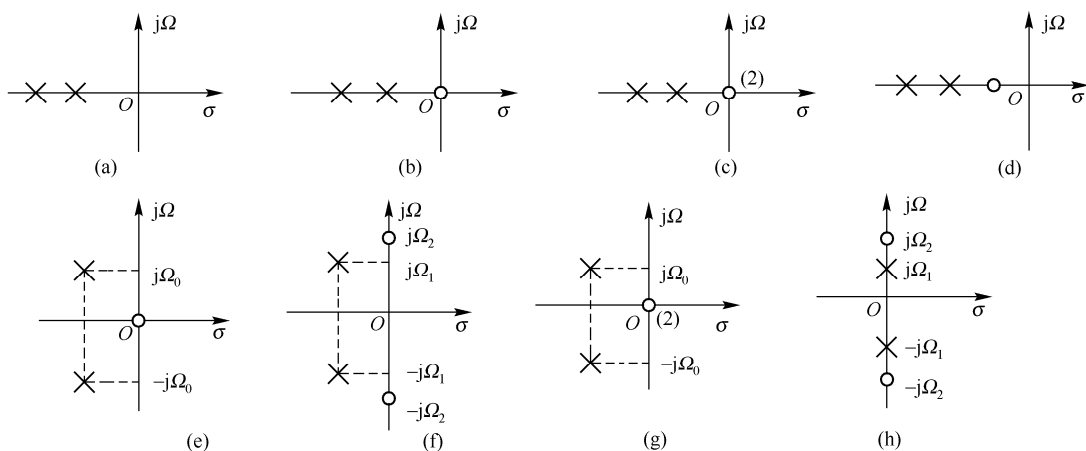


图 题 5-24

5-25 已知两系统的零、极点分别如图题 5-25(a)和(b)所示, 并已知  $H(\infty) = 1$ , 试分别写出各自的  $H(s)$  的表达式, 并画出相对应的幅频特性及相频特性曲线。

5-26 设系统函数如下, 试用矢量作图法粗略绘出幅频特性与相频特性曲线。

(1)  $H(s) = \frac{1}{s}$

(2)  $H(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2s + 5}$

(3)  $H(s) = \frac{s^2 + 1.02}{s^2 + 1.21}$

(4)  $H(s) = \frac{3(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$

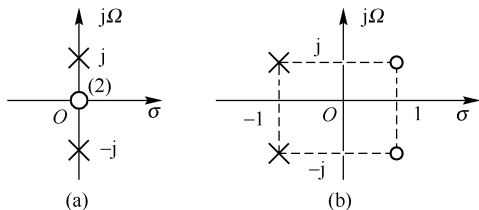


图 题 5-25

5-27 图题 5-27 示出了几幅  $s$  平面零、极点分布图, 分别指出它们是否是最小相位系统。如果不是, 应由零、极点如何分布的最小相位系统和全通系统组合而成?

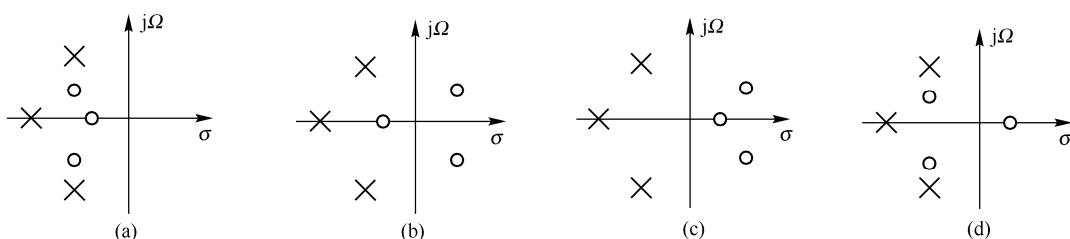
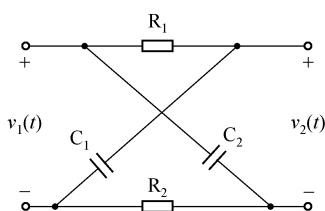


图 题 5-27

5-28 图题 5-28 所示格形网络, 写出系统函数  $H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ 。设  $C_1 R_1 < C_2 R_2$ , 在  $s$  平面画出  $H(s)$  零、极点分布图, 指出是否为全通网络。在网络参数满足什么条件下才能构成全通网络?



题 图 5-28

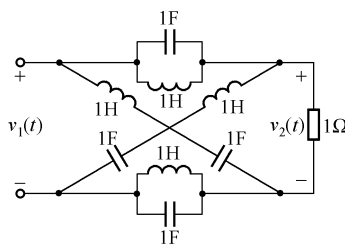


图 题 5-29

5-30 画出图题 5-30 中方框图所对应的流图形式, 并用梅森公式求其系统函数  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ 。

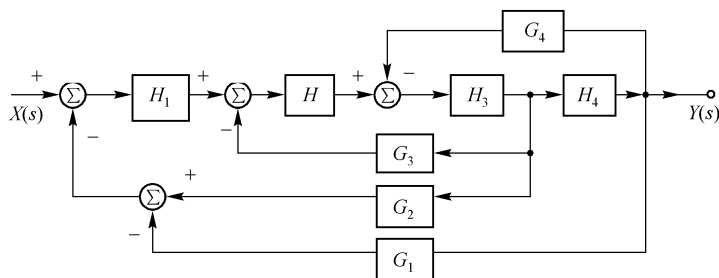


图 题 5-30

5-31 求图题 5-31 所示各流图的增益。

5-32 试绘出下列微分方程描述的系统直接形式的模拟框图或信号流图。

$$(1) \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$(2) \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 3 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2x(t)$$

5-33 用级联形式和并联形式模拟上题的系统, 并画出方框图。

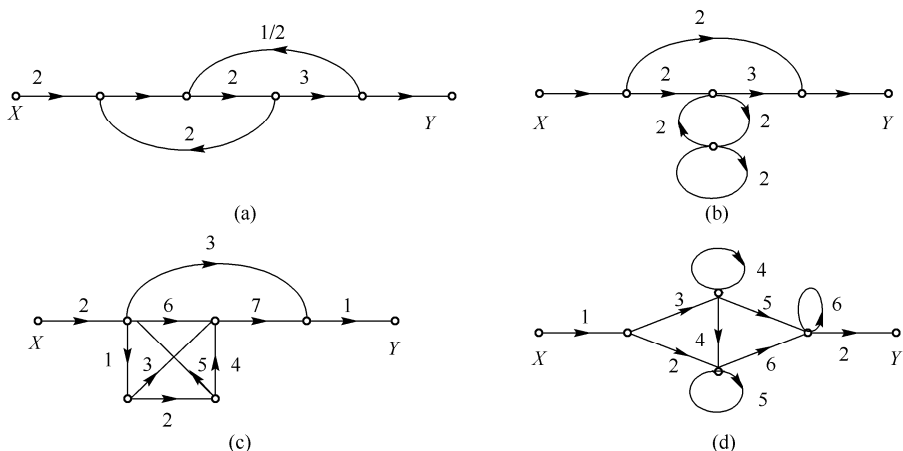


图 题 5-31

\*5-34 已知因果线性时不变系统的系统函数为  $H(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6}$ ，起始条件为  $y(0^-) = 1$ ， $y'(0^-) = 2$ ，

激励信号为  $x(t) = \delta(t) + u(t)$

- (1) 求系统的零输入响应  $y_{zi}(t)$  和零状态响应  $y_{zs}(t)$ ；
- (2) 画出  $H(s)$  的零极点分布图，并画出系统的幅频特性和相频特性曲线；
- (3) 画出串联形式的结构框图或流图。

\*5-35 图题 5-35 所示反馈电路中， $kv_2(t)$  是受控源。

- (1) 求系统函数  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ ；
- (2)  $k$  满足什么条件时系统稳定？

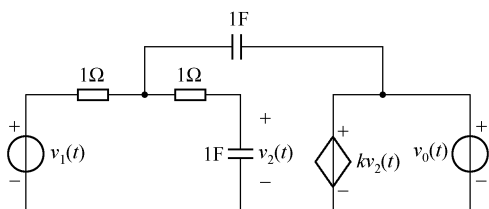


图 题 5-35

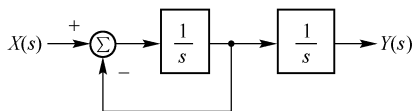


图 题 5-36

\*5-36 系统如图题 5-36 所示（设系统初始无储能）。

- (1) 求系统函数  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ ，并讨论系统的稳定性；
- (2) 粗略画出系统的幅频特性与相频特性曲线；
- (3) 求系统的冲激响应与阶跃响应；
- (4) 若激励信号为  $x(t) = u(t) - u(t-1)$ ，求响应  $y(t)$ ，并指出暂态响应与稳定响应各分量。

\*\*5-37 图题 5-37 所示电路中有 3 个受控电流源。

- (1) 求系统函数  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ ；
- (2) 当  $k=1$  时，求系统的单位冲激响应。

\*\*5-38 已知图题 5-38 所示运算放大器的电压传输系数为  $A$ ，假定其输入阻抗为无穷大，输出阻抗为零，

求系统函数  $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$ 。

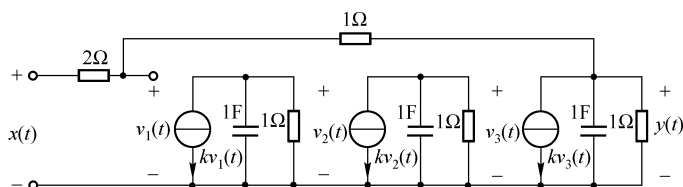


图 题 5-37

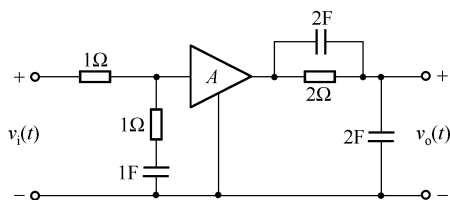


图 题 5-38

\*\*5-39 系统如图题 5-39 所示, 已知  $H_1(s) = \frac{2s}{s+1}$ ,  $H_2(s) = \frac{1}{s+2}$ 。

(1) 求系统函数  $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ , 并讨论  $K$  满足什么条件时, 系统稳定;

(2) 当  $K = -0.5$  时, 求系统的单位冲激响应;

(3) 画出  $K = -0.5$  时系统的零极点分布图和系统幅频特性曲线;

(4) 画出  $K = -0.5$  时整个系统的直接型信号流图。

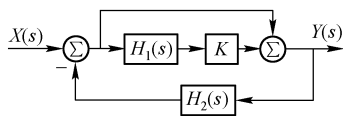


图 题 5-39

以下为 MATLAB 习题

5-40 已知连续时间系统的系统函数为  $H(s) = \frac{2s+3}{s(s^2+2s+6)}$ , 用 MATLAB 绘制其零、极点图, 对应的

冲激响应  $h(t)$  的波形, 以及系统的幅频特性和相频特性曲线。

5-41 已知各连续时间系统的系统函数分别如下所示

$$H_1(s) = \frac{2s}{s+3}, \quad H_2(s) = \frac{s-1}{s+3}, \quad H_3(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+7}, \quad H_4(s) = \frac{s^2+4}{s^2+3s+7}$$

用 MATLAB 绘制上述各系统的幅频特性曲线, 由系统的幅频特性判断系统的类型。

5-42 已知连续系统的极点位置为  $p_1 = -3 + j1$ ,  $p_2 = -3 - j1$ , 四个不同的零点位置如下所示。

(1)  $z_1 = 0.5$ ,  $z_2 = -3$  (2)  $z_1 = -0.5$ ,  $z_2 = -3$  (3)  $z_1 = -0.5$ ,  $z_2 = 3$  (4)  $z_1 = 0.5$ ,  $z_2 = 3$

绘制不同系统的相频特性。观察不同系统的相频特性, 可以得出什么结论?

## 第 6 章 傅里叶变换的应用

在第 3 章中，我们讨论了连续时间信号的傅里叶变换分析，在第 5 章中，介绍了连续时间系统的傅里叶变换分析。本章将介绍傅里叶变换的应用，重点介绍信号的传输与滤波、模拟滤波器的基本概念、调制与解调及信号的采样等内容。

### 6.1 信号的传输与滤波

系统对于信号的作用大体上可以分为两类：一类是传输；另一类是滤波。传输要求信号尽量不失真，而滤波则要滤除或减弱不希望的有关频率分量，也就是有意识地产生失真 (distortion)。下面对这两方面的问题进行分析。

#### 6.1.1 无失真传输

信号无失真传输 (distortionless transmission) 是指系统的响应信号与激励信号相比，只有幅度大小和出现时间的不同，而没有波形上的变化。下面讨论无失真传输的条件。

##### 1. 时域条件

设激励信号为  $x(t)$ ，响应信号为  $y(t)$ ，根据无失真传输的概念，可以直接写出无失真传输的时域条件

$$y(t) = Kx(t - t_0) \quad (6.1-1)$$

式中， $K$  是一常数， $t_0$  称为滞后时间，满足此条件时， $y(t)$  波形是  $x(t)$  波形经过  $t_0$  时间的滞后。虽然幅度上有系数  $K$  的变化，但波形形状不变，如图 6.1-1 所示。

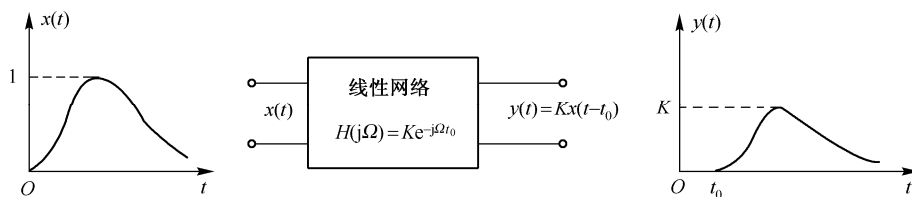


图 6.1-1 线性系统的无失真传输

##### 2. 频域条件

下面将讨论为满足式(6.1-1)，实现无失真传输，频响特性  $H(j\Omega)$  应满足的条件。

设  $x(t)$  和  $y(t)$  的傅里叶变换分别为  $X(j\Omega)$  和  $Y(j\Omega)$ 。对式(6.1-1)两边取傅里叶变换，并利用时移特性，可得

$$Y(j\Omega) = KX(j\Omega)e^{-j\Omega t_0}$$



此外, 由于

$$Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega)$$

因此, 可得

$$H(j\Omega) = Ke^{-j\Omega t_0} \quad (6.1-2)$$

这就是无失真传输的频域条件。上式也可写成

$$\begin{cases} |H(j\Omega)| = K \\ \varphi(\Omega) = -\Omega t_0 \end{cases} \quad (6.1-3)$$

这表明无失真传输系统应满足两个条件: 一是系统的幅频特性在整个频率范围 ( $-\infty < \Omega < +\infty$ ) 内应为常数; 二是系统的相频特性在整个频率范围内应与  $\Omega$  成正比线性变化, 即它是一条斜率为  $-t_0$  的通过原点的直线。如图 6.1-2 所示。

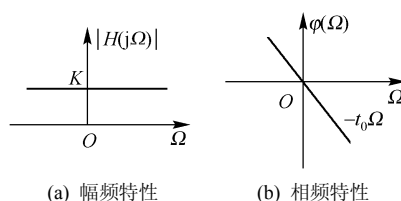


图 6.1-2 无失真传输系统的特性

## 6.1.2 理想滤波器

在信号处理过程中, 常常会遇到在有用的信号上叠加无用噪声的问题。根据有用信号与噪声的不同特性, 消除或减弱噪声, 提取有用信号的过程称为滤波, 实现滤波功能的系统称为滤波器 (filter)。当噪声与有用信号具有不同的频带分布时, 它们通过滤波器后, 噪声被减弱乃至消除, 有用信号得到保留。所谓理想滤波器是指, 它可以将有用的频率分量无失真地传输, 而将无用的频率分量完全截止。即理想滤波器频响特性为: 在通带 (pass-band) 内, 滤波器的幅频特性为常数, 相频特性呈线性; 而在阻带 (stop-band) 内, 滤波器的幅频特性立即降为零, 而相频特性如何则无关紧要。

根据通带和阻带位置不同, 理想滤波器可分为低通 (low-pass)、高通 (high-pass)、带通 (band-pass) 和带阻 (band-stop) 等类型。它们的幅频特性如图 6.1-3 所示 (这里我们只画了  $\Omega > 0$  的部分,  $\Omega < 0$  的部分对称于纵轴)。

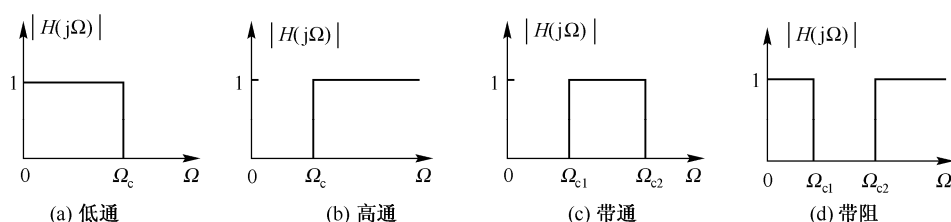


图 6.1-3 理想滤波器的幅频特性

### 1. 理想低通滤波器

具有图 6.1-4 所示的幅频特性与相频特性的系统称为理想低通滤波器 (ideal low-pass filter)。在通带 ( $|\Omega| < \Omega_c$ ) 内, 其幅频特性恒为 1 (也可以是常数  $K$ ), 相频特性与频率成正比线性变化; 在阻带 ( $|\Omega| > \Omega_c$ ) 内, 其幅频特性等于零。也就是说, 理想低通滤波器将频率低于  $\Omega_c$  的所有信号予以无失真地传送, 而将频率高于  $\Omega_c$  的信号完全抑制,  $\Omega_c$  称为截止频率 (cutoff frequency)。

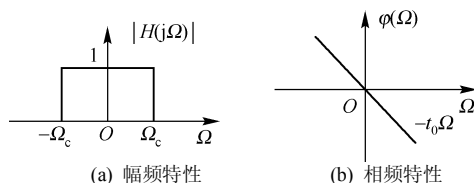


图 6.1-4 理想低通滤波器的特性

这样, 理想低通滤波器的频响特性可写为

$$H(j\Omega) = |H(j\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)} = \begin{cases} e^{-j\Omega t_0}, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (6.1-4)$$

或写为

$$|H(j\Omega)| = \begin{cases} 1, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (6.1-5)$$

$$\varphi(\Omega) = -\Omega t_0 \quad (6.1-6)$$

下面分析几种典型信号通过理想低通滤波器的传输, 以便得出一些有用的结论。

### (1) 冲激响应

将  $H(j\Omega)$  进行傅里叶逆变换, 不难求得理想低通滤波器的冲激响应。

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}[H(j\Omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} e^{-j\Omega t_0} e^{j\Omega t} d\Omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{j\Omega(t-t_0)}}{j(t-t_0)} \Big|_{-\Omega_c}^{\Omega_c} = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}[\Omega_c(t-t_0)] \end{aligned} \quad (6.1-7)$$

冲激响应的波形如图 6.1-5(b)所示, 为了与激励信号做对比, 在图 6.1-5(a)中画出了激励信号  $\delta(t)$  的波形。由图可见, 冲激响应的波形不同于冲激信号的波形, 产生了很大的失真。这是因为理想低通滤波器是一个带限系统, 而冲激信号  $\delta(t)$  的频带是无限宽的。冲激响应主峰出现的时刻 ( $t = t_0$ ) 比冲激信号输入的时刻 ( $t = 0$ ) 延迟了一段时间  $t_0$ , 它正是理想低通滤波器相位特性的斜率。另外, 冲激响应在  $t < 0$  时也存在, 这个结果是由于理想低通滤波器具有实际上不可能实现的理想特性, 所以理想低通滤波器是一个非因果系统。也就是说, 理想低通滤波器在物理上是不可实现的。然而, 只要可实现的滤波网络能够做到相当接近于理想滤波特性, 那么, 有关理想滤波器的研究就不因其无法实现而失去价值。实际的低通滤波器将在 6.2 节中介绍。

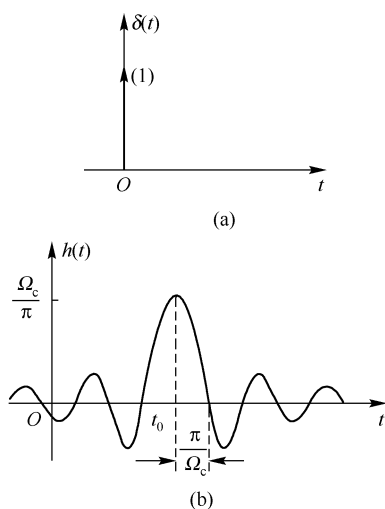


图 6.1-5 理想低通滤波器的冲激响应

### (2) 阶跃响应

如果理想低通滤波器的输入是一个单位阶跃信号  $x(t) = u(t)$ , 则其响应为阶跃响应  $g(t)$ , 它可以通过对冲激响应  $h(t)$  的积分而得到, 即

$$g(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}[\Omega_c(\tau - t_0)] d\tau = \int_{-\infty}^t \frac{\sin \Omega_c(\tau - t_0)}{\pi(\tau - t_0)} d\tau$$

在上式中令  $x = \Omega_c(\tau - t_0)$ , 则  $d\tau = dx / \Omega_c$ , 积分上限  $t$  变为  $\Omega_c(t - t_0)$ , 于是

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\Omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx + \int_0^{\Omega_c(t-t_0)} \frac{\sin x}{x} dx \right]$$

上式中的第一项积分  $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ ；第二项是函数  $\frac{\sin x}{x}$  的积分，称为“正弦积分(sine integral)”。

在一些数学书中已制成标准表格或曲线，以符号  $\text{Si}(y)$  来表示，即  $\text{Si}(y) = \int_0^y \frac{\sin x}{x} dx$ 。

函数  $\frac{\sin x}{x}$  与  $\text{Si}(y)$  曲线同时画于图 6.1-6 中，可以看到  $\text{Si}(y)$  是  $y$  的奇函数，随着  $y$  值的增加， $\text{Si}(y)$  从 0 开始增大，以后围绕  $\pi/2$  起伏振荡，随着  $t$  的增大，振荡幅度逐渐衰减而趋于  $\pi/2$ ，各极值点与函数  $\frac{\sin x}{x}$  的零点对应。例如  $\text{Si}(y)$  的第一个峰点就出现在  $y = \pi$  处。

引用以上有关数学结论，阶跃响应可以写为

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\Omega_c(t - t_0)] \quad (6.1-8)$$

单位阶跃激励  $u(t)$  及其阶跃响应  $g(t)$  分别如图 6.1-7(a)和(b)所示。从图中可以看出，阶跃响应比阶跃输入延迟一段时间  $t_0$ 。当  $t = t_0$  时， $g(t) = 1/2$ ， $t_0$  仍是理想低通滤波器相频特性的斜率。此时阶跃响应的波形并不像阶跃信号波形那样陡直上升，这表明阶跃响应的建立需要一段时间。同时波形出现振荡，这也是由于理想低通滤波器是一个带限系统所引起的。在  $t = t_0$  处，阶跃响应波形的斜率最大（因为阶跃响应波形的斜率等于  $\frac{dg(t)}{dt} = h(t)$ ，在  $t = t_0$  处  $h(t)$  为极大值）。

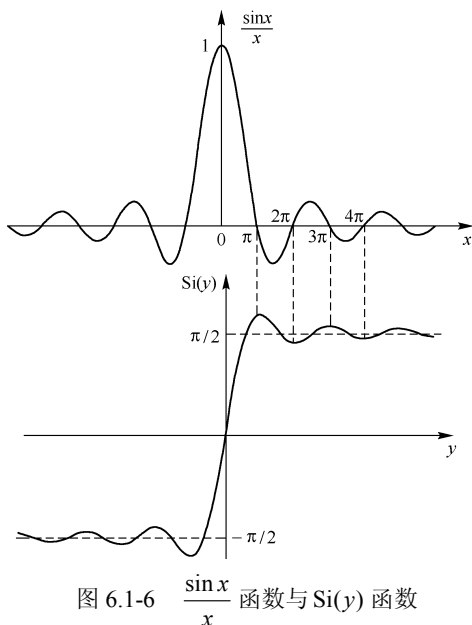


图 6.1-6  $\frac{\sin x}{x}$  函数与  $\text{Si}(y)$  函数

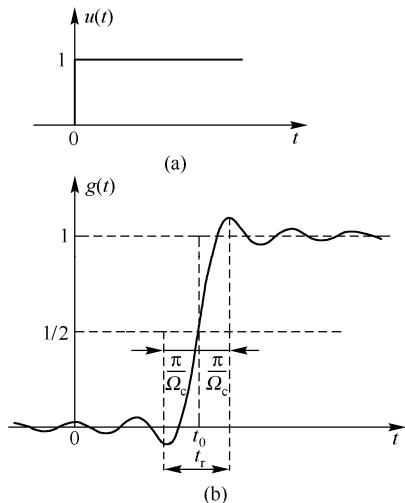


图 6.1-7 理想低通滤波器的阶跃响应

把阶跃响应的上升时间  $t_r$  定义为：阶跃响应从最小值上升到最大值所需的时间。由图 6.1-7(b) 可以看出，上升时间（rise time）

$$t_r = 2\pi/\Omega_c = 1/B_f \quad (6.1-9)$$

式中， $B_f = \Omega_c/2\pi$  是将角频率折合为频率的滤波器带宽（截止频率）。因此我们得到如下重要结论：阶跃响应的上升时间  $t_r$  与理想低通滤波器的截止频率（带宽）成反比。也就是说，

理想低通滤波器带宽越宽，即  $\Omega_c$  越高，阶跃响应的上升时间  $t_r$  就越短。当  $\Omega_c \rightarrow \infty$  时，则  $t_r \rightarrow 0$ ，此时，理想低通滤波器就成为无失真传输系统。

利用理想低通滤波器的阶跃响应很容易求得理想低通滤波器对于矩形脉冲的响应。设激励信号（矩形脉冲）的表达式为

$$x_1(t) = u(t) - u(t - \tau)$$

其波形如图 6.1-8(a)所示。

根据线性时不变特性，理想低通滤波器对矩形脉冲的响应为

$$y_1(t) = g(t) - g(t - \tau) = \frac{1}{\pi} \{ \text{Si}[\Omega_c(t - t_0)] - \text{Si}[\Omega_c(t - t_0 - \tau)] \} \quad (6.1-10)$$

响应的波形如图 6.1-8(b)所示。

从图中可以看出：矩形脉冲响应除了比矩形脉冲输入延迟一段时间  $t_0$  外，矩形脉冲响应的波形也不再是矩形脉冲，即产生了失真。失真的程度既与理想低通滤波器的频带宽度有关，也与矩形脉冲的频带宽度或脉冲宽度有关（前面已指出，矩形脉冲信号的频带宽度与脉冲宽度成反比）。为了具体地说明这一关系，在图 6.1-9 中，画出了理想低通滤波器的频带宽度不同时，矩形脉冲响应的波形。由图可知，当理想低通滤波器的频带宽度远大于矩形脉冲的频带宽度，即  $\Omega_c \gg \Delta\Omega$ （ $\Delta\Omega$  为矩形脉冲的频带宽度）时，响应波形近似于矩形脉冲的波形；当  $\Omega_c < \Delta\Omega$  时，响应波形上升与下降时间连在一起，完全丢失了激励信号的脉冲形象。

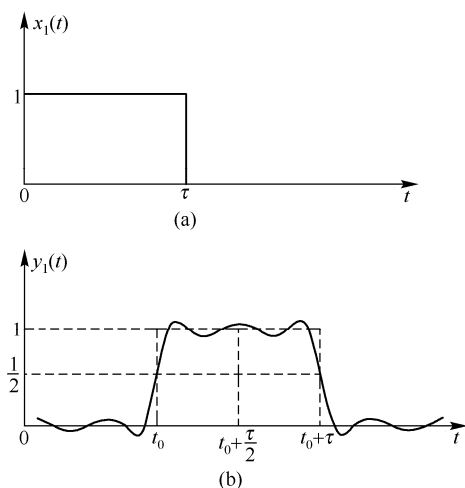


图 6.1-8 理想低通滤波器的矩形脉冲响应

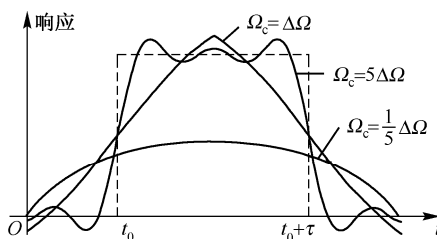


图 6.1-9 理想低通滤波器的频带宽度不同时矩形脉冲响应

借理想低通滤波器的阶跃响应的有关结论，可以解释吉伯斯现象。在 3.1 节中曾讲到，周期信号波形经过傅里叶级数分解以后，取有限项级数相加可以逼近原信号。所谓吉伯斯现象是指，对于具有不连续点（跳变点）的波形，所取级数项数越多，近似波形的均方误差虽可减小，但在跳变点处的峰值不能减小，此峰值随着所取级数的项数的不断增多，而逐渐向跳变点靠近，但峰值趋近于跳变值的 8.95% 左右。

经计算，阶跃响应  $g(t)$  的第一个极大值发生在  $t = t_0 + \pi / \Omega_c$  处，将它代入到式(6.1-8)中，得到阶跃响应的极大值

$$g_{\max} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\Omega_c(t - t_0)] \Big|_{t=t_0 + \pi / \Omega_c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\pi) \approx 1.0895$$

也即，第一个峰值约为跳变值的 8.95%。如果我们增大理想低通滤波器的频带宽度  $\Omega_c$ ，可以使阶跃响应的上升时间减小，然而，却不能改变 8.95% 峰值的幅度。

理想低通滤波器对于矩形脉冲的响应同样会出现此现象。图 6.1-10(a) 所示的矩形脉冲的频谱如图 6.1-10(b) 所示。将此矩形脉冲通过频响特性如图 6.1-10(d) 所示的理想低通滤波器 ( $\Omega_c = 4\pi$ )，其响应波形如图 6.1-10(c) 所示。当加大此低通网络的频带宽度 ( $\Omega_c = 8\pi$ ) 时，如图 6.1-10(f) 所示，允许激励信号的更多高频成分通过网络，于是，响应波形得到改善，如图 6.1-10(e) 所示，但在跳变点的上冲仍然逼近 8.95%。

当把图 6.1-10(a) 的矩形脉冲接到理想低通滤波器输入端时，从频域角度分析，相当于利用图 6.1-10(d) 的矩形频响特性为图 6.1-10(b) 的频谱“开窗”，在矩形“窗口”内只看到图 6.1-10(b) 的一部分频率分量。这时，可以把图 6.1-10(d) 所示的频谱函数称为“窗函数(window function)”。利用矩形窗函数滤取信号频谱时，在时域的不连续点要出现上冲。理论研究表明，改用其他形式的“窗函数”有可能减小上冲。有关“窗函数”的详细讨论可参考有关《数字信号处理》等教材。

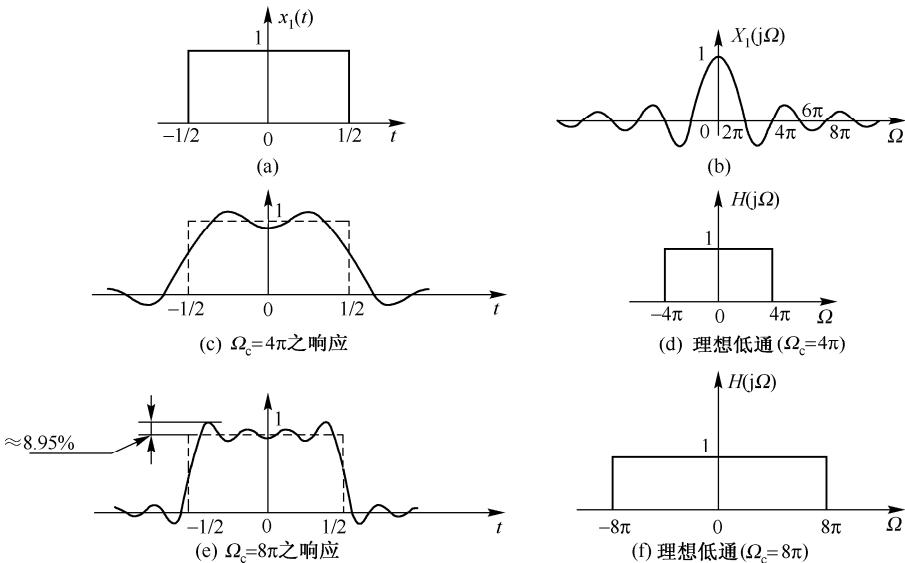


图 6.1-10 具有不同  $\Omega_c$  的理想低通滤波器对矩形脉冲的响应

## 2. 理想带通滤波器

理想带通滤波器 (ideal band-pass filter) 的频响特性如图 6.1-11 所示。

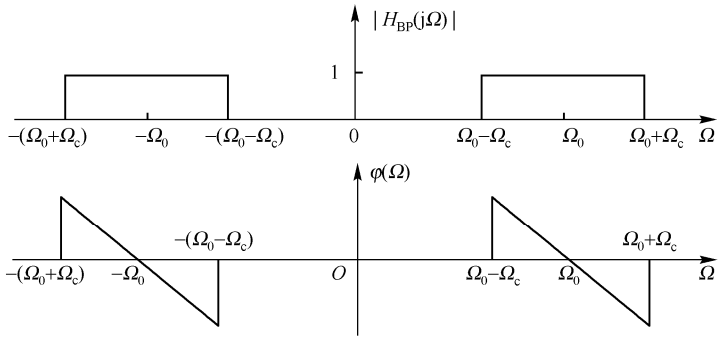


图 6.1-11 理想带通滤波器的幅频与相频特性

设理想低通滤波器的频响特性为

$$H_{LP}(j\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega t_0} & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (6.1-11)$$

则理想带通滤波器的频响特性与理想低通滤波器的频响特性之间存在如下关系

$$H_{BP}(j\Omega) = H_{LP}(j\Omega) * [\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)] \quad (6.1-12)$$

可以看出, 理想带通滤波器的频响特性是理想低通滤波器的频响特性经过频率搬移的结果。将  $H_{LP}(j\Omega)$  称为理想带通滤波器的等效低通系统。

由傅里叶变换的频域卷积定理可求出理想带通滤波器的冲激响应

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_{BP}(j\Omega)] = 2\pi \mathcal{F}^{-1}[H_{LP}(j\Omega)] \mathcal{F}^{-1}[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

其中  $\mathcal{F}^{-1}[H_{LP}(j\Omega)] = h_{LP}(t)$  为等效低通滤波器的冲激响应, 根据式(6.1-7)可得

$$\mathcal{F}^{-1}[H_{LP}(j\Omega)] = \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}[\Omega_c(t - t_0)]$$

而

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)] = \frac{1}{2\pi} [e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}] = \frac{1}{\pi} \cos \Omega_0 t$$

所以

$$h(t) = 2\pi \cdot \frac{\Omega_c}{\pi} \text{Sa}[\Omega_c(t - t_0)] \cdot \frac{1}{\pi} \cos \Omega_0 t = \frac{2\Omega_c}{\pi} \text{Sa}[\Omega_c(t - t_0)] \cos \Omega_0 t \quad (6.1-13)$$

这是一个以等效低通滤波器的冲激响应为包络的正弦调幅信号。

利用类似的方法可以求出理想高通滤波器和理想带阻滤波器的冲激响应, 这里不再一一赘述。

## 6.2 模拟滤波器的基本概念与设计方法

### 6.2.1 系统的物理可实现性

从上节的介绍我们知道, 所有的理想滤波器是非因果系统, 物理上是不可实现的。那么, 怎样的系统是物理上可实现的呢?

一个物理上可实现的系统其响应一定不会超前于激励。也就是说, 物理上可实现的系统一定是因果系统。因果系统的冲激响应  $h(t)$  在  $t < 0$  时必须为零, 这就是物理上可实现的系统的时域条件。

在频域中, 物理上可实现的因果系统的幅频特性  $|H(j\Omega)|$  应满足下面的必要条件:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln |H(j\Omega)||}{1 + \Omega^2} d\Omega < \infty \quad (6.2-1)$$

而且  $|H(j\Omega)|$  必须是平方可积的, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |H(j\Omega)|^2 d\Omega < \infty \quad (6.2-2)$$

式(6.2-1)称为佩利-维纳准则 (Paley-Winner criterion)。由于所有的理想滤波器的幅频特

性 $|H(j\Omega)|$ 总是在某一段频带内恒为零,即 $|H(j\Omega)|=0$ ,这时 $|\ln|H(j\Omega)||\rightarrow\infty$ ,于是式(6.2-1)的积分不收敛,不满足佩利-维纳准则,系统是是不可实现的。

佩利-维纳准则仅对物理可实现的因果系统的幅频特性提出了限制,但对相频特性并无要求。实际上,一个物理可实现系统,其幅频特性与相频特性之间存在一定的约束关系,所以上述准则仅仅是必要条件。如果 $|H(j\Omega)|$ 已被验证满足佩利-维纳准则,还必须找到适当的相位函数 $\varphi(\Omega)$ 与 $|H(j\Omega)|$ 一起构成一个物理可实现系统的频响特性。这时的 $H(j\Omega)$ 的实部与虚部之间满足希尔伯特变换(希尔伯特变换内容参照有关文献)关系。

## 6.2.2 典型模拟低通滤波器的设计方法

一个物理上可实现的实际滤波器的特性只能是理想特性的最佳逼近(optimum approximation)。一个实际低通滤波器的特性如图 6.2-1 所示。由图可见,低通滤波器实际特性除了通带和阻带外,在通带和阻带之间还存在一个过渡带(transition-band),而不是突然下降。而且在通带内不完全平直,是近似于理想的幅频特性,它与理想特性的偏差在规定的范围之内;在阻带内幅频特性也不是零值,而是衰减至规定的偏差范围内。对于过渡带内的幅度衰减一般不做出要求。图中字符的意义: $\delta_p$ 为通带公差带(tolerance band); $\Omega_p$ 为通带边界频率; $\delta_s$ 为阻带公差带; $\Omega_s$ 为阻带边界频率。

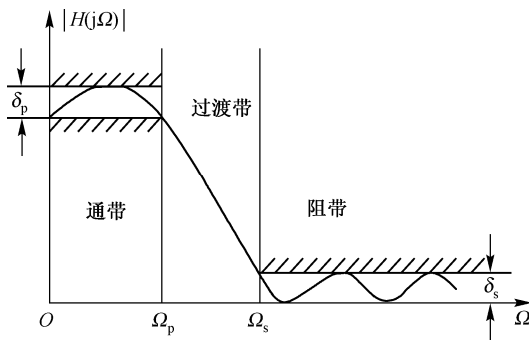


图 6.2-1 低通滤波器实际特性

模拟滤波器的设计一般包括两个方面:首先是根据设计的技术指标,即滤波器的幅频特性,确定滤波器的系统函数 $H(s)$ ;其次是设计实际网络来实现这个系统函数。

滤波器 $H(s)$ 设计的关键是要找到一种逼近函数,根据所用的近似逼近函数的不同,就有相应的滤波器名称。下面主要介绍巴特沃思滤波器,并简要介绍切比雪夫滤波器。

### 1. 巴特沃思(Butterworth)滤波器

这是一种具有“最大平坦幅度特性”的滤波器,其幅频特性具有如下形式

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2n}}} \quad (6.2-3)$$

也可表示成如下的幅度平方形式

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2n}} \quad (6.2-4)$$

式中, $n$ 是滤波器的阶数,为正整数。将该幅频特性 $|H(j\Omega)|$ 绘制成曲线,如图 6.2-2 所示。不难看出,当 $\Omega=0$ 时, $|H(j\Omega)|$ 取最大值 $|H(j\Omega)|=1$ ;而当 $\Omega=\Omega_c$ 时, $|H(j\Omega)|=1/\sqrt{2}$ ,也即衰减特性为 3 dB,

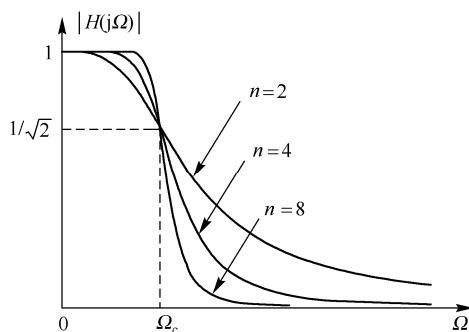


图 6.2-2 巴特沃思滤波器的幅频特性

常取此点作为低通滤波器的截止频率。 $\Omega_c$ 也称为 3 dB 带宽。随着  $n$  值的增大,  $|H(j\Omega)|$  曲线越接近于理想特性。在  $\Omega/\Omega_c < 1$  (通带) 范围内,  $n$  增加, 则  $(\Omega/\Omega_c)^{2n}$  减小, 于是曲线越平; 在  $\Omega/\Omega_c > 1$  (阻带) 范围内,  $n$  增加, 则  $(\Omega/\Omega_c)^{2n}$  增大, 曲线越趋近于零, 衰减越快。

滤波器的特性完全由其阶数  $n$  决定。当  $n$  增大时滤波器的幅频特性曲线变得更陡峭, 这时虽然由式(6.2-3)决定了在  $\Omega = \Omega_c$  处的幅频特性总是  $1/\sqrt{2}$ , 但是它们将在通带的更大范围内接近于 1, 在阻带内更迅速地接近于零, 因而幅频特性更接近于理想的矩形频率特性。滤波器的幅频特性对参数  $n$  的依赖关系如图 6.2-2 所示。

我们希望由  $|H(j\Omega)|$  得到  $H(s)$ , 以便研究其极点分布的特性。可以证明系统函数  $H(s)$  具有如下性质

$$|H(s)|^2 = H(s)H(-s) \quad (6.2-5)$$

若  $s_k$  是  $H(s)$  的极点, 则  $-s_k$  必为  $H(-s)$  的极点, 它们以原点互呈对称关系。如果  $H(s)H(-s)$  有  $2n$  个极点, 取其中  $n$  个位于左半  $s$  平面的极点作为  $H(s)$  的极点, 即可构成稳定的滤波网络, 而与其呈对称关系的右半  $s$  平面的  $n$  个极点则属于  $H(-s)$ 。根据这一原理, 我们可从已知的  $|H(j\Omega)|$  求得  $H(s)$ 。

令  $s = j\Omega$ , 即  $\Omega = s/j$ , 将其代入式(6.2-4)中得

$$|H(s)|^2 = \left[ \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2n}} \right]_{\Omega=s/j} = \frac{1}{1 + (1/j)^{2n} (s/\Omega_c)^{2n}} = \frac{1}{1 + (-1)^n (s/\Omega_c)^{2n}} \quad (6.2-6)$$

显然,  $|H(s)|^2$  的极点  $s_k$  应满足  $(s/\Omega_c)^{2n} = \begin{cases} +1 & (n \text{ 为奇数}) \\ -1 & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}$

从式(6.2-6)中可解出  $|H(s)|^2$  的  $2n$  个极点。当  $n$  为奇数时, 极点为

$$s_k = \Omega_c e^{j\left(\frac{2k\pi}{2n}\right)} \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2n \quad (6.2-7)$$

当  $n$  为偶数时, 极点为  $s_k = \Omega_c e^{j\left[\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right]} \quad k = 1, 2, 3, \dots, 2n \quad (6.2-8)$

无论  $n$  为奇数还是偶数,  $s_k$  都是均匀地分布在以  $s$  平面原点为圆心, 半径为  $\Omega_c$  的圆 (称为巴特沃思圆) 上, 共有  $2n$  个角度间隔是  $\pi/n$  弧度的极点。例如,  $n=2$  时, 极点间间隔为  $\pi/2$  弧度;  $n=3$  时, 极点间间隔为  $\pi/3$  弧度。以上两种情况分别如图 6.2-3(a)和(b)所示 (设  $\Omega_c=1$ )。极点关于虚轴是对称的, 且不会落在虚轴上。当  $n$  是奇数时, 则实轴上有极点; 当  $n$  是偶数时, 则实轴上也没有极点。

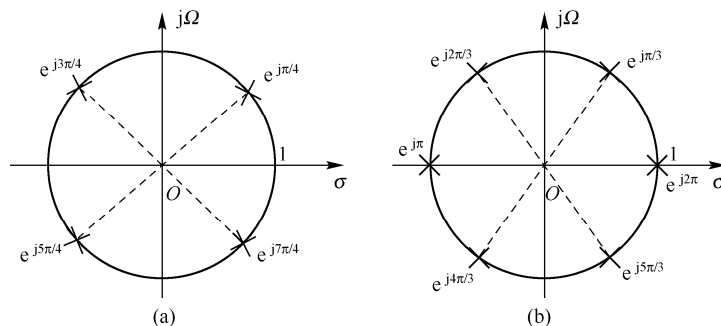


图 6.2-3 巴特沃思滤波器在  $s$  平面上的极点位置



下面我们以  $n = 2$ （二阶巴特沃思滤波器）为例，说明如何由  $|H(s)|^2$  的极点分布确定  $H(s)$  函数式。为分析方便起见，取  $\Omega_c = 1$ （也即令  $s/\Omega_c$  为归一化复频率，仍以符号  $s$  表示）。当  $n = 2$  时，由式(6.2-6)得

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1+s^4}$$

由式(6.2-8)求得四个极点位于  $s_k = e^{j\pi/4}, e^{j3\pi/4}, e^{j5\pi/4}, e^{j7\pi/4}$ ，取左半平面的两个极点  $e^{j3\pi/4}$  和  $e^{j5\pi/4}$  作为  $H(s)$  的极点，从而得到

$$H(s) = 1/B_2(s)$$

$$\begin{aligned} \text{式中} \quad B_2(s) &= (s - e^{j3\pi/4})(s - e^{j5\pi/4}) = s^2 - (e^{j3\pi/4} + e^{j5\pi/4})s + e^{j3\pi/4} \cdot e^{j5\pi/4} \\ &= s^2 - \left(2 \cos \frac{3}{4}\pi\right)s + 1 = s^2 + \sqrt{2}s + 1 \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

按照这种方法可求出  $n = 1, 2, 3, \dots$  各阶巴特沃思滤波器的  $H(s)$  的表达式，它们都具有如下形式

$$H(s) = 1/B_n(s) \tag{6.2-9}$$

这里， $B_n(s)$  称为  $n$  阶巴特沃思多项式。将  $B_n(s)$  多项式列于表 6.2-1 中。

表 6.2-1 巴特沃思多项式

| $n$ | $B_n(s)$                                                                      |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------|
| 1   | $s + 1$                                                                       |
| 2   | $s^2 + \sqrt{2}s + 1$                                                         |
| 3   | $s^3 + 2s^2 + 2s + 1$                                                         |
| 4   | $s^4 + 2.613s^3 + 3.4142s^2 + 2.613s + 1$                                     |
| 5   | $s^5 + 3.236s^4 + 5.236s^3 + 5.236s^2 + 3.236s + 1$                           |
| 6   | $s^6 + 3.864s^5 + 7.464s^4 + 9.141s^3 + 7.464s^2 + 3.864s + 1$                |
| 7   | $s^7 + 4.494s^6 + 10.103s^5 + 14.606s^4 + 14.606s^3 + 10.103s^2 + 4.494s + 1$ |

**例 6.2-1** 如图 6.2-4 所示，设计一低通巴特沃思滤波器的系统函数。要求在通带边界频率  $\Omega_p = 200 \pi \text{ rad/s}$  处，幅度衰减  $\delta_p \leq 2 \text{ dB}$ ，在阻带边界频率  $\Omega_s = 400 \pi \text{ rad/s}$  处，幅度衰减  $\delta_s \geq 15 \text{ dB}$ 。

**解：**由于通带边界频率处幅度衰减不为 3 dB，因此要根据通带和阻带的衰减要求，联立方程求解  $\Omega_c$  和  $n$ 。

$$\left\{ \begin{aligned} 10 \lg \left[ 1 + \left( \frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2n} \right] &\leq \delta_p \end{aligned} \right. \tag{6.2-10}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 10 \lg \left[ 1 + \left( \frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2n} \right] &\geq \delta_s \end{aligned} \right. \tag{6.2-11}$$

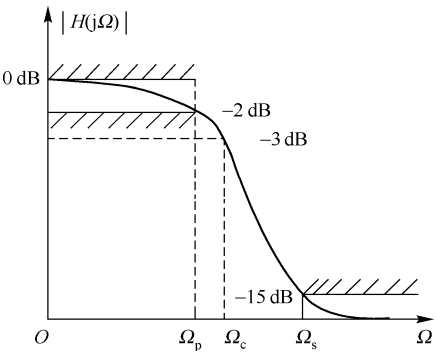


图 6.2-4 巴特沃思滤波器设计

式(6.2-10)和式(6.2-11)取等号可求出

$$n = \frac{\lg \frac{10^{0.1\delta_s} - 1}{10^{0.1\delta_p} - 1}}{2 \lg \left( \frac{\Omega_s}{\Omega_p} \right)} = \frac{\lg \frac{10^{1.5} - 1}{10^{0.2} - 1}}{2 \lg \left( \frac{400\pi}{200\pi} \right)} = 2.85$$

由于滤波器的阶数  $n$  必须是整数, 为了满足和超过所给的技术指标,  $n$  应取 3。若将  $n = 3$  代入式(6.2-10), 则完全满足通带要求, 且超过阻带指标; 若将  $n = 3$  代入式(6.2-11), 则完全满足阻带要求, 且超过通带指标。一般情况下, 我们将  $n = 3$  代入式(6.2-10)解出  $\Omega_c$ , 即

$$\lg \Omega_c = \lg \Omega_p - \frac{1}{2n} \lg(10^{0.1\delta_p} - 1) = \lg 200\pi - \frac{\lg(10^{0.2} - 1)}{2 \times 3}$$

$$\Omega_c = 687 \text{ rad/s}$$

通过查表 6.2-1 并将  $s$  用  $s/\Omega_c$  代替, 最后可得巴特沃思滤波器的系统函数为

$$H(s) = \frac{\Omega_c}{s + \Omega_c} \cdot \frac{\Omega_c^2}{s^2 + \Omega_c s + \Omega_c^2} = \frac{687}{s + 687} \cdot \frac{687^2}{s^2 + 687s + 687^2}$$

得到滤波器的系统函数  $H(s)$  后, 通常可以采用无源网络或有源网络来实现, 二者各有优点与不足, 可以参阅有关文献。

## 2. 切比雪夫 (Chebyshev) 滤波器

巴特沃思滤波器的幅频特性曲线, 无论在通带和阻带中都是频率的单调函数。因此, 当通带的边界处满足指标要求时, 通带内肯定会有裕量。所以, 更有效的设计方法应该是将精确度均匀地分布在整個通带或阻带内, 或者同时分布在两者之内。这样, 就可以用阶数较低的系统满足要求。这可通过选择具有等波纹特性的逼近函数来达到。

切比雪夫滤波器的幅频特性就具有这种等波纹特性。它有两种形式: 幅频特性在通带内是等波纹的, 在阻带内是单调的, 称为第一类切比雪夫滤波器; 幅频特性在通带内是单调的, 在阻带内是等波纹的, 称为第二类切比雪夫滤波器。采用何种形式的切比雪夫滤波器取决于实际用途。图 6.2-5 和图 6.2-6 分别画出了  $n$  为奇数和  $n$  为偶数时的第一类和第二类切比雪夫滤波器的幅频特性。切比雪夫滤波器的详细设计, 可参阅有关文献。

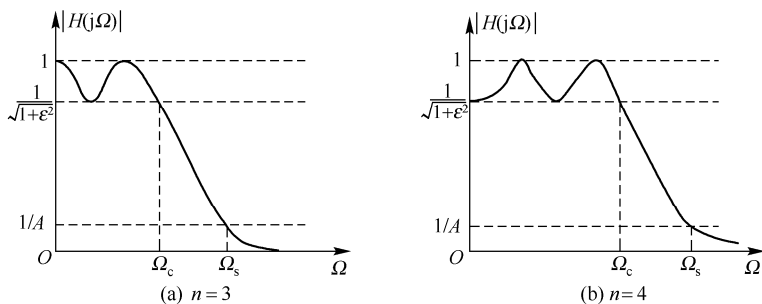


图 6.2-5 第一类切比雪夫滤波器的幅频特性

除了以上两种滤波器之外, 还有椭圆滤波器。椭圆滤波器的幅频特性在通带内和阻带内都具有等波纹特性, 其设计方法可参阅有关文献。

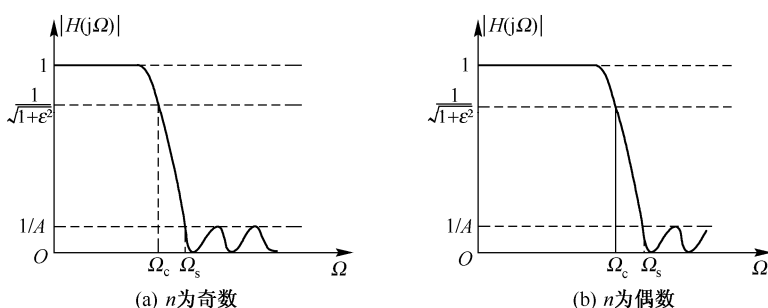


图 6.2-6 第二类切比雪夫滤波器的幅频特性

## 6.2.3 频率变换

上述模拟滤波器设计，只讨论了低通滤波器的设计问题。高通、带通、带阻滤波器可以通过对滤波器特性的频率变换，转换成低通滤波器的设计。这种频率变换的方法称为原型变换，变换得到的低通滤波器称为原型低通滤波器。具体设计方法是：先根据对高通、带通、带阻等滤波器特性指标要求，导出相应的低通原型的指标，然后确定原型低通的  $H(s)$ ，再根据对应的频率变换关系得到高通、带通和带阻滤波器的  $H(s)$ 。

下面我们来看低通到高通的变换。

设低通滤波器系统函数为  $H_L(p)$ ，角频率为  $\lambda$ ，截止角频率为  $\lambda_c$ ；高通滤波器传递函数为  $H_H(s)$ ，角频率为  $\Omega$ ，截止角频率为  $\Omega_c$ 。设有如下的变换关系

$$p = \lambda_c \Omega_c / s \quad (6.2-12)$$

令  $s = j\Omega$ ，有 
$$p = \frac{\lambda_c \Omega_c}{j\Omega} = j \left( -\frac{\lambda_c \Omega_c}{\Omega} \right) = j\lambda$$

上式表明： $s$  平面中的虚轴正好映射到  $p$  平面中的虚轴上，其频率变换关系为

$$\lambda = -\lambda_c \Omega_c / \Omega \quad (6.2-13)$$

$\lambda$  与  $\Omega$  之间存在以下对应关系：①  $\lambda = 0$ ， $\Omega = \pm\infty$ ；②  $\lambda = \pm\infty$ ， $\Omega = 0$ ；③  $\lambda = \pm\lambda_c$ ， $\Omega = \mp \Omega_c$ 。相应的关系可表示成如图 6.2-7 所示的曲线。

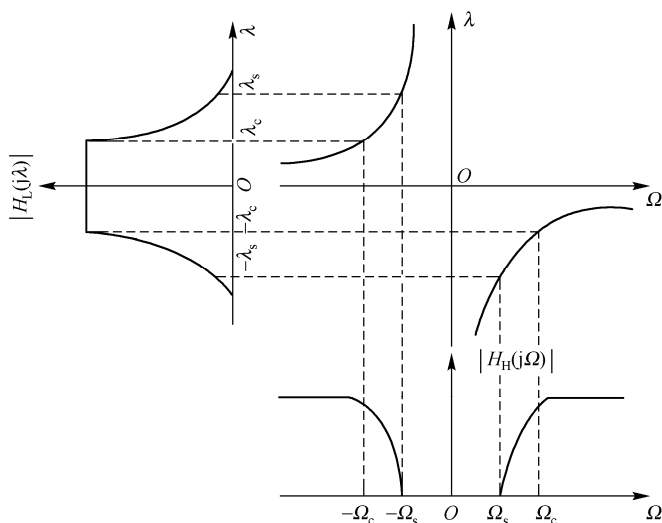


图 6.2-7 低通至高通的频率变换关系

根据上述的频率变换关系，将高通滤波器的特性指标，即高通截止频率  $\Omega_c$ ，阻带边界频率  $\Omega_s$ ，分别代入式(6.2-13)中，求出低通原型的通带截止频率  $\lambda_c$ ，阻带边界频率  $\lambda_s$ 。而高通的通带衰减  $\delta_p$  及阻带衰减  $\delta_s$ ，即对应低通原型的通带与阻带的要求。根据  $\lambda_c$ 、 $\lambda_s$ 、 $\delta_p$  和  $\delta_s$  确定低通原型系统函数  $H_L(p)$ ，即可求出高通的系统函数为

$$H_H(s) = H_L(p) \Big|_{p=\frac{\lambda_c \Omega_c}{s}} \quad (6.2-14)$$

仿照上面的分析，还可导出从低通原型滤波器设计带通和带阻滤波器的计算公式，限于篇幅，仅给出结论。表 6.2-2 列出了低通原型与其他类型滤波器的频率变换关系式。

表 6.2-2 滤波器的频率变换

|      | 频率变换                                                                                  | 复频率变换                                                                 |
|------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 低通原型 | $\lambda$                                                                             | $p$                                                                   |
| 高通   | $\lambda = -\frac{\lambda_c \Omega_c}{\Omega}$                                        | $p = \frac{\lambda_c \Omega_c}{s}$                                    |
| 带通   | $\lambda = \frac{\Omega^2 - \Omega_{cl} \Omega_{c2}}{\Omega}$                         | $p = \frac{s^2 + \Omega_{cl} \Omega_{c2}}{s}$                         |
| 带阻   | $\lambda = \frac{\Omega_{cl} \Omega_{c2} \Omega}{\Omega_{cl} \Omega_{c2} - \Omega^2}$ | $p = \frac{\Omega_{cl} \Omega_{c2} s}{s^2 + \Omega_{cl} \Omega_{c2}}$ |

### 6.3 信号的采样

#### 6.3.1 信号采样的概念

前面研究的都是连续时间信号。但在许多实际问题中，常常需要将连续时间信号转换成离散时间信号，这就要对信号进行采样（或称抽样、取样）。例如，对于测量温度、位移和速度等一些连续变化的量，可以每隔一定时间测量一次，取得这些连续时间信号在各离散时刻的一系列数据。

信号的采样（sample）是由采样器来进行的，采样器是如图 6.3-1(a)所示的开关。开关 S 周期地接到 1 和 2。当开关位于 1 处时，则输出信号  $f_s(t)$  就是输入信号  $f(t)$ ；而当开关位于 2 处时，则输出信号  $f_s(t)$  为零。如图 6.3-1(b)所示，图中  $T_s$  是开关转换的周期， $\tau$  是开关在 1 处和  $f(t)$  接通的时间。

图 6.3-1(b)的采样信号  $f_s(t)$ ，可以看成是原信号  $f(t)$  和一采样脉冲序列  $p(t)$  的乘积。即

$$f_s(t) = f(t)p(t) \quad (6.3-1)$$

也就是说，采样的过程可以用式(6.3-1)表示的一个相乘的数学模型来代表，也可用图 6.3-2 所示的模型图表示。采样脉冲序列  $p(t)$  是周期性矩形脉冲序列，其中每一个矩形脉冲的幅度为 1，宽度为  $\tau$ ，如图 6.3-3(b)所示。

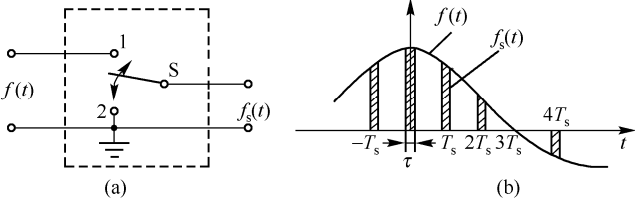


图 6.3-1 信号的采样

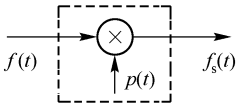


图 6.3-2 采样的模型

由于采样脉冲是周期矩形序列，因此将这种采样称为矩形脉冲采样（rectangular pulse sampling）或称为自然采样（nature sampling）。采样信号  $f_s(t)$  如图 6.3-3(c)所示。

为了便于问题的分析，当采样持续时间  $\tau$ （即采样脉冲序列  $p(t)$  的脉宽）相对较短时，

可以把采样脉冲看成是单位冲激序列  $\delta_T(t)$ ，这种采样称为冲激采样 (impulse sampling) 或理想采样 (ideal sampling)。在这种情况下，采样信号  $f_s(t)$  便是一系列的冲激函数，每个冲激的间隔为  $T_s$ ，其冲激强度等于连续信号的样点值  $f(nT_s)$ ，如图 6.3-4 所示。

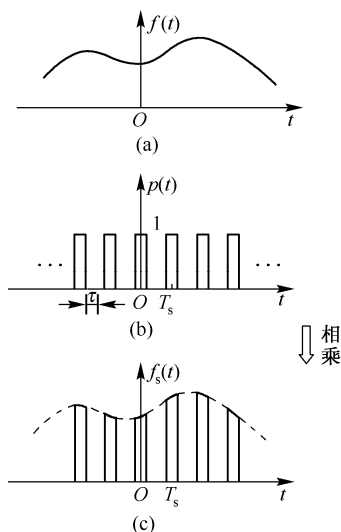


图 6.3-3 矩形脉冲采样

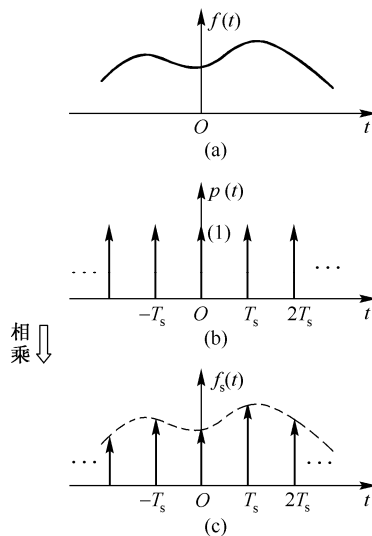


图 6.3-4 冲激采样

## 6.3.2 采样信号的傅里叶变换

下面将求采样信号  $f_s(t)$  的傅里叶变换  $F_s(j\Omega)$ ，以及讨论  $F_s(j\Omega)$  与采样之前的原连续信号  $f(t)$  的傅里叶变换  $F(j\Omega)$  的关系。

令连续信号  $f(t)$  的傅里叶变换为  $F(j\Omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ ，采样脉冲序列  $p(t)$  的傅里叶变换为  $P(j\Omega) = \mathcal{F}[p(t)]$ ，采样信号  $f_s(t)$  的傅里叶变换为  $F_s(j\Omega) = \mathcal{F}[f_s(t)]$ ，采样周期为  $T_s$ ，采样频率为  $\Omega_s = 2\pi/T_s$ 。

由于  $f_s(t) = f(t)p(t)$ ，其中  $p(t)$  是周期信号，根据式(3.6-5)可以得到  $p(t)$  的傅里叶变换为

$$P(j\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\Omega - n\Omega_s) \quad (6.3-2)$$

其中， $P_n$  是  $p(t)$  的傅里叶系数

$$P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} p(t) e^{-jn\Omega_s t} dt \quad (6.3-3)$$

根据频域卷积定理，则有

$$F_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} F(j\Omega) * P(j\Omega)$$

将式(6.3-2)代入上式，化简后得到采样信号  $f_s(t)$  的傅里叶变换为

$$F_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n F[j(\Omega - n\Omega_s)] \quad (6.3-4)$$

式(6.3-4)表明：信号在时域中被采样后，它的频谱  $F_s(j\Omega)$  是连续信号的频谱  $F(j\Omega)$  以采

样频率  $\Omega_s$  为间隔周期地重复而得到的, 在重复的过程中幅度被  $p(t)$  的傅里叶系数所加权。因为  $P_n$  只是  $n\Omega_s$  (而不是  $\Omega$ ) 的函数, 所以  $F(j\Omega)$  在重复过程中不会使形状发生变化。

式(6.3-4)中的加权系数  $P_n$  取决于采样脉冲序列的形状。下面将分别讨论矩形脉冲采样及冲激采样的傅里叶变换。

### 1. 矩形脉冲采样

此时采样脉冲  $p(t)$  是周期矩形脉冲, 令它的脉冲幅度为  $E$ , 脉冲宽度为  $\tau$ , 采样间隔为  $T_s$  (采样频率为  $\Omega_s$ )。根据式(6.3-3)可求得

$$P_n = \frac{1}{T_s} \int_{-T_s/2}^{T_s/2} p(t) e^{-jn\Omega_s t} dt = \frac{1}{T_s} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} E e^{-jn\Omega_s t} dt = \frac{E\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_s \tau}{2}\right) \quad (6.3-5)$$

实际上, 这个结果我们早已熟悉了。将式(6.3-5)代入式(6.3-4), 便可求出矩形脉冲采样信号的频谱

$$F_s(j\Omega) = \frac{E\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_s \tau}{2}\right) F[j(\Omega - n\Omega_s)] \quad (6.3-6)$$

显然, 在矩形脉冲采样情况下,  $F_s(j\Omega)$  是将  $F(j\Omega)$  以  $\Omega_s$  为周期、周期性地重复而成的, 但在重复过程中幅度以抽样函数的规律变化, 如图 6.3-5 所示。

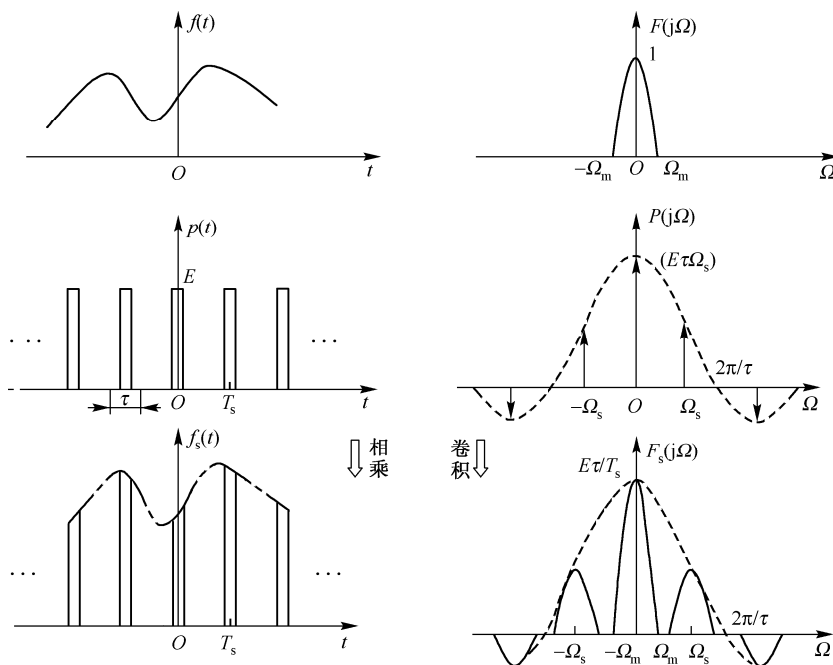


图 6.3-5 矩形脉冲采样信号的频谱

### 2. 冲激采样

此时, 采样脉冲  $p(t)$  是冲激序列  $\delta_T(t)$ , 即

$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

这时, 采样信号可表示为  $f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) \quad (6.3-7)$$

下面求  $f_s(t)$  的傅里叶变换  $F_s(j\Omega)$ 。 $p(t)$  的傅里叶系数  $P_n$  在例 3.6-1 中已求出, 即  $P_n = 1/T_s$ , 将其代入式(6.3-4), 即可得到冲激采样信号的频谱

$$F_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\Omega - n\Omega_s)] \quad (6.3-8)$$

式(6.3-8)表明: 由于冲激序列  $\delta_T(t)$  的傅里叶系数  $P_n$  为常数, 所以  $F_s(j\Omega)$  是将  $F(j\Omega)$  以  $\Omega_s$  为周期、周期性地等幅延拓而成的, 如图 6.3-6 所示。

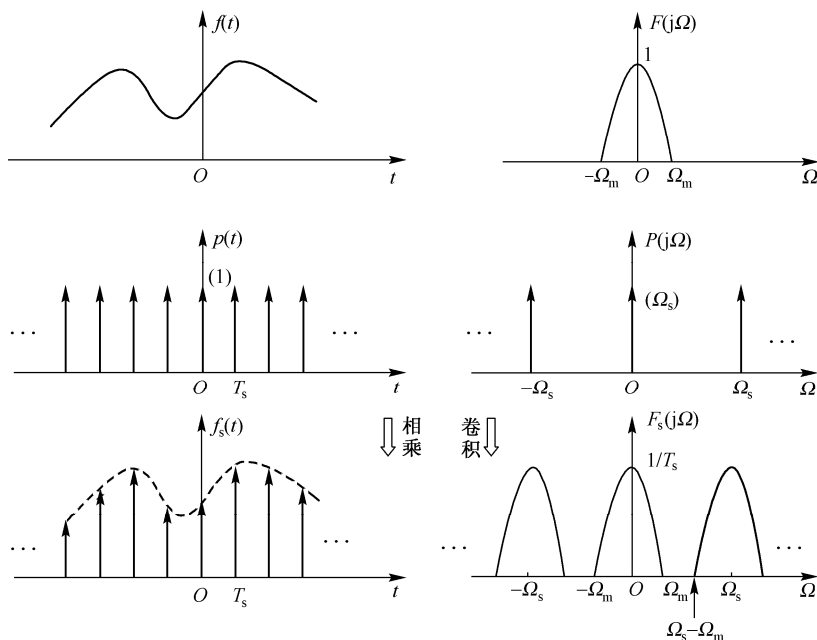


图 6.3-6 冲激采样信号的频谱

用冲激序列对信号进行采样, 使之变成离散信号, 对应的是将原连续信号的频谱进行周期延拓。即时域的离散性对应着频域的周期性。在3.6节中已阐述过, 时域的周期性对应着频域的离散性。从而揭示了信号的时域与频域之间的另一种对应关系, 即周期性与离散性的对应关系。

冲激采样和矩形脉冲采样是式(6.3-4)的两种特定情况。而冲激采样又是矩形脉冲的脉宽  $\tau \rightarrow 0$  的一种极限情况。在实际应用中通常采用矩形脉冲采样。但是为了便于分析, 当脉宽  $\tau$  相对较窄时, 往往将矩形脉冲采样近似为冲激采样。

### 6.3.3 采样定理

由图 6.3-7(b)看到, 采样信号  $f_s(t)$  只是原信号  $f(t)$  的很小一部分。原信号  $f(t)$  已被大部分切掉。连续信号被采样后是否保留原信号  $f(t)$  的全部信息, 也即能否由采样信号  $f_s(t)$

重新恢复原信号  $f(t)$  呢？现在我们就来讨论如何从采样信号中恢复原连续信号，以及在什么条件下才能够无失真地完成这种恢复作用。

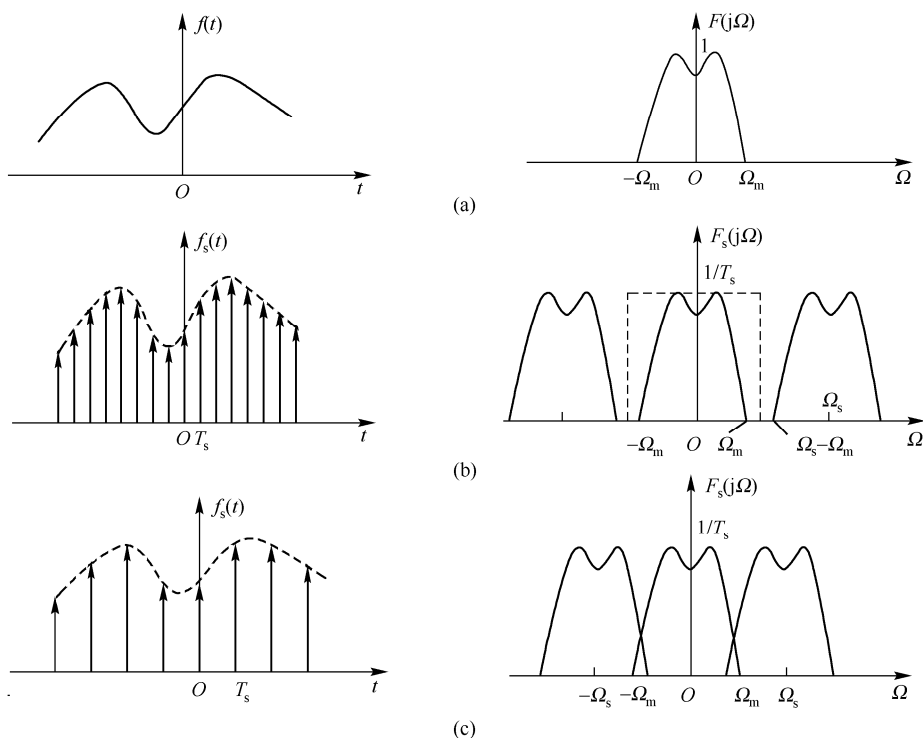


图 6.3-7 冲激采样

我们来观察图 6.3-7(b)所示的采样信号的频谱  $F_s(j\Omega)$ ，其虚线框内的部分与原信号的频谱具有完全相同的形状。所以只要将采样信号通过一个理想低通滤波器，而把这部分频谱取出，同时滤除所有的其他部分，这样，在滤波器的输出端将会得到原来的信号。这个理想低通滤波器的频率特性就像图 6.3-7(b)中虚线框那样，其截止频率应大于信号频谱中的最高频率分量  $\Omega_m$ ，而小于  $\Omega_s - \Omega_m$ ，从而能够把所需的频谱分离出来。由以上讨论显然可见，恢复原信号的必要条件是，采样信号频谱中两相邻的组成部分不能相互重叠，否则即使使用了理想低通滤波器，也无法取出与原信号相同的频谱来。因此，要使频谱中相邻组成部分不重叠，则必须满足如下条件：首先，原信号  $f(t)$  的频谱  $F(j\Omega)$  的频带是有限的，即原信号  $f(t)$  频谱中存在最高频率分量  $\Omega_m$ ；其次，采样频率  $\Omega_s$  应大于最高频率  $\Omega_m$  的两倍，即

$$\Omega_s > 2\Omega_m \quad (6.3-9)$$

或

$$f_s > 2f_m \quad (6.3-10)$$

一般将  $f_{s\min} = 2f_m$  称为奈奎斯特 (Nyquist) 采样频率 (简称奈奎斯特采样率)，它的倒数  $T_{s\max} = \frac{1}{2f_m}$  称为奈奎斯特采样间隔。

若采样频率  $\Omega_s$  不满足式(6.3-9)，即  $\Omega_s < 2\Omega_m$  时， $F_s(j\Omega)$  将产生混叠 (aliasing)，如图 6.3-7(c)所示。此时不能从  $F_s(j\Omega)$  中取出  $F(j\Omega)$ ，也即信号  $f(t)$  不能由采样信号  $f_s(t)$  完全恢复。也就是说，采样的间隔时间过长，即采样太慢，将丢失部分信息。



综上所述，可以归纳出如下的采样定理 (sampling theorem)：一个频带受限的信号  $f(t)$ ，如果频谱只占据  $-\Omega_m \sim \Omega_m$  的范围，则信号  $f(t)$  可以用时间间隔小于  $\frac{1}{2f_m}$  的采样值唯一地确定。当这样的采样信号通过其截止频率  $\Omega_c$  满足条件  $\Omega_m < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_m$  的理想低通滤波器后，可以完全恢复原信号。

实际上，理想低通滤波器是不可能实现的。实际低通滤波器的幅频特性如图 6.3-8 中虚线所示。由于实际滤波器的滤波特性在过渡带内不够陡直，滤波器输出端除了有所需信号的频谱分量外，还夹杂着相邻部分的一些频率分量，这样，恢复的信号与原信号就有差别。解决的方法是提高采样频率  $\Omega_s$ ，使得滤波器的输出端只含有所需要的信号频谱。另一方面，实际被传输的信号，一般不是频带受限信号（如常用的矩形脉冲信号，其频谱为 Sa 函数），这样的信号经过采样后，采样信号的频谱如图 6.3-9 所示，其中相邻部分之间就会出现频谱混叠现象。在这种情况下，利用低通滤波器就难以把所需信号无失真地滤出。但是，一般信号都占有一个有效的频带宽度，在某个范围之外的频率分量实际上可忽略不计。因此，只要采样频率足够高，并且采用高阶低通滤波器，把所需的原信号有效地分离出来还是可以做到的。

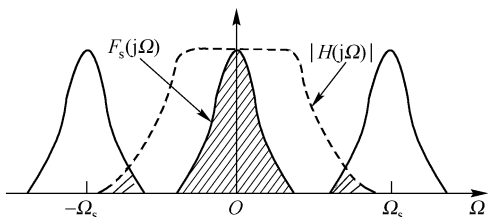


图 6.3-8 采样信号通过实际低通滤波器

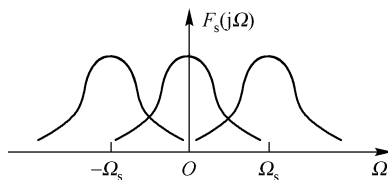


图 6.3-9 非频谱受限信号采样后频谱的混叠现象

#### 6.3.4 从采样信号恢复连续信号

从图 6.3-7(b)可以看出，在满足采样定理的条件下，为了从频谱  $F_s(j\Omega)$  中无失真地选出  $F(j\Omega)$ ，可以将采样信号通过一理想低通滤波器，其频率特性为

$$H(j\Omega) = \begin{cases} T_s, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (6.3-11)$$

其中  $\Omega_m < \Omega_c < \Omega_s - \Omega_m$ 。

从频域角度讲，滤波器输出端的频谱  $F(j\Omega)$  就是  $H(j\Omega)$  与  $F_s(j\Omega)$  相乘，即

$$F(j\Omega) = H(j\Omega)F_s(j\Omega) \quad (6.3-12)$$

这样，在滤波器的输出端可以得到频谱为  $F(j\Omega)$  的连续信号  $f(t)$ 。

下面再从时域角度来看如何由采样信号  $f_s(t)$  恢复  $f(t)$ 。

因为滤波器的输出频谱为  $F(j\Omega) = H(j\Omega)F_s(j\Omega)$

由时域卷积定理知

$$f(t) = h(t) * f_s(t) \quad (6.3-13)$$

其中

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(j\Omega)]$$

利用傅里叶变换的对偶性，不难求出  $H(j\Omega)$  的傅里叶逆变换为 Sa 函数，即

$$h(t) = \frac{T_s \Omega_c}{\pi} \text{Sa}(\Omega_c t) \quad (6.3-14)$$

实际上,  $h(t)$  就是理想低通滤波器的冲激响应, 从而式(6.3-13)就是我们所熟悉的在时域中求零状态响应的卷积公式。

因为

$$f_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

所以

$$\begin{aligned} f(t) &= h(t) * f_s(t) = \frac{T_s \Omega_c}{\pi} \text{Sa}(\Omega_c t) * \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \delta(t - nT_s) \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{T_s \Omega_c}{\pi} f(nT_s) \text{Sa}[\Omega_c(t - nT_s)] \end{aligned}$$

若取  $\Omega_s = 2\Omega_m$ ,  $\Omega_c = \Omega_m$ , 则

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \text{Sa}[\Omega_m(t - nT_s)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s) \text{Sa}(\Omega_m t - n\pi) \quad (6.3-15)$$

上式说明, 连续信号  $f(t)$  可以展开成正交抽样函数 (Sa 函数) 的无穷级数, 级数的系数等于采样值  $f(nT_s)$ 。也就是说, 若在采样信号  $f_s(t)$  的每个样点处, 画出一个峰值为  $f(nT_s)$  的 Sa 函数波形, 那么其合成波形就是原信号  $f(t)$ , 如图 6.3-10(f) 所示。因此, 只要已知各采样值  $f(nT_s)$  就能唯一地确定原信号  $f(t)$ 。

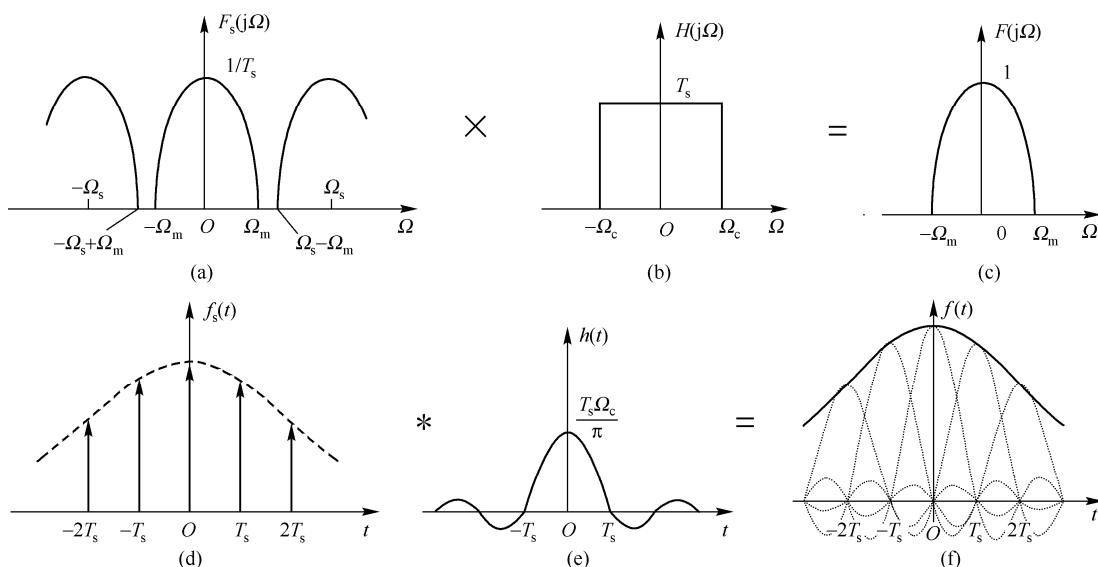


图 6.3-10 由采样信号恢复连续信号

**例 6.3-1** 已知信号  $f(t) = \text{Sa}(2t)$ , 用  $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$  对其进行采样。

- (1) 确定奈奎斯特采样率;
- (2) 若取  $\Omega_s = 6\Omega_m$ , 求采样信号  $f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$  的表达式, 并画出  $f_s(t)$  的波形;
- (3) 求  $F_s(j\Omega) = \mathcal{F}[f_s(t)]$ , 并画出频谱图  $F_s(j\Omega)$ ;
- (4) 若要从  $f_s(t)$  恢复  $f(t)$ , 试确定低通滤波器的截止频率  $\Omega_c$ 。

**解:** (1) 首先画出  $f(t)$  的波形图, 如图 6.3-11(a) 所示。要确定奈奎斯特采样率, 首先要求出  $f(t)$  的频谱。即

$$F(j\Omega) = \mathcal{F}[f(t)] = \frac{\pi}{2} [u(\Omega + 2) - u(\Omega - 2)]$$

$F(j\Omega)$  如图 6.3-11(b) 所示。从图中可以看出最高频率分量  $\Omega_m = 2 \text{ rad/s}$ , 所以, 奈奎斯特采样率  $\Omega_{s\min} = 2\Omega_m = 4 \text{ rad/s}$ 。

(2) 因为  $\Omega_s = 6\Omega_m = 12 \text{ rad/s}$ , 所以  $T_s = 2\pi/\Omega_s = \pi/6 \text{ s}$ , 这样

$$\begin{aligned} f_s(t) &= f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}(2t)|_{t=nT_s} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{3}\right) \delta\left(t - \frac{n\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$f_s(t)$  的波形如图 6.3-11(c) 所示。

$$\begin{aligned} (3) \quad F_s(j\Omega) &= \mathcal{F}[f_s(t)] = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\Omega - n\Omega_s)] = \frac{6}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[j(\Omega - 12n)] \\ &= 3 \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(\Omega + 2 - 12n) - u(\Omega - 2 - 12n)] \end{aligned}$$

$F_s(j\Omega)$  如图 6.3-11(d) 所示。

(4) 从图 6.3-11(d) 可看出, 低通滤波器的截止频率  $\Omega_c$  应满足  $2 < \Omega_c < 10$ 。

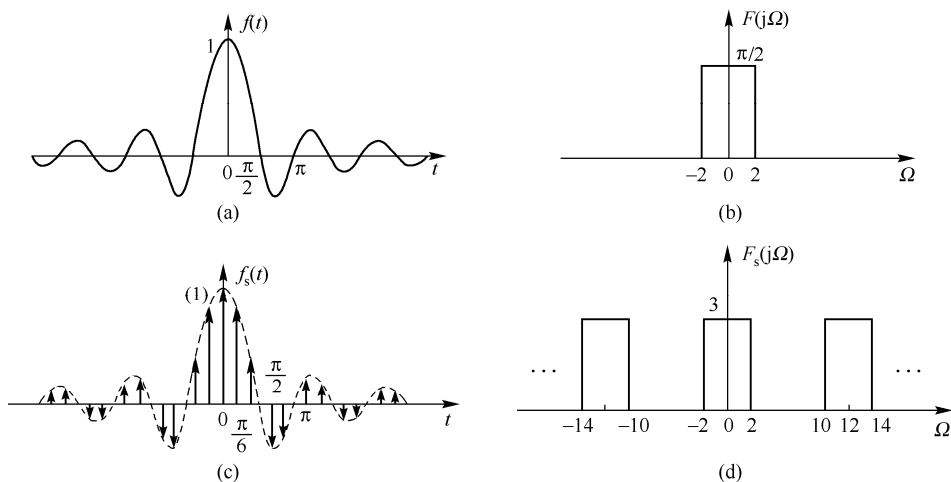


图 6.3-11 例 6.3-1 的信号波形及频谱图

**例 6.3-2** 大致画出图 6.3-12(c) 所示周期矩形脉冲信号  $\tilde{f}(t)$  经冲激采样后的信号  $\tilde{f}_s(t)$  的频谱。

**解:** 首先求出对应于  $\tilde{f}(t)$  的单脉冲信号  $f_0(t)$  (如图 6.3-12(a) 所示) 的傅里叶变换。即

$$F_0(j\Omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

$F_0(j\Omega)$  如图 6.3-12(b) 所示。若  $f_0(t)$  以  $T_1$  为周期进行重复, 便构成了周期信号  $\tilde{f}(t)$ 。即

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_0(t - nT_1)$$

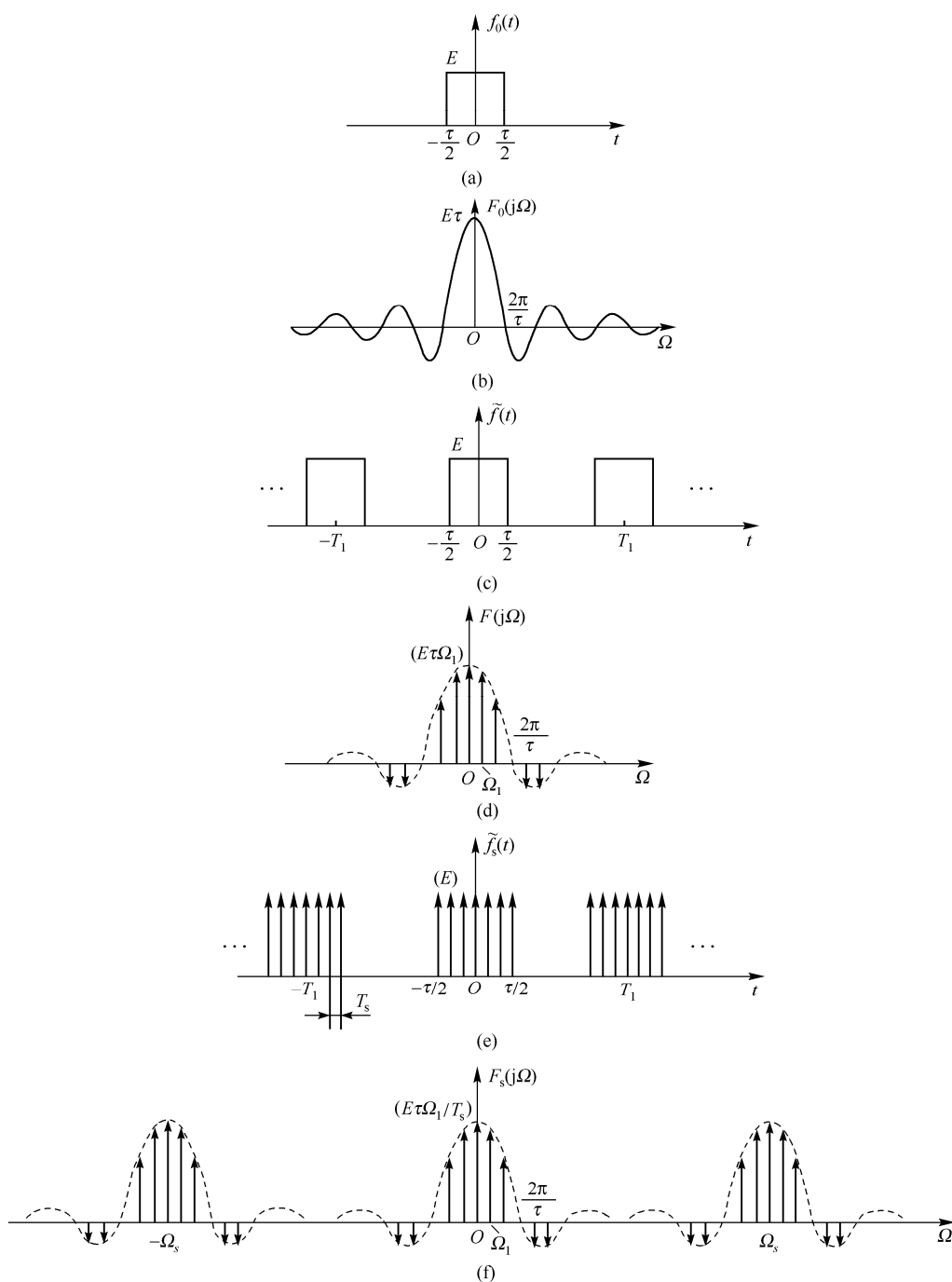


图 6.3-12 周期矩形脉冲采样信号的波形和频谱

根据周期信号的傅里叶变换式(3.6-5)可知,  $\tilde{f}(t)$  的傅里叶变换为

$$F(j\Omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\Omega - n\Omega_1)$$

其中

$$F_n = \left. \frac{F_0(j\Omega)}{T_1} \right|_{\Omega=n\Omega_1} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right)$$

所以

$$F(j\Omega) = E\tau\Omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right) \delta(\Omega - n\Omega_1)$$

也就是说,  $F(j\Omega)$  是  $F_0(j\Omega)$  经过间隔为  $\Omega_1 = 2\pi/T_1$  的冲激采样而得到的,  $F(j\Omega)$  如图 6.3-12(d) 所示, 图中画出的是  $\frac{\tau}{T_1} = \frac{1}{3}$  的情况。

若  $\tilde{f}(t)$  被间隔为  $T_s$  的冲激序列所采样, 便构成了周期矩形采样信号, 即

$$\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}(t)\delta_T(t)$$

$\tilde{f}_s(t)$  如图 6.3-12(e) 所示。根据式(6.3-8)可求出  $\tilde{f}_s(t)$  的频谱为

$$F_s(j\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F[j(\Omega - m\Omega_s)] = \frac{E\tau\Omega_1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_1\tau}{2}\right) \delta(\Omega - m\Omega_s - n\Omega_1)$$

$F_s(j\Omega)$  如图 6.3-12(f) 所示。

可见,  $F_s(j\Omega)$  是  $F(j\Omega)$  以  $\Omega_s = 2\pi/T_s$  为周期、周期性地重复而得到的。注意图中  $\tilde{f}_s(t)$  与  $F_s(j\Omega)$  都是离散的, 这样便于计算机求解。

从本例可以进一步验证信号的时域与频域之间的对应关系: 时域的周期性对应频域的离散性, 时域的离散性对应频域的周期性。

## 6.4 调制与解调

### 6.4.1 调制的概念及分类

在通信系统中, 信号从发射端传输到接收端, 为实现信号的传输, 需要进行调制(modulation)和解调(demodulation)。

无线电通信是通过空间辐射方式传送信号的, 由电磁波理论可以知道, 天线尺寸与辐射信号波长成正比, 信号才能有效地辐射。就语音信号而言, 其频率较低, 相应的天线尺寸就很大, 可以从十几公里到几十公里, 实际上是不可能制造出这样长的天线的。从另一方面讲, 即便有可能把低频的语音信号直接辐射出去, 但各个电台所发出的信号频率分量基本相同, 它们将混合在一起, 使接收者无法选择出所需要的信号。为了把信号辐射出去, 就必须把信号托附到高频振荡上。同时, 不同的电台, 可以使用不同的高频波段。接收者利用一个谐振电路之类的选频网络, 就可把所需电台的信号接收下来, 避免了互相干扰。这种把待传输的低频信号托附到高频振荡的过程, 就称为调制。

调制就是由携带信息且需要传送的调制信号(modulation signal)  $g(t)$  (有时又称为基带信号) 去控制不含信息的高频载波信号(carrier signal)  $c(t)$  的某一个或某几个参数, 使这些参数按照信号  $g(t)$  的规律变化, 从而形成具有高频频谱的窄带信号  $s(t)$ 。 $s(t)$  被称为已调制信号(modulated signal)。根据  $g(t)$  与  $c(t)$  类型的不同, 以及调制器的功能的不同, 可以组合成各种不同的调制方式, 大致分类如下:

(1) 按调制信号  $g(t)$  的不同进行分类

① 模拟调制(analog modulation): 调制信号  $g(t)$  为模拟信号, 其典型波形为单频正弦波。

② 数字调制 (digital modulation): 调制信号  $g(t)$  为数字信号, 其典型代表为二进制数字脉冲序列。

(2) 按载波信号  $c(t)$  的不同进行分类

① 连续波调制 (continuous wave modulation): 载波信号  $c(t)$  为连续波形, 通常以正弦波为典型代表。

② 脉冲调制 (pulse modulation): 载波信号  $c(t)$  为脉冲波形, 通常以矩形脉冲序列为典型代表。

(3) 按调制器的功能进行分类

① 幅度调制 (amplitude modulation): 用调制信号  $g(t)$  改变载波信号  $c(t)$  的幅度参数。例如常规调幅 (AM)、脉冲调幅 (PAM)、抑制载波调幅 (SC-AM)。

② 频率调制 (frequency modulation): 用调制信号  $g(t)$  改变载波信号  $c(t)$  的频率参数。例如调频 (FM)、脉冲调频 (PFM)。

③ 相位调制 (phase modulation): 用调制信号  $g(t)$  改变载波信号  $c(t)$  的相位参数。例如调相 (PM)、脉冲调相 (PPM)。

调频和调相都表现为总相角受到调制, 所以统称为角度调制 (angle modulation), 简称调角。

幅度调制属于线性调制, 而频率调制与相位调制属于非线性调制。本书只讨论幅度调制信号及其频谱, 而频率调制与相位调制将在其他课程中研究。

## 6.4.2 调幅信号的傅里叶变换

实现幅度调制的一般方法是, 通过一个乘法器使需传送的信号即调制信号  $g(t)$  与高频载波信号  $c(t)$  相乘。如图 6.4-1 所示。

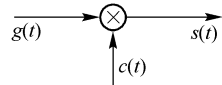


图 6.4-1 幅度调制的一般模型

乘法器输出的已调制信号为

$$s(t) = g(t)c(t) \quad (6.4-1)$$

根据已调制信号及载波信号的不同形式, 介绍几种调幅信号的傅里叶变换。

### 1. 常规调幅 (AM)

如果载波信号是单频正弦波, 调制器输出的已调制信号的包络与输入的调制信号成线性关系, 则称这种调幅为常规调幅, 简称为调幅 AM (Amplitude modulation)。这种调制方式在无线电广播系统中占有主要地位。

在这种情况下, 设  $g(t) = A_0 + f(t)$  (6.4-2)

$$c(t) = \cos(\Omega_0 t + \theta_0) \quad (6.4-3)$$

其中,  $A_0$  是输入调制信号  $g(t)$  中的直流分量,  $f(t)$  是输入调制信号  $g(t)$  中载有信息的交变分量,  $\Omega_0$  和  $\theta_0$  分别是载波的角频率与初相位。将上面两式代入式(6.4-1)得

$$s_{AM}(t) = [A_0 + f(t)]\cos(\Omega_0 t + \theta_0) = A_0 \cos(\Omega_0 t + \theta_0) + f(t)\cos(\Omega_0 t + \theta_0) \quad (6.4-4)$$

为讨论问题方便起见, 设初相位  $\theta_0 = 0$ , 则

$$s_{AM}(t) = [A_0 + f(t)] \cos \Omega_0 t = A_0 \cos \Omega_0 t + f(t) \cos \Omega_0 t \quad (6.4-5)$$

图 6.4-2(a)画出了信号  $f(t)$ ， $g(t)$  及已调制信号  $s_{AM}(t)$  的波形。如图中所示，已调制信号  $s_{AM}(t)$  的包络与  $g(t)$  成线性关系。为了不产生过调制失真，则要求 AM 信号的包络  $[A_0 + f(t)]$  在任何时候都必须大于零。因此 AM 调制的不失真条件是  $A_0 > |f(t)|_{\max}$ 。如果这个条件不能满足，则 AM 信号的包络就与  $g(t)$  不相同，而产生过调制失真，这种情况如图 6.4-2(b)所示。在 AM 调制方式中，过调制现象是不希望发生的。

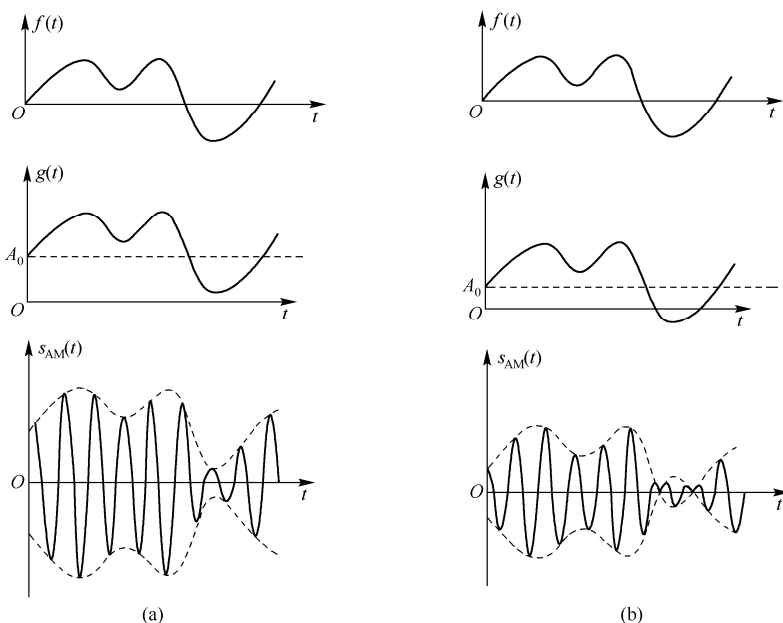


图 6.4-2 常规调幅 (AM) 的波形

由式(6.4-5)可知，实现常规调幅主要是运用加法器和乘法器，即为了得到 AM 信号，只需在幅度调制的一般模型（图 6.4-1）的输入端，将  $f(t)$  增加一直流分量  $A_0$  构成输入调制信号  $g(t)$ 。因此，可画出实现常规调幅的数学模型，如图 6.4-3 所示。

由图 6.4-2 及式(6.4-5)可见，在信号  $f(t)$  上增加一直流项，就相当于在乘法器的输出中，增加一载波项。

下面求 AM 信号的傅里叶变换。设

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(j\Omega), \quad \mathcal{F}[s_{AM}(t)] = S_{AM}(j\Omega)$$

$$\text{由于 } \mathcal{F}[\cos \Omega_0 t] = \pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$$

$$\mathcal{F}[f(t) \cos \Omega_0 t] = \frac{1}{2} \{ F[j(\Omega + \Omega_0)] + F[j(\Omega - \Omega_0)] \}$$

$$\text{则 } S_{AM}(j\Omega) = \mathcal{F}[s_{AM}(t)]$$

$$= \pi A_0 [\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)] + \frac{1}{2} \{ F[j(\Omega + \Omega_0)] + F[j(\Omega - \Omega_0)] \} \quad (6.4-6)$$

假定信号  $f(t)$  的频谱  $F(j\Omega)$  限制在  $-\Omega_m \sim +\Omega_m$  范围内， $F(j\Omega)$  示意地用图 6.4-4(a)的频谱形状来表示，而由式(6.4-6)所表示的 AM 信号频谱如图 6.4-4(b)所示。

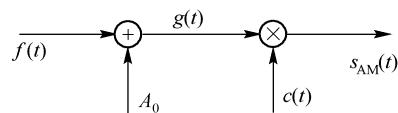


图 6.4-3 常规调幅(AM)的数学模型

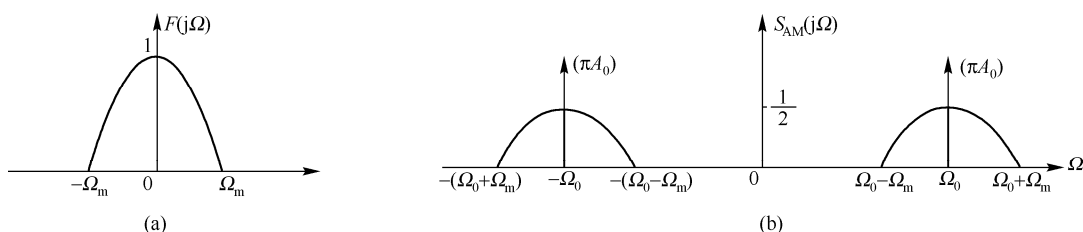


图 6.4-4 AM 信号的频谱

由式(6.4-6)或图 6.4-4(b)可见, AM 已调制信号  $s_{AM}(t)$  的频谱  $S_{AM}(j\Omega)$  是由两部分组成的。其中一部分是将  $f(t)$  的频谱  $F(j\Omega)$  向左、右分别移动  $\Omega_0$  (并乘以系数  $1/2$ ) 构成的, 它包含了  $f(t)$  的全部信息。另一部分是位于  $\Omega = \pm\Omega_0$  处的两个  $\delta$  函数, 其强度是  $\pi A_0$ 。实际上它是载波分量  $A_0 \cos \Omega_0 t$  的频谱, 它不含有任何有关  $f(t)$  的信息。

信号从甲地传送到乙地, 要通过信道。信道可以是某种传输线, 也可以是自由空间。在一段时间内, 一个信道如果只传送一个信号, 这是很不经济的。通常, 在一条传输线上, 或者在同一空间中, 总是同时有许多信号在传送着。为了使普通的接收机能利用它的选频电路选取希望接收的那个信号的载波和边频分量, 而不致受其他信号的干扰, 必须使一个信号的频谱与另一个在频率上相邻近的信号频谱彼此不相重叠。图 6.4-5 表示两个相邻的调幅电台发射的信号频谱, 它们各占有一定的频宽而互不重叠。由此可见, 在选取两个频率邻近的调幅波的载频时, 必须注意使两者频率之差不小于调制信号最高频率的两倍。例如, 普通广播电台传送声音信号的频段在  $50 \sim 4500 \text{ Hz}$  时, 音质尚可, 所以两邻近电台的载频, 规定相隔应为  $9 \text{ kHz}$ 。这样, 把若干个要传送的信号分别搬移到不同的载频上, 就可以在同一信道内同时传送几个信号。这是将一信道按频率划分为若干个频段, 每一频段内限定传送一个信号而互不干扰。用这种办法构成的一个通信系统称为频分多路复用 (frequency-division multiplex (FDM)) 系统。

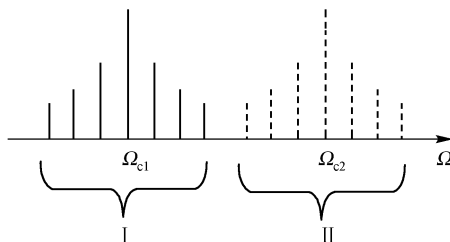


图 6.4-5 调幅电台的分布

## 2. 双边带抑制载波调幅

由上述讨论可以看出, 常规幅度调制 (AM) 的效率较低。既然载波分量不含有信息, 为了提高效率, 就可以将其抑制掉, 将其功率充分利用到有用的边带中去。这种幅度调制就称为抑制载波调幅 (suppressed carrier AM), 缩写为 SC-AM, 它的调制效率可达到  $100\%$ 。抑制载波调幅可分为双边带抑制载波调幅 (double sideband SC-AM) 和单边带抑制载波调幅 (single sideband SC-AM); 后者较前者占据带宽小一半。单边带抑制载波调幅见习题 6-13 和 6-14。这里只讨论双边带抑制载波调幅 (缩写为 DSB-SC-AM), 已调制信号记为  $s_{DSB}(t)$ 。

$s_{DSB}(t)$  可利用图 6.4-1 所示的模型得到, 只要令  $g(t)$  中的直流分量  $A_0 = 0$  即可。于是由式(6.4-5)可以得到双边带抑制载波调幅信号

$$s_{DSB}(t) = f(t) \cos \Omega_0 t \quad (6.4-7)$$

当然  $s_{DSB}(t)$  的频谱也可由  $S_{AM}(j\Omega)$  的表达式得到, 即令  $A_0 = 0$  即可。也可由式(6.4-7)直接进行傅里叶变换得到, 即

$$S_{DSB}(j\Omega) = \frac{1}{2} \{ F[j(\Omega + \Omega_0)] + F[j(\Omega - \Omega_0)] \} \quad (6.4-8)$$



图 6.4-6(b)示出了 DSB 的波形和它的频谱。同时, 信号  $f(t)$  的波形和它假定的频谱如图 6.4-6(a)所示。

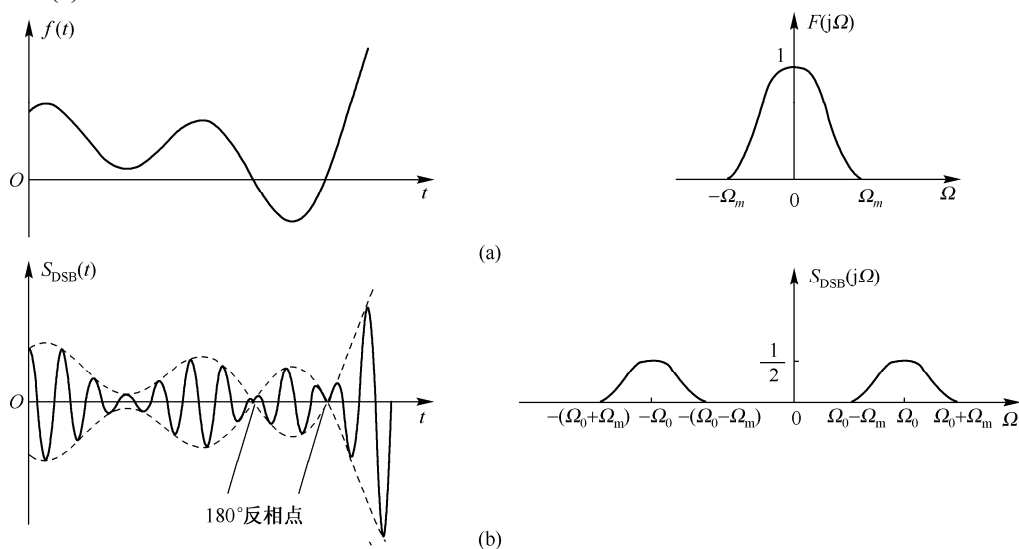


图 6.4-6  $s_{DSB}(t)$  波形和它的频谱  $S_{DSB}(j\Omega)$

由图 6.4-6 可见,  $S_{DSB}(j\Omega)$  没有载波谱线存在, 它是由  $F(j\Omega)$  频谱频移  $\pm\Omega_0$  而得到的。在 3.5 节中, 我们曾利用频移特性得到同样的结论。

### 3. 脉冲幅度调制

前两种幅度调制的载波信号采用了正弦载波, 另一类幅度调制技术利用的载波信号是一个矩形脉冲串, 如图 6.4-7(b)所示。这种类型的幅度调制称为脉冲幅度调制 (PAM)。

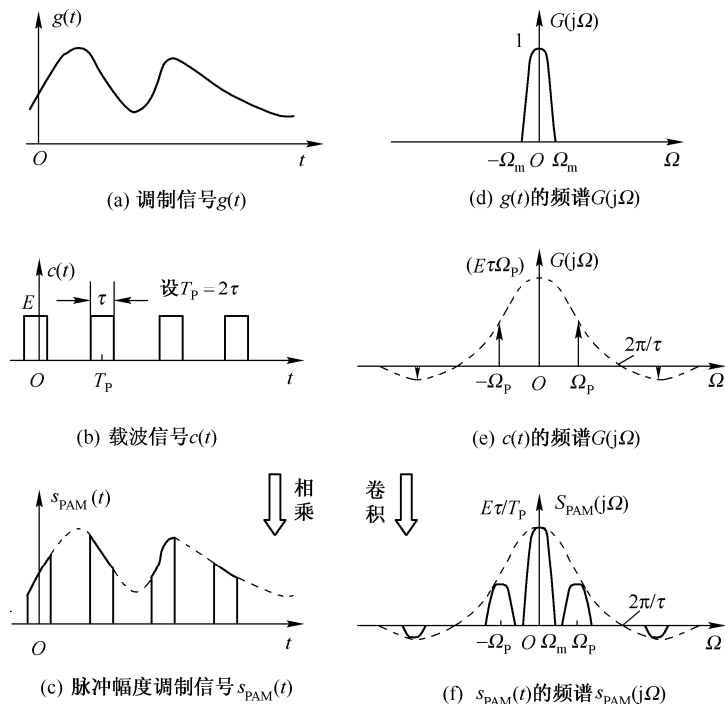


图 6.4-7 脉冲幅度调制信号的频谱

根据幅度调制的一般模型，可写出  $s_{\text{PAM}}(t)$  的表达式

$$s_{\text{PAM}}(t) = g(t)c(t) \quad (6.4-9)$$

其中载波  $c(t)$  就是图 6.4-7(b) 所示的矩形脉冲串。可见，脉冲幅度调制信号实际上就是 6.3 节介绍的矩形脉冲采样信号。所以，根据式(6.3-6)可以直接写出  $s_{\text{PAM}}(t)$  的傅里叶变换式，即

$$S_{\text{PAM}}(j\Omega) = \frac{E\tau}{T_p} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\Omega_p\tau}{2}\right) G[j(\Omega - n\Omega_p)] \quad (6.4-10)$$

图 6.4-7(f) 画出了脉冲幅度调制信号的频谱。

脉冲幅度调制的重要应用之一是在一个单的信道上传输多路信号。由图 6.4-7(c) 可以看出，已调制信号  $s_{\text{PAM}}(t)$  是仅当载波信号  $c(t)$  非零的时候才不为零，而在这种脉冲串的间隙内，就能传送其他的脉冲幅度已调制信号。这一过程可用图 6.4-8 表示。由图可知， $\tau/T_p$  的比值越小，在这个信道内能传输的信号路数就越多（图中所示为四路信号）。这一过程就是时分多路复用（time-division multiplex (TDM)）。前面讨论的频分多路复用是为每一路信号指定不同的频率间隔，而时分多路复用则是为每一路信号指定不同的时间间隔。

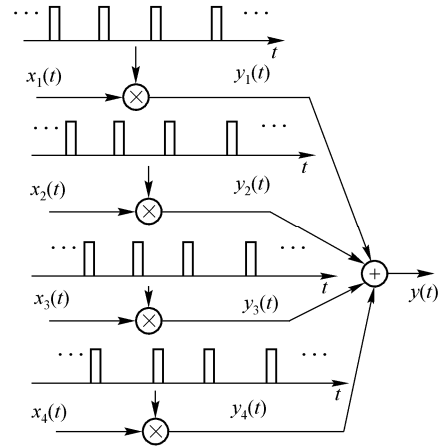


图 6.4-8 时分多路复用

### 6.4.3 解调的概念

解调又称为检波，它是从已调制信号  $s(t)$  中恢复出调制信号  $g(t)$  的过程。对于不同的调幅信号，对应着不同的解调方法。

#### 1. 常规调幅信号的解调（包络检波）

由图 6.4-2(a) 可以看出，常规调幅信号  $s_{\text{AM}}(t)$  的包络与调制信号成线性关系。因而，对于常规调幅信号的解调，可以采用最简单、廉价的包络检波器（由二极管、电阻、电容组成）来恢复原来的调制信号，且不失真，这就是常规调幅的一个最大优点。

#### 2. 双边带抑制载波调幅信号的解调

由图 6.4-6 可以看出， $s_{\text{DSB}}(t)$  的包络并不与调制信号  $g(t)$  成线性关系，而是随  $|g(t)|$  而变化，所以，其包络并不包含  $g(t)$  的全部信息。这样，DSB 信号的解调不能采用包络检波的方法，而必须采用相干（同步）解调（synchronous demodulation）的方法。

图 6.4-9(a) 示出了实现同步解调的一种原理方框图。这里  $\cos \Omega_0 t$  信号是接收端的本地载波（local carrier）信号，它与发送端的载波同频、同相。 $s_{\text{DSB}}(t)$  与  $\cos \Omega_0 t$  相乘的结果，使频谱  $S_{\text{DSB}}(j\Omega)$  向左、右分别移动  $\Omega_0$ （并乘以系数 1/2），得到如图 6.4-9(b) 所示的频谱  $G_0(j\Omega)$ ，即

$$G_0(j\Omega) = \frac{1}{2} \{ S_{\text{DSB}}[j(\Omega + \Omega_0)] + S_{\text{DSB}}[j(\Omega - \Omega_0)] \} \quad (6.4-11)$$

将式(6.4-8)代入式(6.4-11)，即得

$$G_0(j\Omega) = \frac{1}{2}F(j\Omega) + \frac{1}{4}\{F[j(\Omega + 2\Omega_0)] + F[j(\Omega - 2\Omega_0)]\} \quad (6.4-12)$$

再利用一个低通滤波器（带宽大于  $\Omega_m$ ，小于  $2\Omega_0 - \Omega_m$ ）滤除在频率为  $\pm 2\Omega_0$  附近的分量，即可取出  $g(t)$ ，完成解调，如图 6.4-9(b) 所示。这种解调器需要在接收端产生与发送端频率及相位均相同的本地载波，因此把这种解调方式称为同步解调。

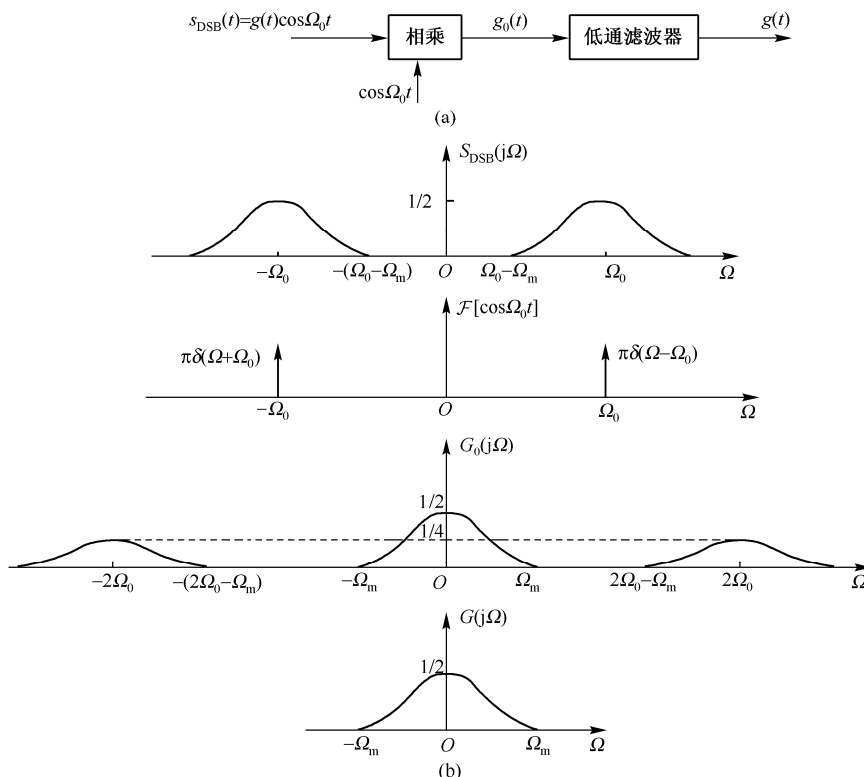


图 6.4-9 同步解调原理方框图及其频谱

比较以上两种解调方式（即包络检波与同步解调），各有优点和缺点。同步解调系统要求有一个更为高级的解调器，因为解调器中的振荡器必须与调制器中的振荡器在相位和频率上保持同步，这将使接收机复杂化。另一方面，非同步调制器则要求比同步调制器有更大的输出功率。因为包络检波器要能正常工作的话，包络线必须是正的，或者等效地说，在被发射信号中必须要有载波分量存在。这种情况比较适合于公共无线电广播等系统，因为它要求为数众多的、价格低廉的接收机（解调器）供大众收听。在发射功率上付出的额外代价可以在大量的廉价接收机上得到补偿。但是另一方面，在发射机的功率要求非常宝贵的情况下（例如，卫星通讯系统）就比较适合用同步解调系统，这样可以节省大量的能源。

### 3. 脉冲幅度调制信号的解调

由图 6.4-7(f) 可以看出，若载波信号的频率  $\Omega_p$  满足如下关系：

$$\Omega_p > 2\Omega_m \quad (6.4-13)$$

其中， $\Omega_m$  为调制信号  $g(t)$  的最高频率分量，则已调制信号  $s_{\text{PAM}}(t)$  的频谱将包含有调制信号

$g(t)$  的频谱  $G(j\Omega)$ ，那么就可以将已调制信号  $s_{\text{PAM}}(t)$  通过一个截止频率大于  $\Omega_m$  而小于  $\Omega_p - \Omega_m$  的低通滤波器，恢复出调制信号  $g(t)$ 。

## 6.5 MATLAB 在信息处理与通信中的应用

在信息处理中，线性时不变连续系统的主要功能是对信号进行滤波，将需要的信号保留或放大，将不需要的信号滤除或削弱。在 MATLAB 中，模拟滤波器设计函数相当成熟，主要有巴特沃思、切比雪夫 I 型、切比雪夫 II 型和椭圆滤波器四种类型。在信息通信中，对信号进行线性变换的方法，主要有信号的采样与重构、调幅变换，在 MATLAB 中，这两种变换方法没有直接实现函数，需要通过编程实现。

**例 6.5-1** 设计一个模拟低通滤波器，其性能指标为：通带边界频率  $\Omega_p = 1000 \text{ rad/s}$ ，通带最大衰减  $\delta_p = 1 \text{ dB}$ ，阻带边界频率  $\Omega_s = 2500 \text{ rad/s}$ ，阻带最小衰减  $\delta_s = 30 \text{ dB}$ 。分别用巴特沃思、切比雪夫 I 型、切比雪夫 II 型和椭圆滤波器四种设计方法设计上述滤波器，并绘制各滤波器的幅频特性曲线。

**解：**在给定滤波器性能指标的条件下，希望用最小阶次的滤波器来实现。MATLAB 信号处理工具箱为用户提供了一组可以直接得到最优滤波器阶数的函数，即 `Buttord`，`Cheb1ord`，`Cheb2ord` 和 `Ellipord`。通过上述函数可以得到滤波器的最小阶数和截止频率，从而设计出满足要求的滤波器。其程序 `exec601` 如下，滤波器的幅频特性如图 6.5-1 所示。

```
Wp=1000;Ws=2500;Rp=1;Rs=30;w=linspace(1,3000,1000);
[N1,Wn1]=buttord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s'); N1           %巴特沃思滤波器的最小阶数
[N2,Wn2]=cheb1ord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s');N2           %切比雪夫 I 型滤波器的最小阶数
[N3,Wn3]=cheb2ord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s');N3           %切比雪夫 II 型滤波器的最小阶数
[N4,Wn4]=Ellipord(Wp,Ws,Rp,Rs,'s');N4           %椭圆滤波器的最小阶数
[b1,a1]=butter(N1,Wn1,'s');h1=freqs(b1,a1,w);    %butter 设计巴特沃思滤波器
subplot(2,2,1);plot(w,abs(h1));grid;xlabel('rad/s');title('巴特沃思滤波器');
[b2,a2]=cheby1(N2,Rp,Wn2,'s');h2=freqs(b2,a2,w); %cheby1 设计切比雪夫 I 型滤波器
subplot(2,2,2);plot(w,abs(h2));grid;xlabel('rad/s');title('切比雪夫 I 型滤波器');
[b3,a3]=cheby2(N3,Rs,Wn3,'s');h3=freqs(b3,a3,w); %cheby2 设计切比雪夫 II 型滤波器
subplot(2,2,3);plot(w,abs(h3));grid;xlabel('rad/s');title('切比雪夫 II 型滤波器');
[b4,a4]=Ellip(N4,Rp,Rs,Wn4,'s');h4=freqs(b4,a4,w); %ellip 设计椭圆滤波器
subplot(2,2,4);plot(w,abs(h4));grid;xlabel('rad/s');title('椭圆滤波器');
```

在 MATLAB 命令窗口执行 `exec601` 后，命令窗口会出现  $N1=5$ ， $N2=4$ ， $N3=4$ ， $N4=3$ ，说明同样的性能指标，用巴特沃思滤波器设计需要 5 阶，用切比雪夫 I、II 型滤波器设计需要 4 阶，用椭圆滤波器设计只需 3 阶。当然椭圆滤波器存在通带和阻带的波动。

**例 6.5-2** 设时域信号  $f(t) = \text{Sa}(\pi t)$ ，现用采样频率  $\Omega_1 = 1.5\pi \text{ rad/s}$  和  $\Omega_2 = 2.5\pi \text{ rad/s}$  对其进行采样，用 MATLAB 绘制其时域采样信号序列及对应的频域信号的幅度谱。

**解：**信号  $f(t) = \text{Sa}(\pi t)$  的最高频率分量为  $\pi$ ，根据采样定理可知，其奈奎斯特采样频率为  $2\pi$ ，故采样频率  $\Omega_1$  小于  $2\pi$ ， $T_1 = 2\pi / \Omega_1 = (4/3) \text{ s}$ ，会发生频谱混叠；采样频率  $\Omega_2$  大于  $2\pi$ ， $T_2 = 2\pi / \Omega_2 = (4/5) \text{ s}$ ，不会发生频谱混叠。用 MATLAB 绘制的信号序列和信号幅度谱的程序 `exec602` 如下，波形和频谱如图 6.5-2 所示。

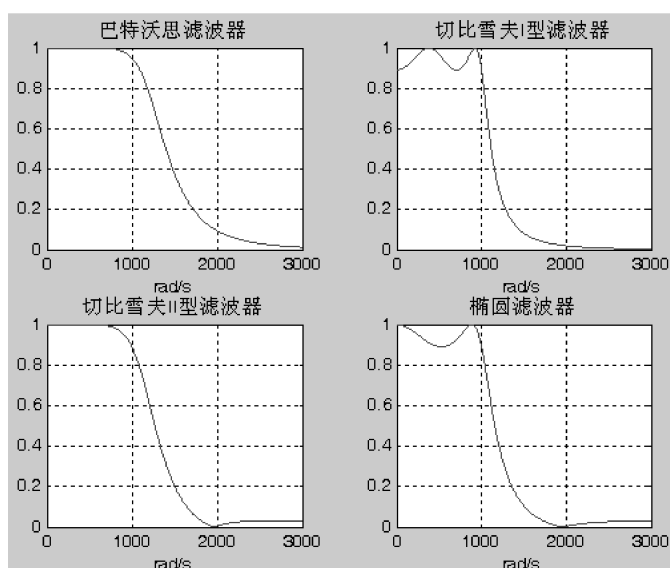


图 6.5-1 滤波器的幅频特性

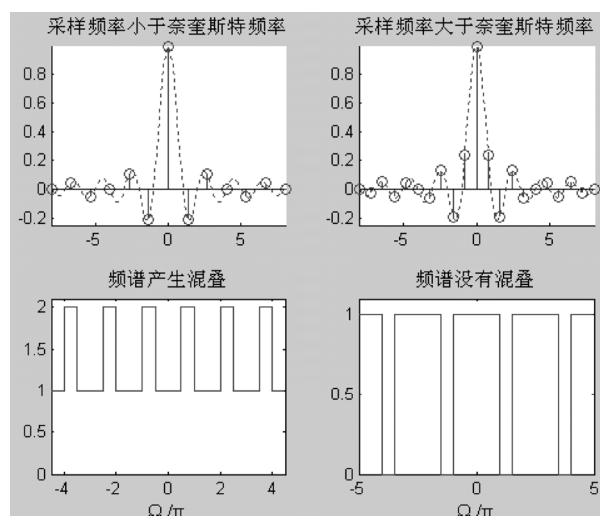


图 6.5-2 不同采样频率下的采样信号波形及频谱

```

n1=-8:4/3:8;f1=sinc(n1);subplot(2,2,1);
stem(n1,f1);hold on;t1=-8:0.1:8;
f2=sinc(t1);plot(t1,f2,':');
title('采样频率小于奈奎斯特频率');axis([-8 8 -0.25 1]);
n2=-8:4/5:8;f3=sinc(n2);subplot(2,2,2);
stem(n2,f3);hold on;t2=-8:0.1:8;
f4=sinc(t2);plot(t2,f4,':');
title('采样频率大于奈奎斯特频率');axis([-8 8 -0.25 1]);
x1=[-4.5*pi:0.001:4.5*pi];d1=[-4.5*pi:1.5*pi:4.5*pi];subplot(2,2,3);
y1=pulstran(x1+0.75*pi,d1,'rectpuls',0.5*pi);
plot(x1/pi,y1+1);axis([-4.5 4.5 0 2.1]);
title('频谱产生混叠');xlabel('\Omega/\pi');

```

%绘制 Sa 函数包络

%产生脉冲串

```

x2=[-5*pi:0.001:5*pi];d2=[-5*pi:2.5*pi:5*pi];subplot(2,2,4);
y2=pulstran(x2,d2,'rectpuls',2*pi);
plot(x2/pi,y2);axis([-5 5 0 1.1]);
title('频谱没有混叠');xlabel('\Omega/\pi');

```

%产生脉冲串

**例 6.5-3** 已知信号  $g_1(t) = 1 + 0.6\cos\pi t$  和  $g_2(t) = 1 + 1.4\cos\pi t$ ，通过载波信号  $c(t) = \cos 500t$  的调制，画出  $g_1(t)$  和  $g_2(t)$  的波形，并画出已调制信号的波形及其频谱。根据调制信号的波形，哪种信号可以满足常规调幅的条件？

**解：**调制信号  $g_1(t)$  和  $g_2(t)$  与高频载波相乘后得到已调制信号  $s_1(t) = g_1(t)c(t)$  和  $s_2(t) = g_2(t)c(t)$ 。 $g_1(t)$ 、 $g_2(t)$  及两个已调制信号的时域波形和频谱如图 6.5-3 所示。用 MATLAB 绘制的信号波形和频谱的程序 excec603 如下。

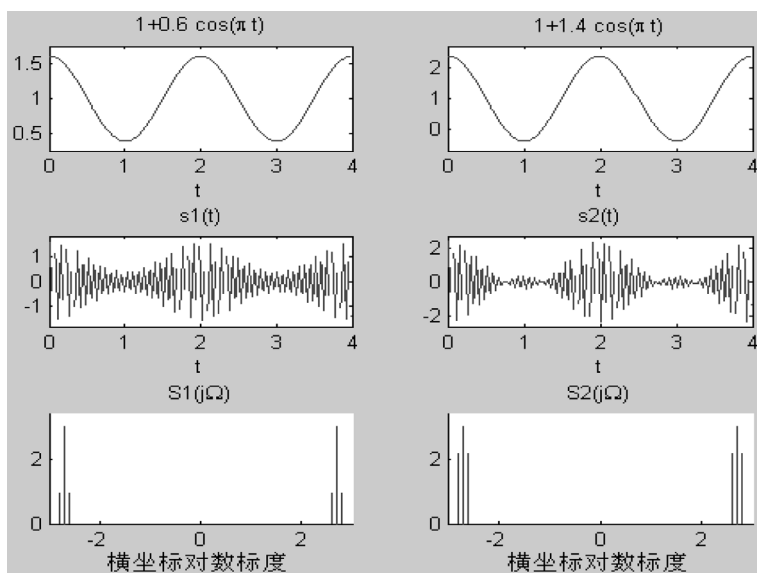


图 6.5-3 调制信号、已调制信号的波形及频谱

```

syms t;g1='1+0.6*cos(pi*t)';g2='1+1.4*cos(pi*t)';
subplot(321);ezplot(g1,[0,4]);
subplot(322);ezplot(g2,[0,4]);
s1='cos(500*t)*(1+0.6*cos(pi*t))';
s2='cos(500*t)*(1+1.4*cos(pi*t))';
subplot(323);ezplot(s1,[0,4]);title('s1(t)');
subplot(324);ezplot(s2,[0,4]);title('s2(t)');
subplot(325);line([-2.8 -2.8],[0.3*pi 0]);xlabel('横坐标对数标度');
line([-2.7 -2.7],[0 pi]);line([-2.6 -2.6],[0.3*pi 0]);
line([2.8 2.8],[0.3*pi 0]);line([2.7 2.7],[0 pi]);
line([2.6 2.6],[0.3*pi 0]);axis([-3 3 0 3.5]);title('S1(j\Omega)');
subplot(326);line([-2.8 -2.8],[0.7*pi 0]);xlabel('横坐标对数标度');
line([-2.7 -2.7],[0 pi]);line([-2.6 -2.6],[0.7*pi 0]);
line([2.8 2.8],[0.7*pi 0]);line([2.7 2.7],[0 pi]);
line([2.6 2.6],[0.7*pi 0]);axis([-3 3 0 3.5]);title('S2(j\Omega)');

```

常规调幅的要求是  $g(t)$  始终大于零, 显然信号  $g_1(t)$  满足常规调幅条件,  $s_1(t)$  的包络与  $g_1(t)$  成正比。而信号  $g_2(t)$  不满足常规调幅条件,  $s_2(t)$  的包络与  $g_2(t)$  不成正比。绘制已调制信号的频谱没有合适的函数, 完全是用线段绘制的, 由于横坐标无法完全按照比例刻度, 故采用对数刻度, 即横坐标从-3 到+3, 表示频率从-1000 到+1000。

## 习 题

6-1 电路如图题 6-1 所示, 写出系统频率响应特性  $H(j\Omega) = \frac{V_2(j\Omega)}{V_1(j\Omega)}$ 。为得到无失真传输, 元件参数

$R_1, R_2, C_1, C_2$  应满足什么关系?

6-2 一个理想低通滤波器的频响特性为  $H(j\Omega) = |H(j\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)}$ , 其幅频特性  $|H(j\Omega)|$  与相频特性  $\varphi(\Omega)$  如图题 6-2 所示。试证明此滤波器对于  $\frac{\pi}{\Omega_c}\delta(t)$  和  $\frac{\sin \Omega_c t}{\Omega_c t}$  的响应是相同的, 并求出该响应的表达式。

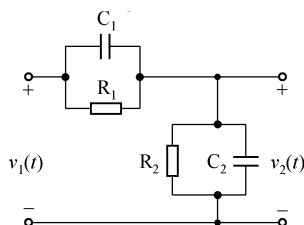


图 题 6-1

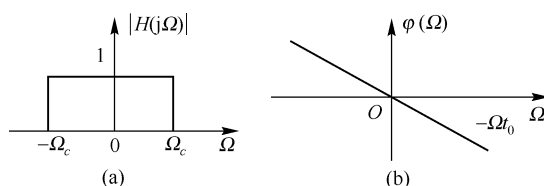


图 题 6-2

6-3 一个理想带通滤波器的幅频特性与相频特性如图题 6-3 所示, 求它的冲激响应, 并画出冲激响应的波形。

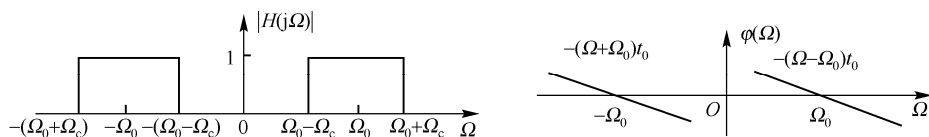


图 题 6-3

6-4 一个理想高通滤波器的幅频特性与相频特性如图题 6-4 所示, 求其冲激响应。

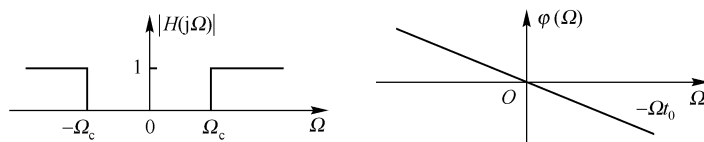


图 题 6-4

6-5 图题 6-5 所示系统中,  $H_L(j\Omega)$  为理想低通特性, 即  $H_L(j\Omega) = \begin{cases} e^{-j\Omega t_0}, & |\Omega| < 1 \\ 0, & |\Omega| > 1 \end{cases}$ 。

(1) 若  $v_1(t)$  为单位阶跃信号  $u(t)$ , 写出  $v_2(t)$  的表达式;

(2) 若  $v_1(t) = \frac{2\sin(t/2)}{t}$ , 写出  $v_2(t)$  的表达式。

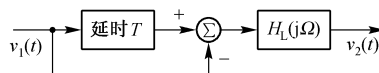


图 题 6-5

\*\*6-6 已知  $g(t) = \frac{\sin \Omega_c t}{\Omega_c t}$ ,  $s(t) = \cos \Omega_0 t$ , 设  $\Omega_0 \gg \Omega_c$ , 将它们相乘得到  $f(t) = g(t)s(t)$ 。若  $f(t)$  通过一个频响特性如图题 6-6 所示的理想带通滤波器, 求输出信号  $y(t)$  的表达式。

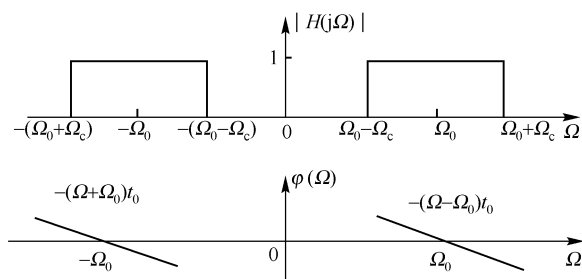


图 题 6-6

6-7 周期矩形脉冲信号  $\tilde{f}(t)$  如图题 6-7 所示, 脉冲宽度为  $\tau$  秒, 重复周期为  $T_1$  秒, 幅度为  $E$  伏。当该脉冲串加到如下各种理想滤波器的输入端时, 分别求各滤波器的输出信号。

- (1) 低通滤波器, 截止频率为  $\frac{1}{2T_1}$  Hz;
- (2) 低通滤波器, 截止频率为  $\frac{3}{2T_1}$  Hz;
- (3) 高通滤波器, 截止频率为  $\frac{1}{2T_1}$  Hz;
- (4) 带通滤波器, 截止频率为  $\frac{1}{2T_1}$  Hz 和  $\frac{3}{2T_1}$  Hz;
- (5) 带阻滤波器, 截止频率为  $\frac{1}{2T_1}$  Hz 和  $\frac{3}{2T_1}$  Hz;

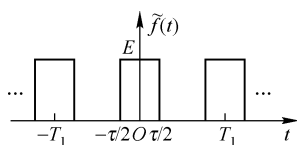


图 题 6-7

6-8 已知  $f(t) = \cos t$ , 现用  $T_s = \pi/4$  的时间间隔对其进行理想采样。

- (1) 画出  $f_s(t) = f(t)\delta_T(t)$  的波形图;
- (2) 求  $F_s(j\Omega) = \mathcal{F}[f_s(t)]$ , 并画出频谱图。

6-9 已知三角脉冲信号的频谱 (见附录 A), 分别求图题 6-9(a)和(b)两种信号被冲激采样后信号的频谱  $F_s(j\Omega)$ , 并大致画出频谱图 (采样间隔  $T_s = \tau/12$ )。

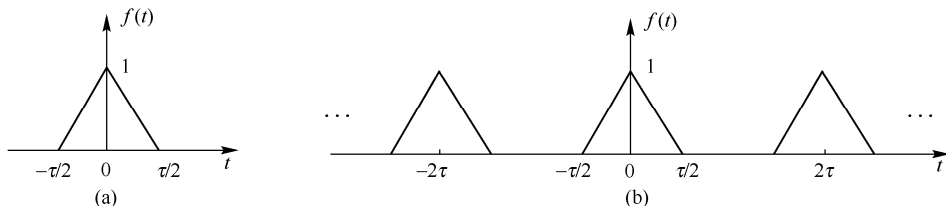


图 题 6-9

6-10 确定下列信号的奈奎斯特采样率与奈奎斯特间隔。

- (1)  $\text{Sa}(100t)$
- (2)  $\text{Sa}^2(100t)$
- (3)  $\text{Sa}(100t) * \text{Sa}(50t)$
- (4)  $\text{Sa}(100t) + \text{Sa}^2(60t)$

6-11 已知某系统如图题 6-11 所示, 输入信号  $x(t) = \text{Sa}(t)$ , 理想低通滤波器的频响特性为  $H(j\Omega) = u(\Omega + 6) - u(\Omega - 6)$ 。

- (1) 求  $X_s(j\Omega) = \mathcal{F}[x_s(t)]$ , 并画出频谱图;
- (2) 画出  $y(t)$  的频谱图  $Y(j\Omega) = \mathcal{F}[y(t)]$ ;
- (3) 求输出  $y(t)$  的表达式。



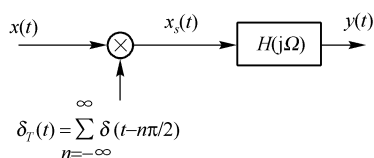


图 题 6-11

6-12 已知带限信号  $f(t)$  的频谱函数  $F(j\Omega)$  如图题 6-12(a)所示, 试画出当  $f(t)$  通过图题 6-12(b)所示系统时, 在系统中 A,B,C,D 各点信号的频谱图。图题 6-12(b)中两个理想滤波器的频响特性分别为

$$H_1(j\Omega) = \begin{cases} K, & |\Omega| > \Omega_c \\ 0, & |\Omega| < \Omega_c \end{cases}; \quad H_2(j\Omega) = \begin{cases} K, & |\Omega| < \Omega_c \\ 0, & |\Omega| > \Omega_c \end{cases}$$

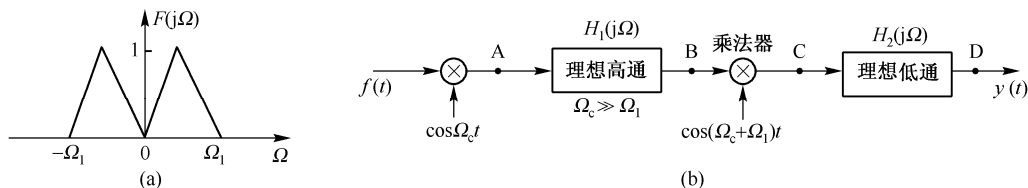


图 题 6-12

6-13 对于图 6.4-6 所示的抑制载波调幅信号的频谱  $S_{DSB}(j\Omega)$ , 由于  $F(j\Omega)$  的偶对称性, 使  $S_{DSB}(j\Omega)$  在  $\Omega_0$  和  $-\Omega_0$  左右对称, 利用此特点, 可以只发送如图题 6-13 所示的信号频谱  $F_1(j\Omega)$ , 称为单边带信号, 以节省频带。试证明在接收端用同步解调的方法可以恢复原信号  $F(j\Omega)$ 。

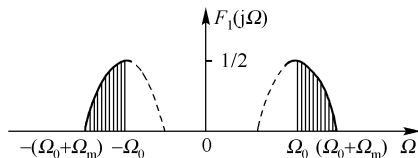


图 题 6-13

\*\*6-14 试证明图题 6-14 所示系统可以产生单边带信号。图中, 信号  $g(t)$  的频谱  $G(j\Omega)$  受限  $-\Omega_m \sim \Omega_m$  之间,  $\Omega_0 \gg \Omega_m$ ;  $H(j\Omega) = -j\text{sgn}\Omega$ 。设  $v(t)$  的频谱为  $V(j\Omega)$ , 求出  $V(j\Omega)$  的表达式, 并画出图形。

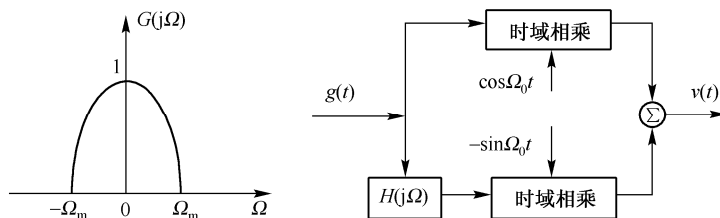


图 题 6-14

\*\*6-15 图题 6-15 示出一种正交复用通信系统。两路信号为频率相同但相移  $90^\circ$  的载波调制。试证明: 在接收端可以用相应的两路载波进行同步解调, 恢复两路原始信号。

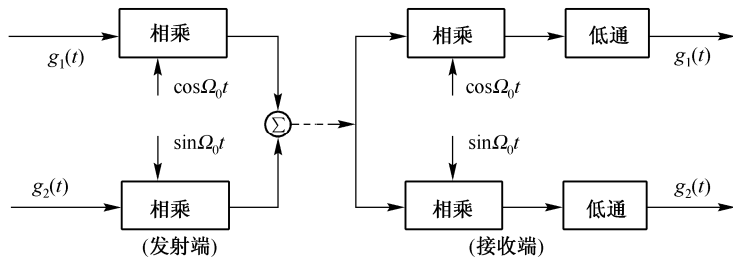


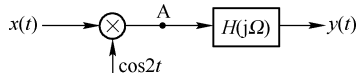
图 题 6-15

6-16 系统如图题 6-16 所示, 已知  $x(t) = 2\cos t + \frac{1}{3}\cos 2t$ ,  $H(j\Omega) = \begin{cases} \Omega + 3, & -3 < \Omega < 0 \\ 3 - \Omega, & 0 < \Omega < 3 \\ 0, & |\Omega| > 3 \end{cases}$ 。

(1) 画出 A 点信号的频谱图;

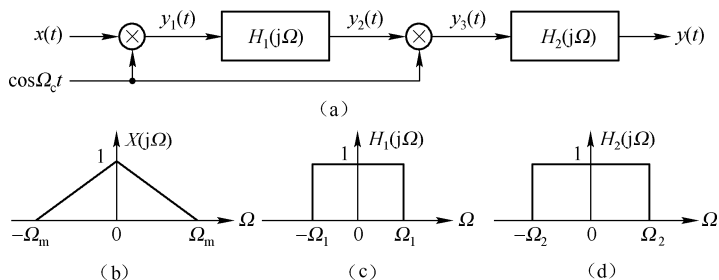
(2) 求输出信号  $y(t)$  的傅里叶变换  $Y(j\Omega)$ , 并画出频谱图;

(3) 求输出信号  $y(t)$ 。



图题 6-16

\*\*6-17 系统如图题 6-17 (a) 所示, 输入信号的频谱  $X(j\Omega)$  如图题 6-17 (b) 所示, 低通滤波器  $H_1(j\Omega)$  与  $H_2(j\Omega)$  分别如图题 6-17 (c) 和 (d) 所示。如果  $\Omega_m < \Omega_c$ ,  $\Omega_c - \Omega_m < \Omega_1 < \Omega_c$ , 且  $\Omega_c - \Omega_1 < \Omega_2 < \Omega_m$ , 粗略画出  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ ,  $y_3(t)$  和  $y(t)$  的频谱。证明整个系统等价于一个带通滤波器, 并用  $\Omega_c$ 、 $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  确定带通滤波器的上、下截止频率。

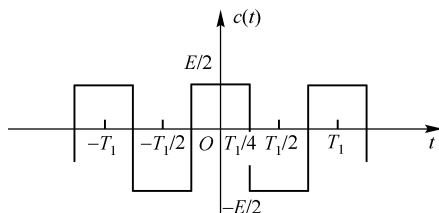


图题 6-17

\*\*6-18 已知调制信号  $g(t) = (1 + 0.3\cos \Omega_2 t)$ , 载波信号  $c(t)$  为如图题 6-18 所示的周期方波信号。

(1) 画出脉冲幅度调制信号  $s_{\text{PAM}}(t) = g(t)c(t)$  的波形图。其中  $T_2 = 2\pi/\Omega_2 \gg T_1$ ;

(2) 求脉冲幅度调制信号  $s_{\text{PAM}}(t)$  的傅里叶变换  $S_{\text{PAM}}(j\Omega)$ , 并画出频谱图  $S_{\text{PAM}}(j\Omega)$ 。



图题 6-18

### 以下为 MATLAB 习题

6-19 设计一个模拟高通滤波器, 其性能指标为: 通带边界频率  $\Omega_p = 3000 \text{ rad/s}$ , 通带最大衰减  $\delta_p = 0.5 \text{ dB}$ , 阻带边界频率  $\Omega_s = 1000 \text{ rad/s}$ , 阻带最大衰减  $\delta_s = 25 \text{ dB}$ 。用巴特沃思、切比雪夫 I 型、切比雪夫 II 型和椭圆滤波器四种设计方法设计上述滤波器, 并绘制各滤波器的幅频特性曲线。

6-20 设时域信号  $f(t) = \text{Sa}(2\pi t)$ , 现用采样频率  $\Omega_1 = 3\pi \text{ rad/s}$  和  $\Omega_2 = 4\pi \text{ rad/s}$  对其进行采样, 用 MATLAB 绘制其时域采样信号序列及对应的频域信号的幅度谱。

6-21 已知信号  $g_1(t) = 1 + 0.3\sin(2\pi t)$  和  $g_2(t) = 1 + 1.3\sin(2\pi t)$ , 通过载波信号  $c(t) = \cos 400\pi t$  的调制, 画出  $g_1(t)$  和  $g_2(t)$  的波形, 并画出已调制信号的波形及频谱。根据调制信号的波形, 说明哪种信号可以满足常规调幅的条件?

## 第 7 章 离散时间信号的时域与变换域分析

前面六章分别从时域和变换域（包括频域和  $s$  域）两方面讲述了连续时间信号和线性时不变连续时间系统的分析方法。从本章起，开始讨论离散时间信号和系统（discrete-time signals and systems）的分析方法。

离散时间系统的研究可以追溯到 17 世纪，当时发展起来的经典数值技术奠定了离散时间系统分析的数学基础；20 世纪 40 年代发展起来的计算机技术及其应用，标志着离散时间系统的理论研究和实践进入了一个新的阶段；1965 年库利（J.W.Cooley）提出的快速傅里叶变换算法（FFT）引起了数字信号处理领域研究者的巨大兴趣，并迅速地得到了广泛应用。与此同时，大规模集成电路和微处理器的研制成功及发展，使得数字系统（digital system）已能实现许多过去由模拟系统（连续系统）所完成的功能，而且其具有的如体积小、精度高、可靠性强等功能更是模拟系统所无法达到的。此后，在信号与系统分析的研究领域中，人们开始以一种新的观点——数字信号处理（digital signal processing）的观点来认识和分析各种问题。

从 20 世纪 60 年代至今，数字信号处理技术迅速发展，应用领域日益广泛，涉及军事、民用和生活的许多方面，如通信、雷达、控制、航空和航天、遥感、声呐、生物医学、地震学、微电子学和核物理学等，并在众多领域获得了丰硕成果。随着应用技术的发展，离散时间信号和系统自身的理论体系也逐步形成，并日趋完善。

本章中，首先讨论离散时间信号的基本理论，包括一些常用的离散时间信号和离散信号的运算；然后研究离散时间信号的  $z$  域表示及其性质和特点；最后简单介绍离散时间信号的傅里叶变换表示。

### 7.1 离散时间信号——序列

#### 7.1.1 离散时间信号的表示

只在某些离散瞬时给出函数值的时间函数，称为离散时间信号，简称为离散信号或序列（sequence）。也就是说，离散时间信号是时间（自变量）上不连续的序列，且给出函数值的离散时刻（瞬时）是任意的，即任意相邻两时刻之间的间隔大小是任意的，而在未给出函数值的其他时刻，函数值是没有定义的（注意：不能理解为零）。这是离散信号与连续信号的不同点之一。

在离散信号理论中，人们认为，“给出函数值的离散时刻”是理想的无限精确的时刻。该精确时刻的函数值的左、右极限均无实际意义。这是离散信号与连续信号的又一不同点。

离散信号的实例很多，如某城市日交通事故统计数字，数字系统的输入、输出信号，对连续时间信号的等间隔理想采样等。因此，不能狭隘地把离散时间信号仅理解为对连续时间信号的时域采样。事实上，离散时间信号与系统的理论已经形成自身的严密体系，且该理论及其应用也正在独立于连续时间信号与系统而发展着，或者说两者正在并行发展。另一方面，离散时间系统通常又表现出有别于连续时间系统的独特性能，它的某些处理方法（尤其在

重要分支——数字信号处理领域) 还是连续时间系统所无法比拟的或必须假借的唯一途径。由此可见离散时间信号与系统的重要性和价值。

在离散信号中, 若给出函数值的离散时刻是等间隔的, 且假设间隔为  $T$ , 则离散时间信号可以用  $t_n = nT$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) 时刻的函数值构成的序列, 如  $x(t_n)$  表示, 于是离散时间信号又可以表示为  $x(nT)$ 。实际应用时又常用  $x[n]$  代替  $x(nT)$ , 从而在数学上表示更加简洁, 此时  $n$  (只能取整数) 仅表示各函数值在序列中出现的先后次序, 并把对应序号为  $n$  的函数值  $x[n]$  称为信号在第  $n$  个样点的“样本”或“样值”(sample), 通常  $x[n]$  既可以写成一般的闭式形式, 如  $x[n] = 2^n$ , 也可以逐个列出  $x[n]$  的值, 如  $x[n] = \left\{ \dots, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots \right\}$ , 其中“1”下方的箭头表示该数值是  $n=0$  时刻的函数值,

还可以表示成如图 7.1-1 所示的图解(即图形), 图中线段的长短代表各样本值的大小。有时将线段的端点连接起来形成序列的包络。

需要注意的是, 虽然图中横轴被绘成一条连续的直线, 但必须理解成只有当  $n$  取整数值时,  $x[n]$  才有定义, 对于  $n$  取非整数值,  $x[n]$  没有意义。

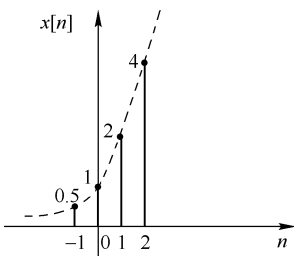


图 7.1-1 离散时间信号的波形

### 7.1.2 序列的种类

根据序列的长度、分布时段及重复性等多种特点, 序列可以有不同的分类。

根据序列的长度, 可以分为有限长序列和无限长序列。有限长序列是指只在有限的区间(如  $n_1 \leq n \leq n_2$ ) 有有限个非零样本的离散时间信号, 通常将连续的一段非零样本的个数称为序列的长度, 反之, 有无限多个非零样本的序列就是无限长序列, 例如序列  $x[n] = 2^n$  就是无限长序列, 而序列  $y[n] = 2^n$  ( $0 \leq n \leq M$ ) 则是长度为  $M+1$  的有限长序列。另外, 无限长序列又可分为右边序列、左边序列和双边序列, 其中右边序列是形如  $x[n] = 0, n < n_1$  的序列; 而左边序列是形如  $x[n] = 0, n > n_2$  的序列。

根据序列所处的时段, 可以分为因果序列和非因果序列。因果序列是指序列的非零样本全部落在  $n \geq 0$  的区域, 如上面提到的序列  $y[n] = 2^n$  ( $0 \leq n \leq M$ ); 而如果序列在  $n < 0$  的区域有非零的样本, 则该序列为非因果序列, 如序列  $x[n] = \{1, -2, 0, 3, 5\}$ 。

根据序列的重复性, 可以分为周期序列和非周期序列。如果序列  $x[n]$  对任意的整数  $n$  都具有  $x[n] = x[n+N]$  的特点, 其中  $N$  是整数, 则称序列  $x[n]$  是周期的, 且其周期为  $N$  中的最小正整数。

### 7.1.3 典型序列

典型离散信号在离散时间系统中的地位与典型连续信号在连续时间系统分析中的地位一样, 十分重要。下面介绍几类典型离散信号。

#### 1. 单位样值信号 (unit sample sequence)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (7.1-1)$$

如图 7.1-2 所示, 它只在  $n=0$  处取值为 1, 在其余样点上皆取为 0, 因此也称“单位函数”、“单位脉冲”、“单

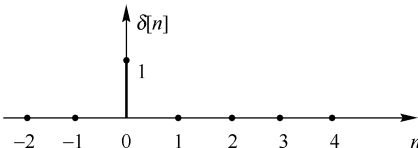


图 7.1-2 单位样值序列

位取样”或“单位冲激”。它在离散时间系统中的作用，类似于连续时间系统中单位冲激函数  $\delta(t)$ 。但是必须注意， $\delta(t)$  是  $t=0$  时脉宽趋于 0、幅值趋于无限大而面积恒为 1 的信号，是极限意义上的而非现实的信号；而  $\delta[n]$  是一个现实的序列，其幅度有限，而且只在瞬时  $n=0$  处值为 1。

## 2. 单位阶跃序列 (unit step sequence)

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (7.1-2)$$

如图 7.1-3 所示，它类似于连续时间系统中的单位阶跃信号  $u(t)$ 。但需注意， $u(t)$  在  $t=0$  点发生跳变而没有定义，而  $u[n]$  在  $n=0$  时取确定值 1。

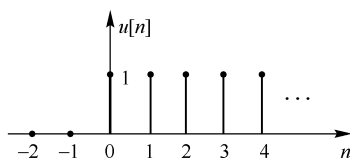


图 7.1-3 单位阶跃序列

## 3. 矩形序列 (rectangular sequence)

$$R_N[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (7.1-3)$$

如图 7.1-4 所示。它从  $n=0$  开始到  $n=N-1$  共  $N$  个幅度为 1 的样值，其余各点均为 0。该序列类似于连续时间系统中的矩形脉冲。

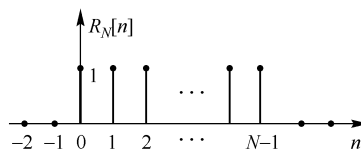


图 7.1-4 矩形序列

## 4. 单边实指数序列 (single sided exponential sequence)

$$x[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (7.1-4)$$

当  $a$  取不同的实数值时，序列的图形为图 7.1-5 所示的几种形式。显然， $a > 0$  序列都是正值； $a < 0$  序列在正、负之间摆动。而当  $|a| > 1$  时，序列是增长的；当  $|a| < 1$  时，序列是衰减的；当  $|a| = 1$  时，序列是等幅振荡的或恒定的。

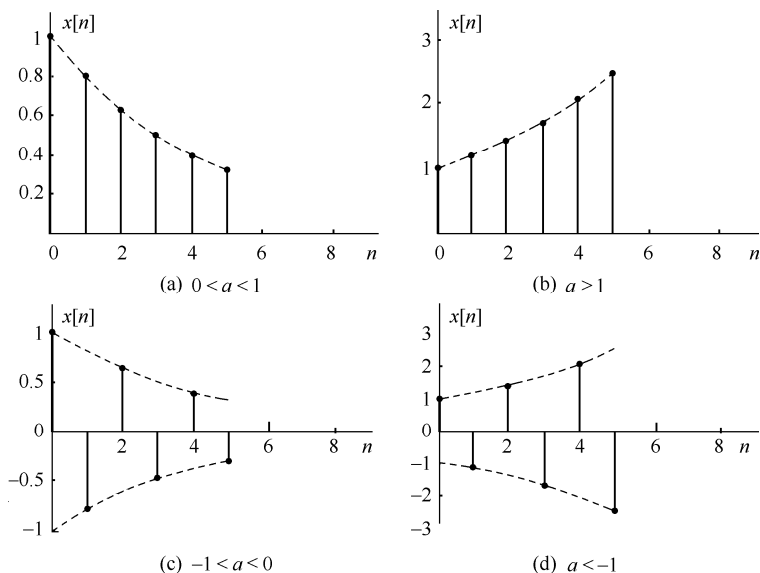


图 7.1-5 单边实指数序列

## 5. 单边正弦序列 (single sided sinusoidal sequence)

$$x[n] = \begin{cases} \sin \omega_0 n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad (7.1-5)$$

其中,  $\omega_0$  是该序列正弦包络的振荡频率, 它反映了序列值周期性重复的速率。如  $\omega_0 = 2\pi/N$ , 则该序列正弦包络的每一个周期中包含  $N$  个样值点, 即序列每  $N$  个值重复一次正弦包络的数值。图 7.1-6 是  $\omega_0 = \pi/10$  (即  $N = 20$ ) 时的序列。显然, 如果  $2\pi/\omega_0$  为正整数, 则正弦序列是周期序列, 其周期为  $N = 2\pi/\omega_0$ ; 如果  $2\pi/\omega_0$  不是整数, 但它是有理数, 如假设  $2\pi/\omega_0 = p/q$  ( $p, q$  为互质整数), 则正弦序列仍为周期序列, 其周期为  $p$ ; 如果  $2\pi/\omega_0$  是无理数, 则正弦序列不具有周期性。下面来说明正弦序列  $x[n] = \sin \omega_0 n$  的这一特性。

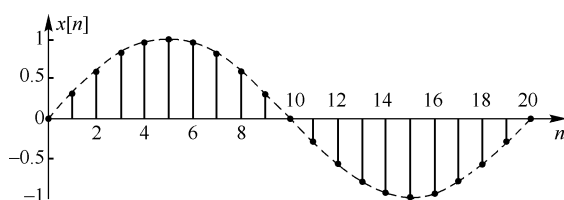


图 7.1-6 单边正弦序列

如果序列  $x[n]$  是周期序列并且周期为  $N$  ( $N$  为整数) 则有

$$x[n + kN] = x[n] \quad (k \text{ 为整数}) \quad (7.1-6)$$

因为

$$x[n + kN] = \sin \omega_0 (n + kN) = \sin(\omega_0 n + \omega_0 kN) \quad (7.1-7)$$

由式(7.1-6)可知,  $\omega_0 kN = 2\pi r$ , 其中  $r$  为整数, 则  $2\pi/\omega_0 = kN/r$  为有理数。特别地, 若  $r = k$ , 则周期为  $N$ 。

无论正弦序列是否具有周期性, 都称  $\omega_0$  是它的频率。

**例 7.1-1** 求正弦序列  $x[n] = \sin \omega_0 n$  的周期, 其中  $2\pi/\omega_0 = 3/4$ , 并画出该序列图形。

**解:** 因为  $2\pi/\omega_0 = 3/4 = p/q$  是有理数, 取  $q = 4$ , 则周期  $N = p = 3$ , 其图形如图 7.1-7 所示。

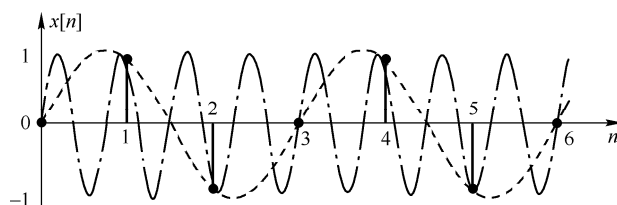


图 7.1-7 例 7.1-1 中的正弦序列  $\sin \omega_0 n$

图 7.1-7 中的点画线包络为连续时间正弦函数  $\sin \Omega_0 t$  ( $\Omega_0 = 8\pi/3$ ) 的曲线, 而虚线包络为连续时间正弦函数  $\sin \Omega_1 t$  ( $\Omega_1 = \frac{2\pi}{3}$ ) 的曲线。两正弦函数的周期分别为  $3/4$  和  $3$ 。图 7.1-7 中序列是从  $\sin \Omega_0 t$  的整 4 个周期或  $\sin \Omega_1 t$  的 1 个周期中等间隔地取出 3 个样本值, 即取  $t = 0, 1,$

2, 3, ...等整时刻点的样值, 从而每 3 个相邻的样值周期性重复一次。将此应用进行推广, 对连续信号中的正弦信号进行取样, 可得正弦序列。如正弦信号为  $x(t) = \sin \Omega_0 t$ , 它的取样值为  $x[n] = x(nT) = \sin n\Omega_0 T$ 。令  $\omega_0 = \Omega_0 T = \Omega_0 / f_s$ , 其中  $T$  是取样间隔,  $f_s$  是取样频率, 为区分  $\omega_0$  与  $\Omega_0$ , 通常称  $\omega_0$  为离散域的频率 (又称数字角频率, 单位是弧度), 而称  $\Omega_0$  为连续域的频率 (又称模拟角频率, 单位为弧度/秒),  $\omega_0$  可以认为是  $\Omega_0$  对  $f_s$  的归一化频率。

与正弦序列相对应的还有余弦序列

$$x[n] = \cos \omega_0 n \quad (7.1-8)$$

## 6. 斜变序列 (ramp sequence)

$$x[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \quad (7.1-9)$$

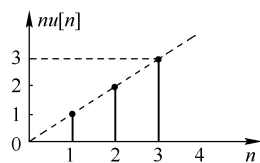


图 7.1-8 斜变序列

如图 7.1-8 所示。它类似于连续时间系统中的斜变函数  $x(t) = tu(t)$ 。

## 7. 复指数序列 (complex exponential sequence)

复序列是取复数值的序列, 即其每个样本值均可以是具有实部和虚部的复数。常见的复序列是复指数序列

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} = \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n \quad (7.1-10)$$

也可以用极坐标表示为模和相位的形式

$$x[n] = |x[n]| e^{j \arg[x[n]]} \quad (7.1-11)$$

对复指数序列式 (7.1.10), 其模  $|x[n]| = 1$ , 相位  $\arg[x[n]] = \omega_0 n$ 。

### 7.1.4 序列的运算

在离散时间系统分析中, 序列之间的加减、相乘及序列移位是经常遇到的。

$$(1) \text{ 序列的加减: } x[n] = x_1[n] \pm x_2[n] \quad (7.1-12)$$

$$(2) \text{ 序列的乘积: } x[n] = x_1[n] \cdot x_2[n] \quad (7.1-13)$$

$$\text{数乘} \quad y[n] = a x[n] \quad (7.1-14)$$

从而有  $x[n] u[n] = \begin{cases} x[n], & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$ , 即单位阶跃序列可以用来简化单边序列的表示, 且说明

信号  $x[n] u[n]$  是因果序列。又如单边指数序列可表示为  $x[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = a^n u[n]$ 。

$$(3) \text{ 序列移位: } y[n] = x[n-m] \quad (7.1-15)$$

式(7.1-15)中  $m$  为整数, 且当  $m > 0$  时, 序列  $x[n]$  右移  $m$  个样本; 而当  $m < 0$  时, 序列  $x[n]$  左移  $|m|$  个样本。序列移位运算也可以用移位算子  $E$  及其幂次来表示, 即

$$E x[n] = x[n+1] \quad E^m x[n] = x[n+m] \quad E^{-1} x[n] = x[n-1] \quad E^{-m} x[n] = x[n-m] \quad (7.1-16)$$

(4) 序列的差分和累加运算: 与连续时间信号的微分、积分运算相对应, 离散时间信号的分析中经常要用到差分和累加运算。其中:

$$\text{序列的一阶前向差分定义为} \quad \Delta x[n] = x[n+1] - x[n] \quad (7.1-17)$$

序列的一阶后向差分定义为  $\nabla x[n] = x[n] - x[n-1]$  (7.1-18)

序列的累加运算定义为  $y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$  (7.1-19)

(5) 序列的能量:  $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$  (7.1-20)

(6) 序列的分解: 任意一个序列都可以分解为加权、延迟的单位样值信号之和, 即

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m] \quad (7.1-21)$$

这是由于  $\delta[n-m] = \begin{cases} 1, & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$ , 所以  $x[n]\delta[n-m] = \begin{cases} x[m], & n=m \\ 0, & n \neq m \end{cases} = x[m]\delta[n-m]$ , 根据上述运算, 可以有如下各式:

$$u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-m] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] \quad (7.1-22)$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \quad (7.1-23)$$

$$R_N[n] = u[n] - u[n-N] = \sum_{m=0}^{N-1} \delta[n-m] \quad (7.1-24)$$

(7) 序列的反褶:  $y[n] = x[-n]$  (7.1-25)

(8) 序列的卷积和: 对任意序列  $x[n]$  和  $y[n]$ , 定义其卷积和  $s[n]$  (又称为离散线性卷积) 为

$$s[n] = x[n] * y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[n-m] \quad (7.1-26)$$

比较式(7.1-21)和式(7.1-26), 可知  $x[n] * \delta[n] = x[n]$ , 亦即任意一个序列和单位样值序列的卷积和是它自身。卷积和与卷积积分的计算有许多相似之处, 如在时域中按照定义通过反褶、时移、相乘、求和四个计算步骤进行, 或采用  $z$  域相乘再求逆变换的方法进行求解。

**例 7.1-2** 已知序列  $x[n] = 2^n \{u[n+1] - u[n-4]\}$ ,  $y[n] = \cos \frac{\pi}{2} n \{u[n] - u[n-5]\}$ , 计算并

画出序列  $w[n] = x[n] + x[n-1]x[n-2]$ ,  $v[n] = x[n] - y[n+1]$  和  $z[n] = x[n] * y[n]$  的图形。

**解:** 序列  $x[n]$ ,  $y[n]$  可以分别表示为

$$x[n] = \{0.5, \underset{\uparrow}{1}, 2, 4, 8\}$$

或者  $x[n] = \{0.5, 1, 2, 4, 8\}$ ,  $-1 \leq n \leq 3$  和  $y[n] = \{1, 0, -1, 0, 1\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$

它们的图形分别如图 7.1-9 (a) 和 (d) 所示。

从而有  $x[n-1] = \{0.5, 1, 2, 4, 8\}$ ,  $0 \leq n \leq 4$

$$x[n-2] = \{0.5, 1, 2, 4, 8\}, 1 \leq n \leq 5$$

$$= \{0, 0.5, 1, 2, 4, 8\}, 0 \leq n \leq 5$$

$$y[n+1] = \{1, 0, -1, 0, 1\}, -1 \leq n \leq 3$$

所以  $w[n] = x[n] + x[n-1]x[n-2] = \{0.5, \underset{\uparrow}{1}, 2, 4, 8\} + \{0, 0.5, 2, 8, 32, 0\}$

$$= \{0.5, \underset{\uparrow}{1}, 2.5, 6, 16, 32\}$$



同理

$$v[n] = x[n] - y[n+1] = \{-0.5, 1, 3, 4, 7\}$$

它们的图形分别如图 7.1-9 (b)、(c)、(e)、(f) 和 (g) 所示。

而对于卷积和的计算, 根据定义, 有

$$\begin{aligned} z[n] &= x[n] * y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[n-m] \\ &= 0.5y[n+1] + y[n] + 2y[n-1] + 4y[n-2] + 8y[n-3] \end{aligned}$$

从而

$$z[n] = \{0.5, 1, 1.5, 3, 6.5, -3, -6, 4, 8\}$$

其如图 7.1-9 (h) 所示。

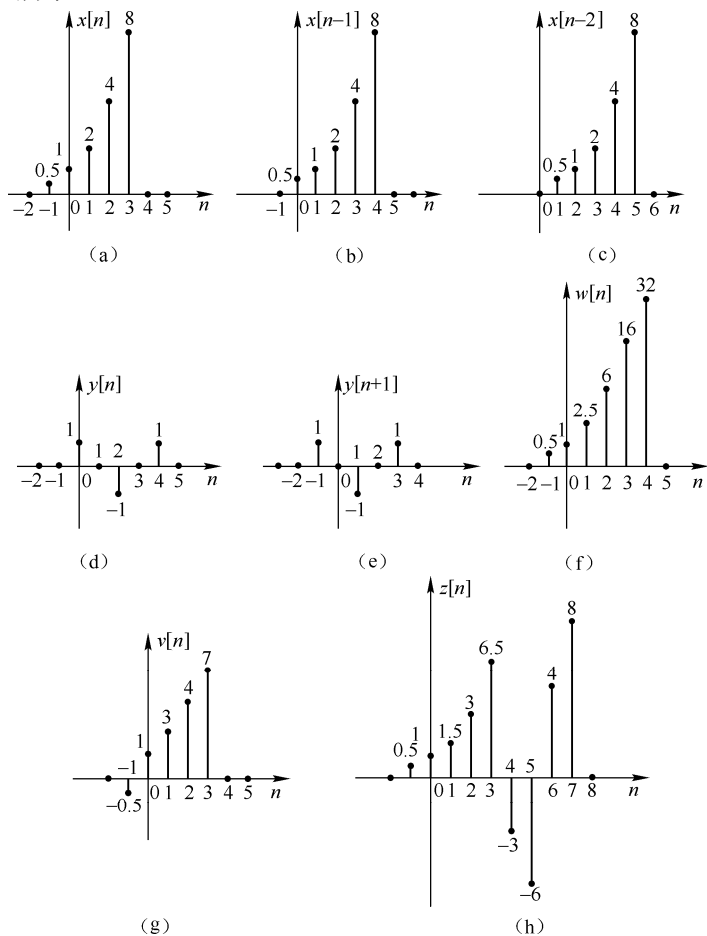


图 7.1-9 例 7.1-2 中各序列的图形

根据上式的计算发现, 可以用更方便的乘法运算实现卷积和, 具体表示如图 7.1-10 所示。

|        |             |   |      |    |     |
|--------|-------------|---|------|----|-----|
| $x[n]$ | 0.5 1 2 4 8 |   |      |    |     |
| $y[n]$ | 1 0 -1 0 1  |   |      |    |     |
|        |             |   | -0.5 | -1 | -2  |
|        |             |   | 1    | 2  | 4   |
|        |             |   | 2    | 4  | 8   |
| $z[n]$ | 0.5         | 1 | 1.5  | 3  | 6.5 |
|        |             |   | -3   | -6 | 4   |
|        |             |   |      |    | 8   |

图 7.1-10 例 7.1.2 的卷积和的乘法计算方法

下面再看两例, 分别应用定义 (即四步骤方法) 和乘法方法计算卷积和。

**例 7.1-3** 假设  $x[n] = u[n]$ ,  $y[n] = a^n u[n]$ ,  $0 < a < 1$ , 试求  $s[n] = x[n] * y[n]$ 。

**解:** 由式(7.1-26)知

$$\begin{aligned} s[n] &= x[n] * y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]a^{n-m}u[n-m] \\ &= \sum_{m=0}^n a^{n-m}u[n] = a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}u[n] = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}u[n] \end{aligned}$$

该离散线性卷积的计算过程如图 7.1-11 所示。

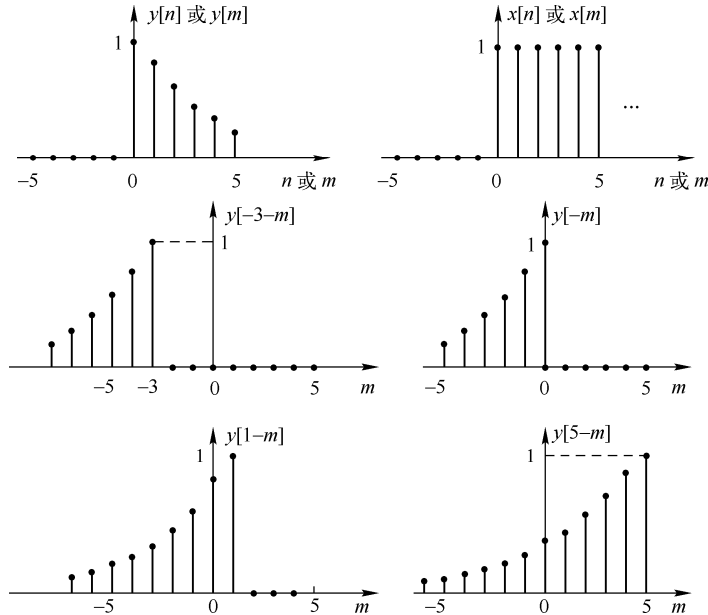


图 7.1-11 例 7.1-3 中卷积和的计算过程

**例 7.1-4** 假设两序列为

$$\begin{aligned} x[n] &= 3\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3] \\ y[n] &= 2\delta[n] + \delta[n-1] + 5\delta[n-2] \end{aligned}$$

求  $s[n] = x[n] * y[n]$ 。

**解:** 根据乘法运算, 将两序列写成两行, 并逐个数值相乘, 如图 7.1-12 所示, 得到

$$s[n] = \{6, 7, 21, 14, 11, 5\}, \quad 0 \leq n \leq 5。$$

|        |   |   |    |    |    |    |   |
|--------|---|---|----|----|----|----|---|
| $x(n)$ |   |   |    | 3  | 2  | 2  | 1 |
| $y(n)$ |   |   |    | 2  | 1  | 5  |   |
|        |   |   |    | 15 | 10 | 10 | 5 |
|        |   |   | 3  | 2  | 2  | 1  |   |
|        |   | 6 | 4  | 4  | 2  |    |   |
| $s[n]$ | 6 | 7 | 21 | 14 | 11 | 5  |   |

图 7.1-12 例 7.1-4 中卷积和的乘法计算法

## 7.2 序列的 $z$ 变换

### 7.2.1 $z$ 变换的定义

$z$  变换在离散时间信号和系统分析中的地位与作用与连续时间信号和系统中的拉氏变换

相当。本节开始陆续讨论  $z$  变换的定义、性质及其与拉氏变换、傅氏变换的联系。 $z$  变换定义可以由采样信号的拉氏变换引出（见 7.2.4 节），也可以直接对离散信号给予定义。与拉氏变换类似， $z$  变换也有单边和双边之分。下面分别给出它们的定义。

序列  $x[n]$  的单边  $z$  变换（single sided  $z$  transform）定义为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots \quad (7.2-1)$$

序列  $x[n]$  的双边  $z$  变换（bilateral (two-sided)  $z$  transform）定义为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (7.2-2)$$

无论单边  $z$  变换还是双边  $z$  变换都用符号  $\mathcal{Z}[\cdot]$  表示， $z$  是复变量，记为  $z = \rho e^{j\omega}$ 。如果  $x[n]$  为因果序列，则双边  $z$  变换和单边  $z$  变换相同。

上面二式表明，序列的  $z$  变换是复变量  $z^{-1}$  的幂级数（power series）（也称洛朗级数），其系数是序列  $x[n]$  的样值。由于在连续时间系统中，非因果信号的应用较少，因而着重讨论单边拉氏变换；而在离散时间系统中，非因果序列也有一定的应用范围，因此，着重研究单边  $z$  变换但适当兼顾双边  $z$  变换。

**例 7.2-1** 已知两序列分别为

$$x_1[n] = \begin{cases} a^n, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} = a^n u[n], \quad x_2[n] = \begin{cases} 0, n \geq 0 \\ -a^n, n < 0 \end{cases} = -a^n u[-n-1]$$

分别求它们的  $z$  变换。

**解：**由式(7.2-2)，可分别求出  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  的  $z$  变换

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

它是几何级数，若  $|az^{-1}| < 1$ ，即  $|z| > |a|$  时，级数收敛，于是

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - (az^{-1})} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

同理

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-a^n)z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n}z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n}z^n$$

它也是几何级数，只有当  $|a^{-1}z| < 1$ ，即  $|z| < |a|$  时级数才收敛，于是

$$X_2(z) = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| < |a|$$

上述结果说明，只有当级数收敛时， $z$  变换才有意义。而且两个不同的序列可以具有相同的  $z$  变换表达式，但它们的  $z$  的取值范围不同。

## 7.2.2 $z$ 变换的收敛域

根据  $z$  变换的定义， $z$  变换是复变量  $z^{-1}$  的幂级数，根据级数理论，只有当级数收敛（convergence）时， $z$  变换才有意义。对于任意给定的有界序列  $x[n]$ ，使  $z$  变换定义式(7.2-1)或式(7.2-2)级数收敛的  $z$  值的集合，称为  $z$  变换的收敛域（ROC）。从例 7.2-1 知道，不同的

序列在不同的收敛域条件下，可以有相同的  $z$  变换。因此必须讨论  $z$  变换的收敛问题。

根据级数理论，式(7.2-2)所示的级数收敛的充要条件是满足绝对可和条件，即要求

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| < \infty \quad (7.2-3)$$

式(7.2-3)的左端构成正项级数 (positive series)，通常可以采用两种方法——比值判定法和根值判定法来判别正项级数的收敛性。

- 比值判定法：若有一个正项级数  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$ ，令它的后项与前项比值的极限等于  $\rho$ ，即

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad (7.2-4)$$

则当  $\rho < 1$  时级数收敛，当  $\rho > 1$  时级数发散，当  $\rho = 1$  时级数可能收敛也可能发散。

- 根值判定法：令正项级数的一般项  $|a_n|$  的  $n$  次根的极限等于  $\rho$ ，即

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad (7.2-5)$$

则当  $\rho < 1$  时级数收敛，当  $\rho > 1$  时级数发散，当  $\rho = 1$  时级数可能收敛也可能发散。

下面利用根值判定法来讨论几类序列的  $z$  变换收敛域问题。

### 1. 有限长序列 (finite-length sequence)

有限长序列  $x[n]$ ， $n_1 \leq n \leq n_2$  的  $z$  变换为

$$X(z) = \sum_{n=n_1}^{n_2} x[n]z^{-n}$$

由于  $n_1, n_2$  是有限整数，因而上式是一个有限项级数。当  $n_1 \geq 0$  时， $X(z)$  除了  $z=0$  点外，在  $z$  平面上处处收敛，即收敛域为  $|z| > 0$ ；当  $n_2 \leq 0$  时， $X(z)$  除了  $z=\infty$  点外，在  $z$  平面上处处收敛，即收敛域为  $|z| < \infty$ ；而当  $n_1 < 0, n_2 > 0$  时， $X(z)$  除了在  $z=0$  和  $z=\infty$  两点外，在  $z$  平面上处处收敛，因而收敛域为  $0 < |z| < \infty$ 。所以有限长序列的  $z$  变换的收敛域至少为  $0 < |z| < \infty$ ，但可能还包括  $z=0$  或  $z=\infty$ ，这由序列的形式所决定。

### 2. 右边序列 (right-sided sequence)

右边序列  $x[n]=0, n < n_1$  的  $z$  变换为  $X(z) = \sum_{n=n_1}^{\infty} x[n]z^{-n}$ ，由式(7.2-5)，若满足  $\rho =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x[n]z^{-n}|} < 1, \text{ 即}$$

$$|z| > \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x[n]|} = R_+ \quad (7.2-6)$$

则该级数收敛，其中  $R_+$  称为级数的收敛半径 (radius of convergence)。可见，右边序列的收敛域是  $z$  平面上以原点为圆心、以  $R_+$  为半径的圆的外部。如果  $n_1 \geq 0$ ，则收敛域包括  $z = \infty$ ，即  $|z| > R_+$ ；如果  $n_1 < 0$ ，则收敛域不包括  $z = \infty$ ，即收敛域为  $R_+ < |z| < \infty$ 。显然，当  $n_1 \geq 0$  时，右边序列就为因果序列，也就是说，因果序列是右边序列的一种特例，它的收敛域是  $|z| > R_+$ 。

### 3. 左边序列 (left-sided sequence)

左边序列  $x[n]=0, n > n_2$  的  $z$  变换为  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{n_2} x[n]z^{-n}$ , 若令  $m = -n$ , 该式变为

$$X(z) = \sum_{m=-n_2}^{\infty} x[-m]z^m; \text{ 再将变量 } m \text{ 变为 } n, \text{ 有 } X(z) = \sum_{n=-n_2}^{\infty} x[-n]z^n. \text{ 由式(7.2-5), 若满足}$$

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x[-n]z^n|} < 1, \text{ 即}$$

$$|z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x[-n]|}} = R_- \quad (7.2-7)$$

时, 该级数收敛。可见, 左边序列的收敛域是  $z$  平面上以原点为圆心、以  $R_-$  为半径的圆的内部。如果  $n_2 > 0$ , 则收敛域不包括  $z = 0$  (原点), 即  $0 < |z| < R_-$ 。如果  $n_2 \leq 0$ , 则收敛域包括  $z = 0$ , 即  $|z| < R_-$ 。

### 4. 双边序列 (two-sided sequence)

双边序列  $x[n], -\infty < n < +\infty$  的  $z$  变换可写为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} x[n]z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

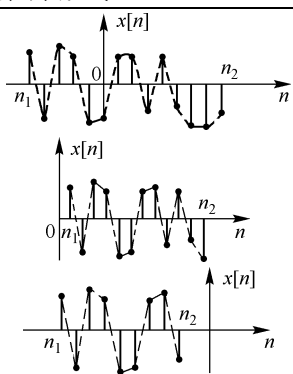
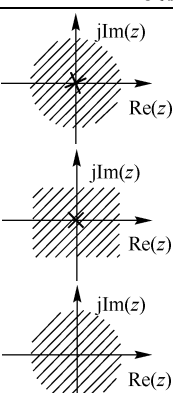
显然, 可以把它看成是左边序列与右边序列  $z$  变换的叠加。上式右边第一个级数是左边序列的  $z$  变换, 其收敛域为  $|z| < R_-$ ; 第二个级数是右边序列的  $z$  变换, 其收敛域为  $|z| > R_+$ ; 因而双边序列的收敛域是左边序列与右边序列两个收敛域的交叠部分。如果  $R_- > R_+$ , 则双边序列  $x[n]$  的  $z$  变换  $X(z)$  的收敛域为

$$R_+ < |z| < R_- \quad (7.2-8)$$

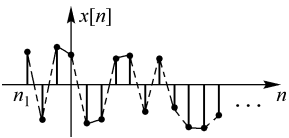
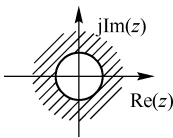
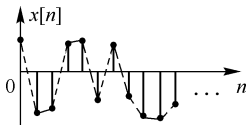
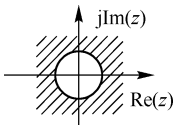
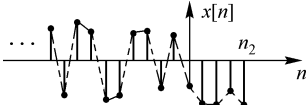
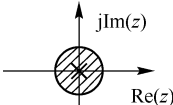
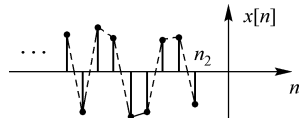
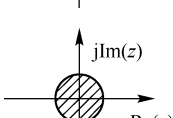
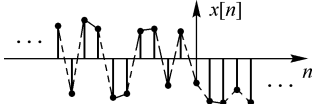
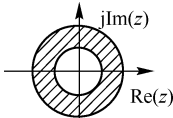
即双边序列的收敛域是  $z$  平面上的一个环形区域。如果  $R_- \leq R_+$ , 即两个收敛域不交叠, 因而双边序列  $X(z)$  的收敛域不存在, 也即序列  $x[n]$  的双边  $z$  变换不存在。

上面讨论了各种序列的双边  $z$  变换的收敛域, 显然, 收敛域取决于序列的形式。为便于对比, 我们把上述几类序列的双边  $z$  变换的收敛域列于表 7.2-1。

表 7.2-1 序列的形式与双边  $z$  变换收敛域的关系

| 序列形式                                                                                            |                                                                                     | $z$ 变换收敛域                                                                           |                                                           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| 有限长序列<br>① $n_1 < 0$<br>$n_2 > 0$<br>② $n_1 \geq 0$<br>$n_2 > 0$<br>③ $n_1 < 0$<br>$n_2 \leq 0$ |  |  | $0 <  z  < \infty$<br><br>$ z  > 0$<br><br>$ z  < \infty$ |

(续表)

| 序列形式                                                                                |                                                                                   | $z$ 变换收敛域                                                                         |                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| 右边序列<br>① $n_1 < 0$<br>$n_2 = \infty$<br>② $n_1 \geq 0$<br>$n_2 = \infty$<br>(因果序列) |  |  | $R_+ <  z  < \infty$ |
|                                                                                     |  |  | $ z  > R_+$          |
| 左边序列<br>① $n_1 = -\infty$<br>$n_2 > 0$<br>② $n_1 = -\infty$<br>$n_2 \leq 0$         |  |  | $0 <  z  < R_-$      |
|                                                                                     |  |  | $ z  < R_-$          |
| 双边序列<br>$n_1 = -\infty$<br>$n_2 = \infty$                                           |  |  | $R_+ <  z  < R_-$    |

应当指出, 任何序列与带有收敛域的  $z$  变换形成一一映射, 而任何序列的单边  $z$  变换的收敛域和因果序列的收敛域相同, 都为  $|z| > R_+$ 。

**例 7.2-2** 求双边指数序列  $x[n] = a^n u[n] - b^n u[-n-1]$  的  $z$  变换, 并确定它的收敛域 (其中:  $a > 0, b > 0, b > a$ )。

**解:** 这是一个双边序列, 令  $x_1[n] = a^n u[n]$ ,  $x_2[n] = -b^n u[-n-1]$ , 这样  $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$ , 由上例结果可以直接得到  $x_1[n]$  与  $x_2[n]$  的  $z$  变换, 即

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] z^{-n} = \frac{z}{z-a} \quad |z| > a$$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] z^{-n} = \frac{z}{z-b} \quad |z| < b$$

这样, 根据  $z$  变换的线性性质 (见 7.4 节),  $x[n]$  的  $z$  变换  $X(z)$  就是  $X_1(z)$  与  $X_2(z)$  之和, 其收敛域为两者收敛域的重叠部分。因为本题中  $b > a$ , 所以, 其收敛域为  $a < |z| < b$ , 于是有

$$\begin{aligned}
 X(z) &= X_1(z) + X_2(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-b} \\
 &= \frac{2z \left( z - \frac{a+b}{2} \right)}{(z-a)(z-b)} \quad a < |z| < b
 \end{aligned}$$

显然, 该序列的双边  $z$  变换的零点位于  $z = 0$  和  $z = (a+b)/2$ , 极点位于  $z = a$  与  $z = b$ , 收敛域为  $a < |z| < b$ , 如图 7.2-1 所示 (注意  $z$  平面坐标轴的表示方法)。

从本例看出, 由于  $X(z)$  在收敛域内是解析的, 因此收敛域内不包含任何极点, 一般来说收敛域是以极点为边界的。当有多个极点时, 右边序列的收敛域从  $X(z)$  最外面的那个极点向外延伸至  $z \rightarrow \infty$  (可能包含  $\infty$ ); 而左边序列的收敛域从  $X(z)$  最里边的那个非零极点向内延伸至  $z = 0$  (可能包含  $z = 0$ )。

另外, 在本例中, 如果  $b < a$ , 则  $X_1(z)$  与  $X_2(z)$  的收敛域没有重叠区域, 因而序列  $x[n]$  的双边  $z$  变换将不存在。

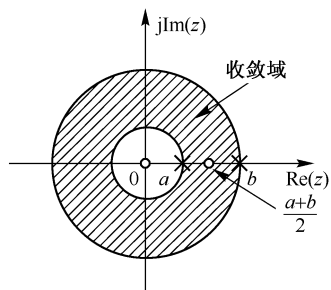


图 7.2-1 双边指数序列的  $z$  变换的零极点与收敛域

### 7.2.3 常用因果序列的 $z$ 变换

#### 1. 单位样值信号 $\delta[n]$

$$\mathcal{Z}[\delta[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = 1 \quad (7.2-9)$$

可见, 与连续系统中的冲激函数  $\delta(t)$  的拉氏变换类似, 单位样值信号  $\delta[n]$  的  $z$  变换等于 1, 收敛域为整个  $z$  平面。

#### 2. 单位阶跃序列 $u[n]$

$$\mathcal{Z}[u[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

若  $|z| > 1$ , 此级数收敛, 且等于  $\frac{1}{1-z^{-1}}$ , 所以

$$\mathcal{Z}[u[n]] = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1 \quad (7.2-10)$$

可见, 单位阶跃序列  $u[n]$  的  $z$  变换的收敛域为  $z$  平面上以原点为圆心的单位圆的外部, 如图 7.2-2 所示。

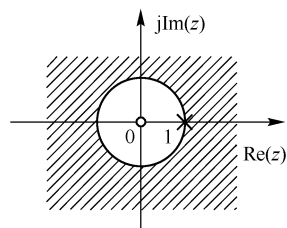


图 7.2-2  $u[n]$  的  $z$  变换的零极点与收敛域

#### 3. 斜变序列 $nu[n]$

$$\mathcal{Z}[nu[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nu[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n}$$

上式的级数并不是几何级数, 不能利用几何级数的求和公式直接求出结果。但可以采用下面的方法间接地求出它的  $z$  变换。

由式(7.2-10)可知,  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ , 收敛域为  $|z| > 1$ , 式中两边分别对  $z^{-1}$  求导, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(z^{-1})^{n-1} = \frac{1}{(1-z^{-1})^2}, \text{ 两边各乘以 } z^{-1}, \text{ 便得到斜变序列的 } z \text{ 变换为}$$

$$\mathcal{Z}[nu[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} nz^{-n} = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2} \quad (7.2-11)$$

同样，若上式两边再对  $z^{-1}$  求导，还可得到

$$\mathcal{Z}[n^2u[n]] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}, \quad \mathcal{Z}[n^3u[n]] = \frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}, \quad \dots \quad (7.2-12)$$

#### 4. 单边指数序列 $a^n u[n]$

单边指数序列  $a^n u[n]$  的  $z$  变换在例 7.2-1 中已经求过，它等于

$$\mathcal{Z}[a^n u[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a| \quad (7.2-13)$$

同样，若式(7.2-13)两边对  $z^{-1}$  求导，可以推导出

$$\mathcal{Z}[na^n u[n]] = \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2} \quad (7.2-14)$$

$$\mathcal{Z}[n^2 a^n u[n]] = \frac{az(z+a)}{(z-a)^3} \quad (7.2-15)$$

#### 5. 单边正弦序列 $\sin \omega_0 n \cdot u[n]$ 和单边余弦序列 $\cos \omega_0 n \cdot u[n]$

在单边指数序列  $a^n u[n]$  的  $z$  变换，即式(7.2-13)中，令  $a = e^{j\omega_0}$ ，则得复指数序列  $e^{j\omega_0 n} u[n]$  的  $z$  变换为

$$\mathcal{Z}[e^{j\omega_0 n} u[n]] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} \quad (7.2-16)$$

其收敛域为  $|z| > |e^{j\omega_0}| = 1$ ，即单位圆外的区域。

同样，在式(7.2-13)中，令  $a = e^{-j\omega_0}$ ，可得

$$\mathcal{Z}[e^{-j\omega_0 n} u[n]] = \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \quad |z| > 1$$

将上式和式(7.2-16)相加，得到

$$\mathcal{Z}[e^{j\omega_0 n} u[n]] + \mathcal{Z}[e^{-j\omega_0 n} u[n]] = \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}}$$

由  $z$  变换的定义知道，两序列之和的  $z$  变换等于各序列的  $z$  变换之和。再根据欧拉公式，从上式可以直接得到余弦序列的  $z$  变换为

$$\mathcal{Z}[\cos \omega_0 n \cdot u[n]] = \frac{1}{2} \left( \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} + \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) = \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad (7.2-17)$$

同理可得正弦序列的  $z$  变换为

$$\mathcal{Z}[\sin \omega_0 n \cdot u[n]] = \frac{1}{2j} \left( \frac{z}{z - e^{j\omega_0}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega_0}} \right) = \frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1} \quad (7.2-18)$$

以上两式的收敛域都是  $|z| > 1$ 。



根据上述方法, 在式(7.2-13)中, 令  $a = \beta e^{j\omega_0}$ , 则有  $\mathcal{Z}[\beta^n e^{j\omega_0 n} u[n]] = \frac{z}{z - \beta e^{j\omega_0}}$ , 收敛域为  $|z| > |\beta|$ 。同样,  $\mathcal{Z}[\beta^n e^{-j\omega_0 n} u[n]] = \frac{z}{z - \beta e^{-j\omega_0}}$ , 收敛域为  $|z| > |\beta|$ 。借助欧拉公式, 由这两式可以得到

$$\mathcal{Z}[\beta^n \cos \omega_0 n \cdot u[n]] = \frac{z(z - \beta \cos \omega_0)}{z^2 - 2z\beta \cos \omega_0 + \beta^2} \quad |z| > |\beta| \quad (7.2-19)$$

$$\mathcal{Z}[\beta^n \sin \omega_0 n \cdot u[n]] = \frac{z\beta \sin \omega_0}{z^2 - 2z\beta \cos \omega_0 + \beta^2} \quad |z| > |\beta| \quad (7.2-20)$$

式(7.2-19)和式(7.2-20)分别是单边指数衰减 ( $\beta < 1$ ) 或增长 ( $\beta > 1$ ) 的余弦和正弦序列的  $z$  变换。

表 7.2-2 中列出了一些常用因果序列的单边  $z$  变换。

表 7.2-2 常用序列的单边  $z$  变换

| 序号 | 序列 $x[n]$ ( $n \geq 0$ )             | $z$ 变换 $X(z)$                                                              | 收敛域             |
|----|--------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| 1  | $\delta[n]$                          | 1                                                                          | $ z  \geq 0$    |
| 2  | $u[n]$                               | $\frac{z}{z-1}$                                                            | $ z  > 1$       |
| 3  | $a^n u[n]$                           | $\frac{z}{z-a}$                                                            | $ z  >  a $     |
| 4  | $a^{n-1} u[n-1]$                     | $\frac{1}{z-a}$                                                            | $ z  >  a $     |
| 5  | $nu[n]$                              | $\frac{z}{(z-1)^2}$                                                        | $ z  > 1$       |
| 6  | $n^2 u[n]$                           | $\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$                                                   | $ z  > 1$       |
| 7  | $na^n u[n]$                          | $\frac{az}{(z-a)^2}$                                                       | $ z  >  a $     |
| 8  | $na^{n-1} u[n]$                      | $\frac{z}{(z-a)^2}$                                                        | $ z  >  a $     |
| 9  | $\cos \omega_0 n \cdot u[n]$         | $\frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$                  | $ z  > 1$       |
| 10 | $\sin \omega_0 n \cdot u[n]$         | $\frac{z \sin \omega_0}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$                       | $ z  > 1$       |
| 11 | $\beta^n \cos \omega_0 n \cdot u[n]$ | $\frac{z(z - \beta \cos \omega_0)}{z^2 - 2z\beta \cos \omega_0 + \beta^2}$ | $ z  >  \beta $ |
| 12 | $\beta^n \sin \omega_0 n \cdot u[n]$ | $\frac{z\beta \sin \omega_0}{z^2 - 2z\beta \cos \omega_0 + \beta^2}$       | $ z  >  \beta $ |

### 7.2.4 s 平面到 z 平面的映射

我们再来看采样信号的拉氏变换。假设连续信号  $x(t)$  经理想采样后, 其采样信号  $x_s(t)$  的表达式为

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

若考虑信号  $x(t)$  为因果信号，则上式可表示为

$$x_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

式中， $T$  为采样间隔。对此式两边取单边拉氏变换，得到

$$X_s(s) = \int_0^{\infty} x_s(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \right] e^{-st} dt$$

交换上式中的积分与求和次序，并利用冲激函数的取样特性，可得

$$X_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \left[ \int_0^{\infty} \delta(t-nT)e^{-st} dt \right] = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-snT} \quad (7.2-21)$$

引入一个新的复变量  $z$ ，使

$$z = e^{sT} \quad (7.2-22)$$

或

$$s = \frac{1}{T} \ln z \quad (7.2-23)$$

则式(7.2-21)变为复变量  $z$  的函数式  $X(z)$ ，即

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n} \quad (7.2-24a)$$

记  $x[n] = x(nT)$ ，则式(7.2-24a)变为

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (7.2-24b)$$

比较式(7.2-24b)和式(7.2-1)，可以看出式(7.2-24b)就是离散信号  $x[n]$  的单边  $z$  变换表达式。上面的推导说明，序列的  $z$  变换可以看成是连续信号的拉氏变换按某种映射关系所得的映射函数。下面我们就研究  $z$  变换的复变量  $z$  与拉普拉斯变换的复变量  $s$  之间的映射关系。

在式(7.2-22)或式(7.2-23)中，将  $s$  表示成直角坐标形式  $s = \sigma + j\Omega$ ，而将  $z$  表示为极坐标形式  $z = re^{j\omega}$ ，将它们代入式(7.2-22)中，有  $re^{j\omega} = z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\Omega)T} = e^{\sigma T} \cdot e^{j\Omega T}$ ，于是，得到

$$r = e^{\sigma T} \quad (7.2-25)$$

$$\omega = \Omega T \quad (7.2-26)$$

式(7.2-25)和式(7.2-26)表明  $s$  平面和  $z$  平面之间具有如下映射关系：

(1)  $s$  平面上的原点  $s = 0$  ( $\sigma = 0, \Omega = 0$ ) 映射到  $z$  平面上为  $z = 1$  ( $r = 1, \omega = 0$ ) 的点。

(2)  $s$  平面上的虚轴 ( $\sigma = 0, s = j\Omega$ ) 映射到  $z$  平面上为以原点为圆心、1 为半径的圆（简称单位圆）； $s$  平面上的左半平面 ( $\sigma < 0$ ) 映射为  $z$  平面上单位圆的内部 ( $|z| = r < 1$ )，而右半平面 ( $\sigma > 0$ ) 映射为单位圆的外部 ( $|z| = r > 1$ )。

(3)  $s$  平面的实轴 ( $\Omega = 0, s = \sigma$ ) 映射为  $z$  平面的正实轴 ( $\omega = 0$ )， $s$  平面上平行于实轴的直线 ( $\Omega$  为常数，如  $\Omega = \Omega_1$ ) 映射为  $z$  平面上的始于原点的辐射线（如  $\omega_1 = \Omega_1 T$ ）， $s$  平面上通过  $j m \pi / T$  ( $m = \pm 1, \pm 3, \dots$ ) 而平行于实轴的直线映射为  $z$  平面的负实轴  $\omega = m \pi$  ( $m = \pm 1, \pm 3, \dots$ )。

$s$  平面与  $z$  平面的映射关系如表 7.2-3 所示。

表 7.2-3  $s$  平面与  $z$  平面的映射关系

| $s$ 平面 ( $s = \sigma + j\Omega$ )                            |  | $z$ 平面 ( $z = re^{j\omega}$ ) |                                                         |
|--------------------------------------------------------------|--|-------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 虚轴<br>( $\sigma = 0, s = j\Omega$ )                          |  |                               | 单位圆<br>( $r = 1, \omega$ 任意)                            |
| 左半平面<br>( $\sigma < 0$ )                                     |  |                               | 单位圆内<br>( $r < 1, \omega$ 任意)                           |
| 右半平面<br>( $\sigma > 0$ )                                     |  |                               | 单位圆外<br>( $r > 1, \omega$ 任意)                           |
| 平行于虚轴的直线<br>( $\sigma = \text{常数}$ )                         |  |                               | 圆<br>( $\sigma > 0, r > 1$ )<br>( $\sigma < 0, r < 1$ ) |
| 实轴<br>( $\Omega = 0, s = \sigma$ )                           |  |                               | 正实轴<br>( $\omega = 0, r$ 任意)                            |
| 平行于实轴的直线<br>( $\Omega = \text{常数}$ )                         |  |                               | 始于原点的辐射线<br>( $\omega = \text{常数}, r$ 任意)               |
| 通过 $\pm \frac{m\pi}{T}$ 平行于实轴的直线<br>( $m = 1, 3, 5, \dots$ ) |  |                               | 负实轴<br>( $\omega = \pi, r$ 任意)                          |

从式(7.2-25)和式(7.2-26)看出,  $s$  平面与  $z$  平面的映射关系不是单值的, 在  $s$  平面上沿虚轴移动的点映射在  $z$  平面上沿单位圆周期性旋转: 当  $\Omega$  由  $-\pi/T$  增长到  $\pi/T$  时,  $z$  平面上辐角  $\omega$  由  $-\pi$  增长到  $\pi$ 。也就是说, 在  $s$  平面上  $\Omega$  每平移  $2\pi/T$ , 相应于  $z$  平面上  $\omega$  变化  $2\pi$  (沿单位圆转一圈)。

## 7.3 $z$ 逆变换

若已知序列  $x[n]$  的  $z$  变换为  $X(z) = \mathcal{Z}[x[n]]$ , 则  $X(z)$  的逆变换 (Inverse  $z$  transform) 记为  $x[n] = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$ , 并可由下式的围线积分给出

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (7.3-1)$$

$C$  是包围  $X(z)z^{n-1}$  所有极点的逆时针闭合积分路线, 通常选择  $z$  平面收敛域内以原点为中心的圆, 如图 7.3-1 所示。

下面从  $z$  变换定义式推导出逆变换式(7.3-1)。将序列  $x[n]$  的  $z$  变换定义式(7.2-2)两边各乘以  $z^{m-1}$ , 然后沿围线  $C$  积分, 可得

$$\oint_C X(z) z^{m-1} dz = \oint_C \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \right] z^{m-1} dz$$

交换积分与求和次序, 得到

$$\oint_C X(z) z^{m-1} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \oint_C z^{m-n-1} dz \quad (7.3-2)$$

根据复变函数理论中的柯西定理, 有

$$\oint_C z^{m-1} dz = \begin{cases} 2\pi j & m=0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

这样, 式(7.3-2)中等号右边的围线积分只有当  $n=m$  时才为  $2\pi j$ , 而对其余的  $n$  均为零。故等号右边只剩下  $2\pi j x[m]$ , 于是式(7.3-2)变为

$$\oint_C X(z) z^{m-1} dz = 2\pi j x[m]$$

即

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

从而式(7.3-1)得证。由于上述推导过程中, 并未规定  $m$  和  $n$  的正负, 因此上式对正与负的  $n$  值都是适用的。

求  $z$  逆变换的方法通常有三种: 围线积分法 (contour integral method) (也称为留数法)、幂级数展开法 (power series expansion) (也称为长除法), 以及仿照拉氏逆变换的部分分式展开法 (partial fraction expansion), 分别介绍如下。

### 7.3.1 部分分式展开法

实际上, 序列的  $z$  变换通常是  $z$  的有理函数, 一般可以表示成有理分式, 如式 (7.3-3) 所示

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \quad (7.3-3)$$

类似于拉氏变换中的部分分式展开法, 可以先将  $X(z)$  展开成一些简单而常见的部分分式之和, 然后分别求出各部分分式的逆变换, 再把各逆变换相加, 即可得到  $x[n]$ 。 $z$  变换最基本的形式是  $z/(z-z_m)$ 。因而在进行  $z$  变换的部分分式展开时, 通常先将  $X(z)/z$  展开, 然后每个分式乘以  $z$ , 这样对于一阶极点,  $X(z)$  便可展开成  $z/(z-z_m)$  的形式。将  $X(z)/z$  进行部分分式展开的方法和拉氏逆变换中将  $F(s)$  展开成部分分式的方法相同, 这里不再赘述。下面举例说明。

**例 7.3-1** 求函数  $X(z) = \frac{0.3}{z^2 - 0.8z + 0.15}$  ( $|z| > 0.5$ ) 的逆变换  $x[n]$ 。

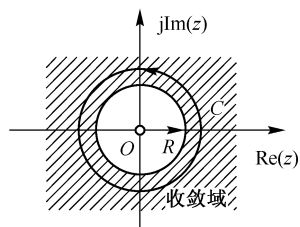


图 7.3-1 逆  $z$  变换积分围线的选择

解：将  $X(z)/z$  展开成部分分式为

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{0.3}{z(z^2 - 0.8z + 0.15)} = \frac{0.3}{z(z-0.3)(z-0.5)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-0.5} + \frac{C}{z-0.3}$$

其中

$$A = \frac{X(z)}{z} \cdot z \Big|_{z=0} = \frac{0.3}{0.15} = 2 \quad B = \frac{X(z)}{z} \cdot (z-0.5) \Big|_{z=0.5} = 3$$

$$C = \frac{X(z)}{z} \cdot (z-0.3) \Big|_{z=0.3} = -\frac{0.3}{0.06} = -5$$

所以

$$X(z) = 2 + \frac{3z}{z-0.5} + \frac{-5z}{z-0.3}$$

因为收敛域为  $|z| > 0.5$ ，因此  $x[n]$  为因果序列，得到

$$x[n] = 2\delta[n] + [3(0.5)^n - 5(0.3)^n]u[n] = [3(0.5)^n - 5(0.3)^n]u[n-1]$$

在部分分式展开式中，其基本形式除了 1 和  $\frac{z}{z-a}$  形式外，还具有  $\frac{z}{(z-a)^2}, \dots, \frac{z}{(z-a)^m}$  或  $\frac{z^m}{(z-a)^m}$  等形式，表 7.3-1 列出了这些形式的相应的逆变换。

表 7.3-2 列出了左边序列的这些形式的相应的逆  $z$  变换。但要注意的是，如果是非因果序列，展开后每一项分式所对应的序列是右边序列还是左边序列，要根据给定的收敛域进行判断（详见例 7.3-2）。

表 7.3-1 常用的逆  $z$  变换对（因果序列）

| $z$ 变换 $X(z)$<br>( $ z  > R$ ) | 序列 $x[n]$                                     |
|--------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1                              | $\delta[n]$                                   |
| $\frac{z}{z-1}$                | $u[n]$                                        |
| $\frac{z}{z-a}$                | $a^n u[n]$                                    |
| $\frac{z}{(z-1)^2}$            | $n u[n]$                                      |
| $\frac{z}{(z-a)^2}$            | $na^{n-1} u[n]$                               |
| $\frac{z^2}{(z-a)^2}$          | $(n+1)a^n u[n]$                               |
| $\frac{z}{(z-a)^3}$            | $\frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} u[n]$              |
| $\frac{z^3}{(z-a)^3}$          | $\frac{(n+1)(n+2)}{2!} a^n u[n]$              |
| $\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$        | $\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} a^{n-m} u[n]$ |
| $\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$  | $\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!} a^n u[n]$   |

表 7.3-2 常用的逆  $z$  变换对（左边序列）

| $z$ 变换 $X(z)$<br>( $ z  < R$ ) | 序列 $x[n]$                                              |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------|
| $\frac{z}{z-1}$                | $-u[-n-1]$                                             |
| $\frac{z}{z-a}$                | $-a^n u[-n-1]$                                         |
| $\frac{z}{(z-a)^2}$            | $-na^{n-1} u[-n-1]$                                    |
| $\frac{z^2}{(z-a)^2}$          | $-(n+1)a^n u[-n-1]$                                    |
| $\frac{z}{(z-a)^3}$            | $-\frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} u[-n-1]$                   |
| $\frac{z^3}{(z-a)^3}$          | $-\frac{(n+1)(n+2)}{2!} a^n u[-n-1]$                   |
| $\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$        | $-\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} a^{n-m} u[-n-1]$ |
| $\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$  | $-\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!} a^n u[-n-1]$        |

例 7.3-2 求函数  $X(z) = \frac{12}{(z+1)(z-2)(z-3)}$  ( $1 < |z| < 2$ ) 的逆变换  $x[n]$ 。

解：将  $X(z)/z$  展开成部分分式为

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{12}{z(z+1)(z-2)(z-3)} = \frac{2}{z} + \frac{-1}{z+1} + \frac{-2}{z-2} + \frac{1}{z-3}$$

所以

$$X(z) = 2 + \frac{-z}{z+1} + \frac{-2z}{z-2} + \frac{z}{z-3} \quad 1 < |z| < 2$$

根据给定的收敛域  $1 < |z| < 2$  可以判断出，上式第一项是常数，其逆变换是  $\delta[n]$ ，第二项的收敛域满足  $|z| > 1$ ，因而对应的逆变换应是右边序列；而后两项的收敛域都满足  $|z| < 2$ ，故它们对应的逆变换应是左边序列。由表 7.3-1 和表 7.3-2 得到

$$\begin{aligned} x[n] &= 2\delta[n] - (-1)^n u[n] + 2 \times 2^n u[-n-1] - 3^n u[-n-1] \\ &= 2\delta[n] - (-1)^n u[n] + (2^{n+1} - 3^n) u[-n-1] \end{aligned}$$

**例 7.3-3** 利用部分分式展开法求  $X(z) = \frac{2z^3 - 40z}{(z-2)^3(z-4)}$  ( $|z| > 4$ ) 的逆变换  $x[n]$ 。

解：本题中  $X(z)$  包含一阶极点  $z=4$  和三阶极点  $z=2$ ，可将  $X(z)/z$  展开成如下部分分式

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2z^2 - 40}{(z-2)^3(z-4)} = \frac{A_0}{z-4} + \frac{B_1}{(z-2)^3} + \frac{B_2}{(z-2)^2} + \frac{B_3}{z-2}$$

其中

$$A_0 = \frac{X(z)}{z} \cdot (z-4) \Big|_{z=4} = \frac{2z^2 - 40}{(z-2)^3} \Big|_{z=4} = -1$$

$$B_1 = \frac{X(z)}{z} \cdot (z-2)^3 \Big|_{z=2} = \frac{2z^2 - 40}{z-4} \Big|_{z=2} = 16$$

$$B_2 = \frac{d}{dz} \left[ \frac{X(z)}{z} \cdot (z-2)^3 \right] \Big|_{z=2} = \frac{2z^2 - 16z + 40}{(z-4)^2} \Big|_{z=2} = 4$$

$$B_3 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} \left[ \frac{X(z)}{z} \cdot (z-2)^3 \right] \Big|_{z=2} = \frac{1}{2} \frac{-16}{(z-4)^3} \Big|_{z=2} = 1$$

所以

$$X(z) = \frac{-z}{z-4} + \frac{16z}{(z-2)^3} + \frac{4z}{(z-2)^2} + \frac{z}{z-2} \quad |z| > 4$$

由收敛域  $|z| > 4$  可知， $X(z)$  对应的逆变换  $x[n]$  是因果序列。由表 7.3-1 可求出对应的逆变换为

$$\begin{aligned} x[n] &= \left[ -4^n + 2^n + 4n \cdot 2^{n-1} + 16 \times \frac{n(n-1)}{2} 2^{n-2} \right] u[n] \\ &= [(2n^2 + 1)2^n - 4^n] u[n] = (2n^2 + 1 - 2^n) 2^n u[n] \end{aligned}$$

### 7.3.2 围线积分法（留数法）

借助于复变函数中的留数定理，可以把式(7.3-1)的积分表示为围线  $C$  内所包含的  $X(z)z^{n-1}$  的各极点留数之和，即

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)z^{n-1} dz = \sum_m [X(z)z^{n-1} \text{ 在 } C \text{ 内极点的留数}]$$

或简写为

$$x[n] = \sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}] \Big|_{z=z_m} \quad (7.3-4)$$

式中, Res 表示极点的留数值,  $z = z_m$  为  $X(z)z^{n-1}$  的极点。

如果  $X(z)z^{n-1}$  在  $z = z_m$  处有  $s$  阶极点, 此时它的留数由式 (7.3-5) 确定

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} = \frac{1}{(s-1)!} \left\{ \frac{d^{s-1}}{dz^{s-1}} [(z-z_m)^s X(z)z^{n-1}] \right\} \bigg|_{z=z_m} \quad (7.3-5)$$

若只含一阶极点 (即  $s=1$ ), 则式 (7.3-5) 可简化为

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} = [(z-z_m)X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} \quad (7.3-6)$$

在利用式(7.3-4)~式(7.3-6)时, 应注意围线内所包围的极点情况, 特别是对于不同的  $n$  值, 在  $z=0$  处的极点可能具有不同的阶次。

**例 7.3-4** 求  $X(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z(z-1)(z-0.5)}$  ( $|z| > 1$ ) 的逆变换。

**解:** 由式(7.3-4)知  $X(z)$  的逆变换为

$$x[n] = \sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m} = \sum_m \text{Res} \left[ \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{(z-1)(z-0.5)} z^{n-2} \right] \bigg|_{z=z_m}$$

因为  $X(z)$  的收敛域为  $|z| > 1$ , 所以  $x[n]$  必然是因果序列。

当  $n \geq 2$  时, 在围线  $C$  内  $X(z)z^{n-1}$  只含有两个一阶极点:  $z_1 = 1, z_2 = 0.5$ , 这样由式(7.3-6)可得

$$x[n] = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z - 0.5} z^{n-2} \bigg|_{z=1} + \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z - 1} z^{n-2} \bigg|_{z=0.5} = 8 - 13(0.5)^n$$

当  $n=1$  时,  $X(z)z^{n-1}$  有三个一阶极点, 分别位于  $z_1 = 1, z_2 = 0.5$  和  $z_3 = 0$ , 按同样的方法可以求出它们的留数分别为 8, -6.5 和 2, 这样  $x[1] = 8 - 6.5 + 2 = 3.5$ 。

当  $n=0$  时, 在围线  $C$  内  $X(z)z^{n-1}$  除了含有  $z_1 = 1, z_2 = 0.5$  这两个一阶极点外, 还含有一个二阶极点  $z_3 = 0$ 。由式(7.3-5)和式(7.3-6)可求出它们的留数

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=1} = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z(z-1)(z-0.5)} (z-1)z^{-1} \bigg|_{z=1} = 8$$

$$\text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=0.5} = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z(z-1)(z-0.5)} (z-0.5)z^{-1} \bigg|_{z=0.5} = -13$$

$$\text{二阶极点} \quad \text{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=0} = \frac{1}{(2-1)!} \left\{ \frac{d}{dz} \left[ z^2 \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z(z-1)(z-0.5)} z^{-1} \right] \right\} \bigg|_{z=0} = 6$$

这样, 当  $n=0$  时,  $x[n] = 8 - 13 + 6 = 1$ , 即  $x[0] = 1$ 。

综合上述结果, 可以得到  $X(z)$  的逆变换为

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 3.5 & n=1 \\ 8 - 13(0.5)^n & n \geq 2 \end{cases}$$

$$= \delta[n] + 3.5\delta[n-1] + [8 - 13(0.5)^n]u[n-2]$$

例 7.3-5 求  $X(z) = \frac{-15z}{3z^2 - 7z + 2}$  在下列两种收敛域情况下的逆变换  $x[n]$ 。

- (1)  $|z| > 2$               (2)  $|z| < 1/3$

解:  $X(z) = \frac{-5z}{(z-1/3)(z-2)}$

(1) 若收敛域为  $|z| > 2$ , 则  $x[n]$  为因果序列

$$x[n] = \sum_m \text{Res}[X(z)z^{n-1}] \Big|_{z=z_m} = \sum_m \text{Res} \left[ \frac{-5z^n}{(z-1/3)(z-2)} \right] \Big|_{z=z_m}$$

由于  $x[n]$  为因果序列, 因此只要求  $n \geq 0$  情况下的留数就可以了。此时围线  $C$  内只包含两个一阶极点  $z=1/3$ ,  $z=2$ , 故

$$x[n] = \frac{-5z^n}{z-2} \Big|_{z=1/3} + \frac{-5z^n}{z-1/3} \Big|_{z=2} = 3[(1/3)^n - 2^n] \quad n \geq 0$$

(2) 若收敛域为  $|z| < 1/3$ ,  $x[n]$  必定为左边序列。只需求  $n < 0$  的情况, 此时, 选择顺时针的积分围线  $C'$  (原围线  $C$  的反方向), 则围线  $C'$  内 (围线  $C$  外) 只有两个一阶极点:  $z_1 = 1/3$  和  $z_2 = 2$ , 如图 7.3-2 所示。这样

$$\begin{aligned} x[n] &= -\text{Res} \left[ \frac{-5z^n}{(z-1/3)(z-2)} \right] \Big|_{z=1/3} - \text{Res} \left[ \frac{-5z^n}{(z-1/3)(z-2)} \right] \Big|_{z=2} \\ &= -\frac{-5z^n}{(z-1/3)(z-2)} (z-1/3) \Big|_{z=1/3} - \frac{-5z^n}{(z-1/3)(z-2)} (z-2) \Big|_{z=2} \\ &= 3(-3^{-n} + 2^n) \quad n < 0 \\ &= 3(2^n - 3^{-n})u[-n-1] \end{aligned}$$

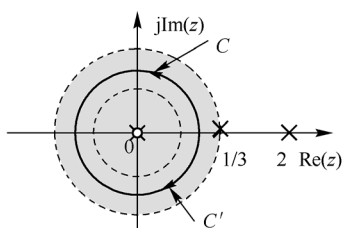


图 7.3-2 圆内收敛域的围线选取

### 7.3.3 幂级数展开法 (长除法)

因为  $x[n]$  的  $z$  变换定义为  $z^{-1}$  的幂级数  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ , 所以, 只要在给定的收敛域内将  $X(z)$  展开成幂级数, 则级数的系数就是序列  $x[n]$ 。

考虑  $X(z)$  是有理函数, 令其分子多项式和分母多项式分别为  $B(z)$  和  $A(z)$ , 即  $X(z) = B(z)/A(z)$ 。如果  $X(z)$  的收敛域是  $|z| > R_+$ , 即  $x[n]$  是因果序列, 可将  $B(z)$  和  $A(z)$  按  $z$  的降幂 (或  $z^{-1}$  的升幂) 次序进行排列。如果收敛域是  $|z| < R_-$ , 即  $x[n]$  是左边序列, 则可将  $B(z)$  和  $A(z)$  按  $z$  的升幂 (或



$z^{-1}$  的降幂) 次序进行排列。然后利用长除法, 便可将  $X(z)$  展开成幂级数, 从而得到  $x[n]$ 。

**例 7.3-6** 求  $X(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$  分别在收敛域为  $|z|>1$  和  $|z|<1$  两种情况下的逆变换  $x[n]$ 。

**解:** (1) 对于收敛域  $|z|>1$ ,  $x[n]$  是因果序列, 这时  $X(z)$  按  $z^{-1}$  的升幂次序进行排列, 并可列写如图 7.3-3 形式的长除式, 所以

$$X(z) = 1 + 4z^{-1} + 7z^{-2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (3n+1)z^{-n}$$

从而得到

$$x[n] = (3n+1)u[n]$$

(2) 若收敛域  $|z|<1$ , 则  $x[n]$  是左边序列, 这时  $X(z)$  按  $z^{-1}$  的降幂次序进行排列, 并可列写如图 7.3-4 形式的长除式, 所以

$$X(z) = 2z + 5z^2 + 8z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (3n-1)z^n = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (3n+1)z^{-n}$$

从而得到

$$x[n] = -(3n+1)u[-n-1]$$

$$\begin{array}{r} 1+4z^{-1}+7z^{-2}+\cdots \\ 1-2z^{-1}+z^{-2} \overline{) 1+2z^{-1}} \\ \underline{1-2z^{-1}+z^{-2}} \phantom{+\cdots} \\ 4z^{-1}-z^{-2} \\ \underline{4z^{-1}-8z^{-2}+4z^{-3}} \phantom{+\cdots} \\ 7z^{-2}-4z^{-3} \\ \underline{7z^{-2}-14z^{-3}+7z^{-4}} \phantom{+\cdots} \\ 10z^{-3}-7z^{-4} \\ \vdots \end{array}$$

图 7.3-3 例 7.3-6 (1) 的长除式

$$\begin{array}{r} 2z+5z^2+8z^3+\cdots \\ z^{-2}-2z^{-1}+1 \overline{) 2z^{-1}+1} \\ \underline{2z^{-1}-4+2z} \phantom{+\cdots} \\ 5-2z \\ \underline{5-10z+5z^2} \phantom{+\cdots} \\ 8z-5z^2 \\ \underline{8z-16z^2+8z^3} \phantom{+\cdots} \\ 11z^2-8z^3 \\ \vdots \end{array}$$

图 7.3-4 例 7.3-6 (2) 的长除式

## 7.4 $z$ 变换的基本性质

由  $z$  变换的定义可以推出许多性质, 其中一些性质与拉氏变换的性质相类似。这些性质表示离散序列在时域和  $z$  域间的关系, 极大的方便了  $z$  变换或逆  $z$  变换的求解。

### 1. 线性 (linearity) 性质

$z$  变换的线性性质表现在它的叠加性与均匀性。若

$$\mathcal{Z}[x_1[n]] = X_1(z) \quad (R_{1+} < |z| < R_{1-})$$

$$\mathcal{Z}[x_2[n]] = X_2(z) \quad (R_{2+} < |z| < R_{2-})$$

$$\text{则} \quad \mathcal{Z}[ax_1[n] + bx_2[n]] = aX_1(z) + bX_2(z) \quad (R_+ < |z| < R_-) \quad (7.4-1)$$

式中,  $a, b$  为任意常数。相加后序列  $z$  变换的收敛域一般为两个收敛域的重叠部分, 即  $R_+$  取  $R_{1+}$  和  $R_{2+}$  中的较大者, 而  $R_-$  取  $R_{1-}$  和  $R_{2-}$  中的较小者, 记为:  $\max(R_{1+}, R_{2+}) < |z| < \min(R_{1-}, R_{2-})$ 。

但是, 当这些线性组合中发生某些零点与极点相抵消的情况时, 收敛域可能扩大。

**例 7.4-1** 求序列  $x[n] = a^n u[n] - a^n u[n-1]$  的  $z$  变换  $X(z)$ 。

**解:** 假设  $x_1[n] = a^n u[n]$ ,  $x_2[n] = a^n u[n-1]$ , 则  $x[n] = x_1[n] - x_2[n]$ 。

由式(7.2-13)得  $X_1(z) = \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_2[n] z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{a}{z-a} \quad |z| > |a|$$

所以  $X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = X_1(z) - X_2(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{a}{z-a} = 1$

可见, 在该题中线性叠加后序列的  $z$  变换的收敛域由  $|z| > |a|$  扩展到整个  $z$  平面。

## 2. 时移 (time shifting) 性质

时移性质表示序列时移后的  $z$  变换与原序列  $z$  变换之间的关系。在实际中又有左移 (超前) 和右移 (延迟) 两种情况, 所取的变换又可能有单边与双边  $z$  变换, 下面针对这几种情况分别讨论。

### (1) 双边 $z$ 变换

若序列  $x[n]$  的双边  $z$  变换为  $\mathcal{Z}[x[n]] = X(z)$ , 则

$$\mathcal{Z}[x[n \pm m]] = z^{\pm m} X(z) \quad (7.4-2)$$

式中,  $m$  为任意整数。式(7.4-2)说明, 序列移位只会使  $z$  变换在  $z=0$  或  $z=\infty$  处的零极点情况发生变化。如果  $x[n]$  是双边序列,  $X(z)$  的收敛域为环形区域 (即  $R_+ < |z| < R_-$ ), 序列时移不会使  $z$  变换收敛域发生变化。

### (2) 单边 $z$ 变换

如果  $x[n]$  是双边序列, 其单边  $z$  变换记为  $\mathcal{Z}[x[n]u[n]] = X(z)$ , 则序列右移后, 它的单边  $z$  变换为

$$\mathcal{Z}[x[n-m]u[n]] = z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x[k]z^{-k} \right] \quad (7.4-3)$$

**证明:**  $\mathcal{Z}[x[n-m]u[n]] = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-m]z^{-n}$ , 令  $k = n-m$ , 则上式变为

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x[n-m]u[n]] &= z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} x[k]z^{-k} = z^{-m} \left\{ \sum_{k=-m}^{-1} x[k]z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k} \right\} \\ &= z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x[k]z^{-k} \right] \end{aligned}$$

同样, 可以得到左移序列的单边  $z$  变换为

$$\mathcal{Z}[x[n+m]u[n]] = z^m \left[ X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k} \right] \quad (7.4-4)$$

式(7.4-3)和式(7.4-4)中的  $m$  均为正整数。对  $m=1, 2$  的情况, 式(7.4-3)和式(7.4-4)可写成

$$\mathcal{Z}[x[n-1]u[n]] = z^{-1}X(z) + x[-1]$$

$$\mathcal{Z}[x[n-2]u[n]] = z^{-2}X(z) + z^{-1}x[-1] + x[-2]$$

$$\mathcal{Z}[x[n+1]u[n]] = zX(z) - zx[0]$$

$$\mathcal{Z}[x[n+2]u[n]] = z^2X(z) - z^2x[0] - zx[1]$$

如果  $x[n]$  是因果序列, 则式(7.4-3)右边的  $\sum_{k=-m}^{-1} x[k]z^{-k}$  项等于零。于是右移序列的单边  $z$  变换变为

$$\mathcal{Z}[x[n-m]u[n]] = z^{-m}X(z) \quad (7.4-5)$$

而因果序列左移后的单边  $z$  变换仍为式(7.4-4)。

**例 7.4-2** 用  $z$  变换方法求解差分方程  $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \frac{1}{3}u[n]$ , 已知  $y[-1] = 0$ 。

**解:** 对差分方程两边分别取单边  $z$  变换, 注意应用时移性质

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}y[-1] = \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-1}$$

所以 
$$Y(z) = \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{(z-1/2)(z-1)}$$

将上式展开成部分分式形式, 即 
$$Y(z) = \frac{-1/3z}{z-1/2} + \frac{2/3z}{z-1}$$

所以 
$$y[n] = \left[ -\frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{3} \right] u[n]$$

这里初步说明了应用  $z$  变换求解差分方程的方法, 主要是应用单边  $z$  变换的移位特性。有关用  $z$  变换求解差分方程的更详细的方法将在第 8 章中介绍。

**例 7.4-3** 求  $X(z) = \frac{1}{z-a}$  ( $|z| > a$ ) 的逆  $z$  变换  $x[n]$ 。

**解:**  $X(z)$  与表 7.3-1 中的基本形式不同, 但可改写为  $X(z) = \frac{z}{z-a} \cdot z^{-1}$ , 由于  $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-a}\right] = a^n u[n]$ , 从而根据时移性质, 很容易求得其逆变换为:  $x[n] = a^{n-1} u[n-1]$ 。

在 7.3 节介绍  $z$  逆变换的部分分式展开法时, 我们是将  $X(z)$  先除以  $z$ , 即将  $X(z)/z$  展开成部分分式, 然后每个分式乘以  $z$ , 若极点均为一阶极点, 则  $X(z)$  可展开成  $\sum_{i=1}^K \frac{A_i z}{z-z_i}$  的形式。

受到例 7.4-3 的启发, 对于收敛域  $|z| > R_+$  的  $z$  变换, 欲求其逆变换, 可直接将  $X(z)$  展开成部分分式  $\sum_{i=1}^K \frac{A_i}{z-z_i}$  的形式, 因为其中每一项  $\sum_{i=1}^K \frac{A_i}{z-z_i} = \sum_{i=1}^K \frac{A_i z}{z-z_i} \cdot z^{-1}$ , 再利用时移性质即可求出其逆变换为  $A_i z_i^{n-1} u[n-1]$ 。例如, 对于例 7.3-1, 也可按下述方法来求解。

$$X(z) = \frac{0.3}{z^2 - 0.8z + 0.15} = \frac{-1.5}{z-0.3} + \frac{1.5}{z-0.5} = \frac{-1.5z}{z-0.3} \cdot z^{-1} + \frac{1.5z}{z-0.5} \cdot z^{-1}$$

利用  $z$  变换的时移性质可求出  $x[n] = 1.5[(0.5)^{n-1} - (0.3)^{n-1}]u[n-1]$

应当注意, 在运用时移性质时

$$\mathcal{Z}[x[n-m]u[n]] = z^{-m} \left[ X(z) + \sum_{n=-m}^{-1} x[n]z^{-n} \right] \quad (7.4-6)$$

而  $\mathcal{Z}[x[n-m]u[n-m]] = z^{-m} X(z)$  (7.4-7)

只有  $x[n]$  是因果序列时,  $x[n-m]u[n-m]$  与  $x[n-m]u[n]$  的  $z$  变换才相等。

### 3. $z$ 域微分 (differentiation in $z$ -domain)

若  $\mathcal{Z}[x[n]] = X(z)$ , 则  $\mathcal{Z}[n x[n]] = -z \frac{dX(z)}{dz}$  (7.4-8)

证明: 根据  $z$  变换定义  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

上式两边对  $z$  求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{dX(z)}{dz} &= \frac{d}{dz} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{dz^{-n}}{dz} \\ &= -z^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n} = -z^{-1} \mathcal{Z}[nx[n]] \end{aligned}$$

所以  $\mathcal{Z}[nx[n]] = -z \frac{dX(z)}{dz}$

由此可见, 序列线性加权 (乘以  $n$ ) 等效于对其  $z$  变换求导数并乘以  $(-z)$ 。

如果将  $nx[n]$  再乘以  $n$ , 利用式(7.4-8)可得

$$\mathcal{Z}[n^2 x[n]] = \mathcal{Z}[n \cdot nx[n]] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[nx[n]] = -z \frac{d}{dz} \left[ -z \frac{d}{dz} X(z) \right]$$

即  $\mathcal{Z}[n^2 x[n]] = z^2 \frac{d^2 X(z)}{dz^2} + z \frac{dX(z)}{dz}$  (7.4-9)

用同样的方法, 可以得到  $\mathcal{Z}[n^m x[n]] = \left[ -z \frac{d}{dz} \right]^m X(z)$  (7.4-10)

式中, 符号  $\left[ -z \frac{d}{dz} \right]^m$  表示  $-z \frac{d}{dz} \left[ -z \frac{d}{dz} \left( -z \frac{d}{dz} \cdots \left( -z \frac{d}{dz} X(z) \right) \right) \right]$ , 共求导  $m$  次。

**例 7.4-4** 已知  $\mathcal{Z}[a^n u[n]] = \frac{z}{z-a}$ , 求序列  $na^n u[n]$  的  $z$  变换。

解: 由式(7.4-8)可得

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[na^n u[n]] &= -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[a^n u[n]] \\ &= -z \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-a} \right) = \frac{az}{(z-a)^2} \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

### 4. 序列指数加权 (multiplication by an exponential sequence)

若  $X(z) = \mathcal{Z}[x[n]]$  ( $R_+ < |z| < R_-$ ), 则

$$\mathcal{Z}[a^n x[n]] = X\left(\frac{z}{a}\right) \quad R_+ < \left| \frac{z}{a} \right| < R_- \quad (7.4-11)$$

证明: 因为  $\mathcal{Z}[a^n x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n x[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left( \frac{z}{a} \right)^{-n}$

所以

$$\mathcal{Z}[a^n x[n]] = X\left(\frac{z}{a}\right)$$

可见,  $x[n]$  乘以指数序列等效于在  $z$  平面内做尺度变换。同样可以得到下列关系

$$\mathcal{Z}[a^{-n} x[n]] = X(az) \quad R_+ < |az| < R_- \quad (7.4-12)$$

$$\mathcal{Z}[(-1)^n x[n]] = X(-z) \quad R_+ < |z| < R_- \quad (7.4-13)$$

**例 7.4-5** 已知  $\mathcal{Z}[\cos \omega_0 n \cdot u[n]] = \frac{z(z - \cos \omega_0)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 + 1}$  ( $|z| > 1$ ), 求序列  $\beta^n \cos \omega_0 n \cdot u[n]$  的  $z$  变换。

**解:** 由式(7.4-11)可得 
$$\mathcal{Z}[\beta^n \cos \omega_0 n \cdot u[n]] = \frac{\frac{z}{\beta} \left( \frac{z}{\beta} - \cos \omega_0 \right)}{\left( \frac{z}{\beta} \right)^2 - 2 \frac{z}{\beta} \cos \omega_0 + 1} = \frac{z(z - \beta \cos \omega_0)}{z^2 - 2z\beta \cos \omega_0 + \beta^2}$$

其收敛域为  $|z/\beta| > 1$ , 即  $|z| > |\beta|$ , 显然, 该结果与式(7.2-19)完全一致。

## 5. 初值和终值定理

(1) 初值定理 (initial-value theorem)

若  $x[n]$  是因果序列, 且已知  $X(z) = \mathcal{Z}[x[n]]$ , 则

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (7.4-14)$$

(2) 终值定理 (expiration-value theorem)

若  $x[n]$  是因果序列, 且已知  $X(z) = \mathcal{Z}[x[n]]$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] \quad (7.4-15)$$

**证明:** 对  $x[n+1] - x[n]$  取单边  $z$  变换

$$\mathcal{Z}[x[n+1] - x[n]] = zX(z) - zx[0] - X(z) = (z-1)X(z) - zx[0]$$

等式两边取极限 
$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)] &= x[0] + \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} \{x[n+1] - x[n]\} z^{-n} \\ &= x[0] + \{x[1] - x[0]\} + \{x[2] - x[1]\} + \cdots \\ &= x[\infty] \end{aligned}$$

所以

$$x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$$

注意终值定理的应用条件: 在时域, 要求只有当  $n \rightarrow \infty$  时, 序列  $x[n]$  才收敛; 或在  $z$  域,  $X(z)$  的极点必须处在单位圆之内 (若极点在单位圆上只能位于  $z = +1$  点处, 且是一阶极点)。这两种条件的描述实质上是等价的。

以上两个定理的应用类似于拉氏变换, 如果已知序列  $x[n]$  的  $z$  变换, 在不求逆变换的情况下, 利用这两个定理可以很方便地求出序列的初值  $x[0]$  和终值  $x[\infty]$ 。

## 6. 卷积定理

(1) 时域卷积定理 (time domain convolution theorem)

若两序列  $x[n]$  和  $h[n]$  的  $z$  变换分别为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]], R_{x+} < |z| < R_{x-}; \quad H(z) = \mathcal{Z}[h[n]], R_{h+} < |z| < R_{h-}$$

$$\text{则} \quad \mathcal{Z}[x[n] * h[n]] = X(z) H(z) \quad (7.4-16)$$

一般情况下, 其收敛域是  $X(z)$  和  $H(z)$  收敛域的重叠部分, 即  $\max(R_{x+}, R_{h+}) < |z| < \min(R_{x-}, R_{h-})$ 。若位于某一  $z$  变换收敛域边缘上的极点被另一  $z$  变换的零点抵消, 则收敛域将会扩大。

$$\text{证明:} \quad \mathcal{Z}[x[n] * h[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x[n] * h[n]] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] h[n-m] \right] z^{-n}$$

交换上式中的求和次序, 则得

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[x[n] * h[n]] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-m] z^{-n} \right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-m] z^{-(n-m)} z^{-m} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] z^{-m} H(z) = X(z) H(z) \end{aligned}$$

$$\text{所以} \quad \mathcal{Z}[x[n] * h[n]] = X(z) H(z)$$

可见两序列在时域中的卷积等效于在  $z$  域中两序列  $z$  变换的乘积。

**例 7.4-6** 求两单边指数序列  $x[n] = a^n u[n]$  和  $h[n] = b^n u[n]$  的卷积。

$$\text{解: 因为} \quad X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|; \quad H(z) = \frac{z}{z-b}, \quad |z| > |b|$$

$$\text{由式 (7.4-16) 得} \quad Y(z) = X(z) H(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)}$$

显然, 收敛域为  $|z| > |a|$  与  $|z| > |b|$  的重叠部分, 如图 7.4-1 所示。

把  $Y(z)$  展开成部分分式

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left( \frac{az}{z-a} - \frac{bz}{z-b} \right)$$

$$\text{其逆变换为} \quad y[n] = x[n] * h[n] = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$$

$$= \frac{1}{a-b} (a^{n+1} - b^{n+1}) u[n]$$

**例 7.4-7** 求两序列  $x_1[n] = u[n]$  和  $x_2[n] = a^n u[n] - a^{n-1} u[n-1]$  的卷积  $y[n]$ 。

**解:** 两序列  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  的  $z$  变换分别为

$$X_1(z) = \frac{z}{z-1} \quad |z| > 1$$

$$X_2(z) = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-a} \cdot z^{-1} = \frac{z-1}{z-a} \quad |z| > |a|$$

由式(7.4-16)得

$$\begin{aligned} Y(z) &= X_1(z) X_2(z) \\ &= \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z-1}{z-a} = \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

$$\text{其逆变换为} \quad y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = a^n u[n]$$

显然,  $X_1(z)$  的极点  $z=1$  被  $X_2(z)$  的零点抵消, 若  $|a| < 1$ ,  $Y(z)$  的收敛域比  $X_1(z)$  和  $X_2(z)$  的收敛域的重叠部分要大, 如图 7.4-2 所示。

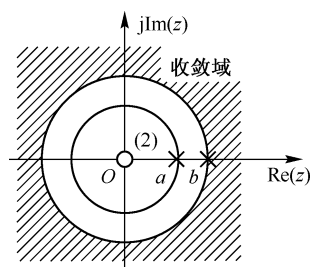


图 7.4-1 例 7.4-6 卷积的  $z$  变换收敛域

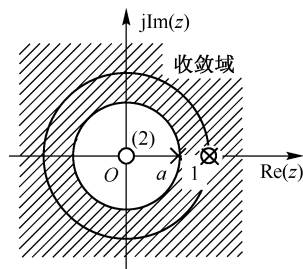


图 7.4-2 例 7.4-7 卷积的  $z$  变换收敛域

## (2) $z$ 域卷积定理 ( $z$ -domain convolution theorem)

若两序列  $x[n]$  和  $h[n]$  的  $z$  变换分别为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]], \quad R_{x+} < |z| < R_{x-}; \quad H(z) = \mathcal{Z}[h[n]], \quad R_{h+} < |z| < R_{h-}$$

$$\text{则} \quad \mathcal{Z}[x[n] h[n]] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_1} X\left(\frac{z}{v}\right) H(v) v^{-1} dv \quad (7.4-17)$$

$$\text{或} \quad \mathcal{Z}[x[n] h[n]] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{C_2} X(v) H\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv \quad (7.4-18)$$

式中,  $C_1$  为  $X(z/v)$  与  $H(v)$  收敛域的重叠部分内逆时针旋转的围线;  $C_2$  为  $X(v)$  与  $H(z/v)$  收敛域的重叠部分内逆时针旋转的围线。而  $\mathcal{Z}[x[n]h[n]]$  的收敛域一般为  $X(v)$  与  $H(z/v)$  或  $H(v)$  与  $X(z/v)$  收敛域的重叠部分, 即  $R_{x+}R_{h+} < |z| < R_{x-}R_{h-}$ 。

## 7. 帕斯瓦尔定理 (Parseval theorem)

如果序列  $x[n]$  和  $h[n]$  是复序列, 且它们的  $z$  变换分别为  $X(z) = \mathcal{Z}[x[n]]$  和  $H(z) = \mathcal{Z}[h[n]]$ , 则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) z^{-1} dz \quad (7.4-19)$$

$z$  域卷积定理与帕斯瓦尔定理的证明留给读者自行求证 (见习题 7-18 与 7-19)

$z$  变换的主要定理和性质列于表 7.4-1 中。

表 7.4-1  $z$  变换的主要定理和性质

| 序号 | 序 列                                                                                                                | 双边 $z$ 变换                                                              | 收 敛 域                                               |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1  | $x[n]$<br>$h[n]$                                                                                                   | $X(z)$<br>$H(z)$                                                       | $R_{x+} <  z  < R_{x-}$<br>$R_{h+} <  z  < R_{h-}$  |
| 2  | $ax[n] + bh[n]$                                                                                                    | $aX(z) + bH(z)$                                                        | $\max(R_{x+}, R_{h+}) <  z  < \min(R_{x-}, R_{h-})$ |
| 3  | $x^*[n]$                                                                                                           | $X^*(z^*)$                                                             | $R_{x+} <  z  < R_{x-}$                             |
| 4  | $\text{Re}[x[n]]$                                                                                                  | $\frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)]$                                        | $R_{x+} <  z  < R_{x-}$                             |
| 5  | $\text{Im}[x[n]]$                                                                                                  | $-\frac{j}{2} [X(z) - X^*(z^*)]$                                       | $R_{x+} <  z  < R_{x-}$                             |
| 6  | $x[-n]$                                                                                                            | $X(z^{-1})$                                                            | $R_{x+} <  z^{-1}  < R_{x-}$                        |
| 7  | $a^n x[n]$                                                                                                         | $X\left(\frac{z}{a}\right)$                                            | $ a  R_{x+} <  z  <  a  R_{x-}$                     |
| 8  | $(-1)^n x[n]$                                                                                                      | $X(-z)$                                                                | $R_{x+} <  z  < R_{x-}$                             |
| 9  | $nx[n]$                                                                                                            | $-z \frac{dX(z)}{dz}$                                                  | $R_{x+} <  z  < R_{x-}$                             |
| 10 | $x[n-m]$                                                                                                           | $z^{-m} X(z)$                                                          | $R_{x+} <  z  < R_{x-}$                             |
| 11 | $x[n] * h[n]$                                                                                                      | $X(z) H(z)$                                                            | $\max(R_{x+}, R_{h+}) <  z  < \min(R_{x-}, R_{h-})$ |
| 12 | $x[n] \cdot h[n]$                                                                                                  | $\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v) H\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v}$ | $R_{x+}R_{h+} <  z  < R_{x-}R_{h-}$                 |
| 13 | $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$                                                                          |                                                                        | $x[n]$ 为因果序列, $ z  > R_{x+}$                        |
| 14 | $x[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$                                                                     |                                                                        | $x[n]$ 为因果序列, 且当 $ z  \geq 1$ 时, $(z-1)X(z)$ 收敛     |
| 15 | $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] h^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) H^*\left(\frac{1}{z^*}\right) \frac{dz}{z}$ |                                                                        | $R_{x+}R_{h+} <  z  < R_{x-}R_{h-}$                 |
| 16 | $\sum_{m=-\infty}^n x[m]$                                                                                          | $\frac{z}{z-1} X(z)$                                                   |                                                     |

## 7.5 序列的傅里叶变换

### 1. 序列傅里叶变换的定义

本书的第3章和第5章分别研究了连续时间信号的频谱，即傅里叶变换以及连续时间系统的频率响应特性。对于离散时间信号和系统，傅里叶变换具有同样重要的地位。本节将简要介绍序列的傅里叶变换，也称为离散时间傅里叶变换（discrete-time Fourier transform, DTFT），给出其定义及基本性质，为第8章研究离散时间系统的频率响应特性做准备。

首先，从采样信号的傅里叶变换着手，假设离散信号 $x[n]$ 是由连续信号 $x(t)$ 经理想采样得到的序列，即满足 $x[n] = x(t)|_{t=nT} = x(nT)$ ，其中 $T$ 为采样间隔，并假设理想采样信号为

$$x_s(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

则采样信号的傅里叶变换具有如下形式

$$\begin{aligned} X_s(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)e^{-j\Omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t-nT) \right] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-jn\Omega T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega T} \end{aligned}$$

$$\text{记} \quad X(e^{j\Omega T}) = X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jn\Omega T} \quad (7.5-1)$$

$$\text{令 } \Omega T = \omega, \text{ 则上式可改写为} \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \quad (7.5-2)$$

式(7.5-1)和式(7.5-2)就定义为离散时间序列 $x[n]$ 的傅里叶变换。其中，式(7.5-1)以模拟角频率 $\Omega$ （单位：弧度/秒）为变量，而式(7.5-2)以数字频率 $\omega$ （单位：弧度）为变量，两者的关系为 $\omega = \Omega T$ （ $T$ 为采样间隔）。从式(7.5-1)看出，序列 $x[n]$ 的傅氏变换 $X(e^{j\Omega T})$ 是 $\Omega$ 的连续的周期函数，周期为 $2\pi/T$ ；而从式(7.5-2)看出， $X(e^{j\omega})$ 是 $\omega$ 的连续的周期函数，周期为 $2\pi$ 。在以后的讨论中，序列的傅里叶变换一般采用式(7.5-2)表示的形式。

由于式(7.5-1)和式(7.5-2)都是无穷级数，因而其收敛的充分条件是 $x[n]$ 绝对可和，即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad (7.5-3)$$

由于 $X(e^{j\omega})$ 是以 $2\pi$ 为周期的周期函数，所以，式(7.5-2)的右端就是 $X(e^{j\omega})$ 的傅氏级数展开式，而 $x[n]$ 则是傅氏级数的系数，根据傅氏级数公式，它等于

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n} d\omega \quad (7.5-4)$$



上式称为  $X(e^{j\omega})$  的傅里叶逆变换 (Inverse discrete-time Fourier transform, IDTFT)。这样式(7.5-2)与式(7.5-4)构成了序列的傅氏变换对, 记为

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{FT}} X(e^{j\omega}) \quad (7.5-5)$$

与连续信号的傅里叶变换  $F(j\Omega)$  类似,  $X(e^{j\omega})$  一般是复函数, 可以写成极坐标的形式

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (7.5-6)$$

其中,  $|X(e^{j\omega})|$  称为幅度谱 (magnitude spectrum),  $\varphi(\omega)$  称为相位谱 (phase spectrum)。

**例 7.5-1** 求  $x[n] = a^n u[n]$  ( $|a| < 1$ ) 的傅里叶变换  $X(e^{j\omega})$ , 并画出频谱图。

**解:** 由式(7.5-2)得 
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$= \frac{1}{1 - a(\cos \omega - j \sin \omega)} = \frac{1}{1 - a \cos \omega + ja \sin \omega}$$

所以 
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}\right)$$

其幅度谱  $|X(e^{j\omega})|$  与相位谱  $\varphi(\omega)$  如图 7.5-1 所示。可见,  $|X(e^{j\omega})|$  与  $\varphi(\omega)$  都是以  $2\pi$  为周期的连续的周期函数。

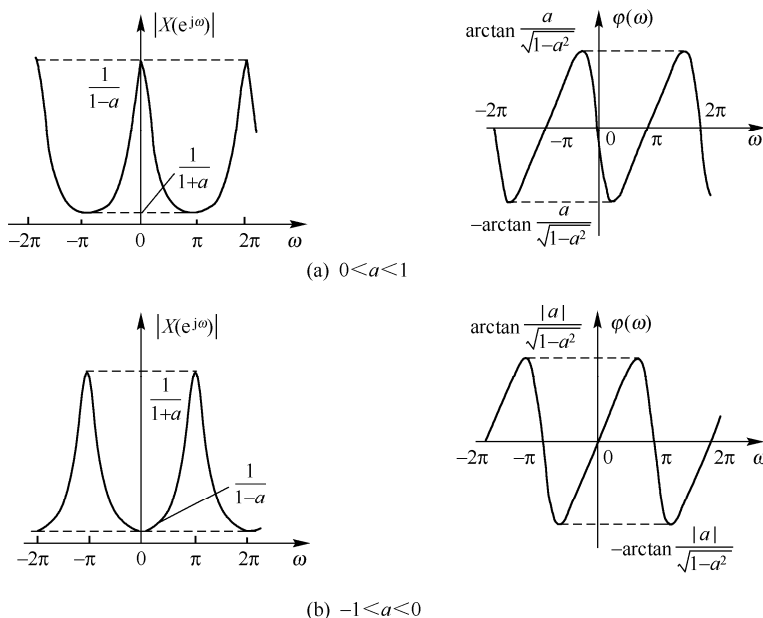


图 7.5-1 指数序列  $a^n u[n]$  的幅度谱与相位谱

**例 7.5-2** 已知矩形脉冲序列  $x[n] = u[n + N_1] - u[n - (N_1 + 1)]$ , 如图 7.5-2(a)所示, 求  $N_1 = 2$  时的频谱。

**解:** 由式(7.5-2)得 
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin[\omega(N_1 + 1/2)]}{\sin(\omega/2)}$$

此时,  $X(e^{j\omega})$  为一实函数, 当  $N_1 = 2$  时, 可画出  $X(e^{j\omega})$ , 如图 7.5-2(b)所示。

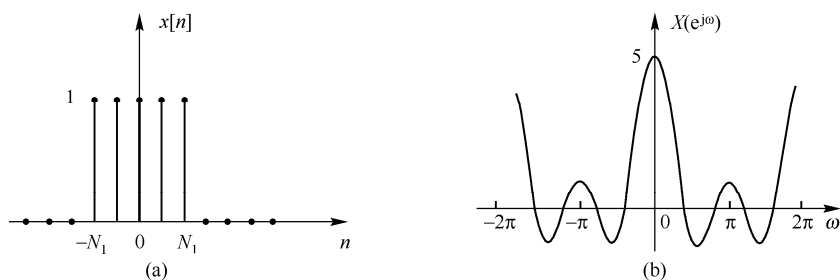


图 7.5-2 矩形脉冲序列及其频谱

**例 7.5-3** 已知一周期连续谱如图 7.5-3(a)所示, 求其对应的序列  $x[n]$ 。

**解:** 根据式(7.5-4)得 
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\omega_m}{\pi} \cdot \frac{\sin \omega_m n}{\omega_m n}$$

序列  $x[n]$  如图 7.5-3(b)所示。

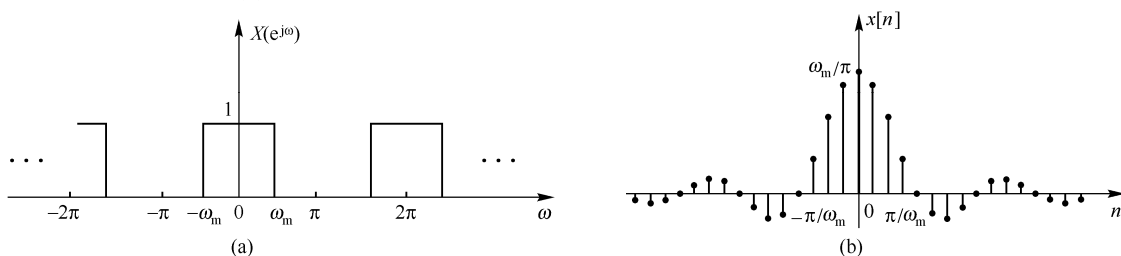


图 7.5-3 例 7.5-3 的图形

**例 7.5-4** 求单位样值信号  $x[n] = \delta[n]$  的频谱。

**解:** 由式(7.5-2)得  $X(e^{j\omega}) = 1$ , 即在所有频率上都是相等的, 这与连续时间信号  $\delta(t)$  的情况一样。

## 2. 序列的傅里叶变换和 $z$ 变换的关系

由式(7.2-2)知道, 序列  $x[n]$  的  $z$  变换为  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ , 令  $z = e^{j\omega}$ , 得序列  $x[n]$  的傅氏变换式(7.5-2)。可见, 序列的傅氏变换是该序列的  $z$  变换在  $z$  平面的单位圆 ( $z = e^{j\omega}$  或  $|z| = 1$ ) 上的取值, 即

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (7.5-7)$$

因此, 可把  $z$  变换看成是序列的傅氏变换的推广。显然, 如果序列  $x[n]$  的  $z$  变换  $X(z)$  的收敛域不包含单位圆, 则其傅氏变换不存在。例如, 对于例 7.5-1 来说, 序列  $x[n] = a^n u[n]$  ( $|a| < 1$ ),

其  $z$  变换为  $X(z) = \frac{z}{z-a}$ , 收敛域为  $|z| > |a|$ , 包含单位圆, 故其傅氏变换存在, 且等于

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

反之, 若  $|a| > 1$ , 则其  $z$  变换  $X(z)$  的收敛域不包含单位圆, 故其傅氏变换不存在。

## 3. 序列的傅里叶变换的基本性质

离散时间序列的傅氏变换是该序列  $z$  变换在  $z = e^{j\omega}$  上的取值。因此, 不难理解, 序列的傅

氏变换具有与  $z$  变换相似的特性，这些特性由表 7.5-1 给出（读者可以自行证明这些性质）。

表 7.5-1 序列的傅里叶变换的主要性质

|      |                                                                    |        |                                                                                                                |
|------|--------------------------------------------------------------------|--------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 线性   | $ax[n] + by[n] \leftrightarrow aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$  | 共轭     | $x^*[n] \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$                                                                     |
| 时移   | $x[n \pm m] \leftrightarrow e^{\pm jm\omega} X(e^{j\omega})$       | 时域卷积   | $x[n] * y[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$                                                     |
| 频移   | $e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(e^{j(\omega - \omega_0)})$ | 频域卷积   | $x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega - \theta)})d\theta$     |
| 频域微分 | $nx[n] \leftrightarrow j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$          | 调制     | $x[n] \cos \omega_0 n \leftrightarrow \frac{1}{2} [X(e^{j(\omega + \omega_0)}) + X(e^{j(\omega - \omega_0)})]$ |
| 反褶   | $x[-n] \leftrightarrow X(e^{-j\omega})$                            | 帕斯瓦尔公式 | $\sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$             |

## 7.6 离散信号时域与变换域分析的 MATLAB 实现

离散信号的时域表现形式是离散序列，可以用 `stem` 函数绘制；离散信号的频域表现形式是周期性连续频谱，不过 MATLAB 没有函数直接计算离散时间的傅里叶变换（DTFT）；离散信号的复频域表现形式是  $z$  变换，可以用 `ztrans` 函数计算其  $z$  变换，用 `iztrans` 函数计算其  $z$  逆变换。

**例 7.6-1** 绘制指数序列  $x[n] = a^n u[n]$  时域波形，其中  $a$  分别为 0.6, -0.6, 1.2, -1.2，观察分析不同的  $a$  对时域序列的影响。

**解：**用 MATLAB 绘制序列波形的程序清单 `exec701.m` 如下，波形如图 7.6-1 所示。由时域波形可以发现，当  $|a| < 1$  时，序列收敛；当  $|a| > 1$  时，序列发散。当  $a > 0$  时，序列单调变化；当  $a < 0$  时，序列正负交替变化。

```
n=0:15;x1=0.6.^n;x2=(-0.6).^n;x3=1.2.^n;x4=(-1.2).^n;
subplot(221);stem(n,x1,'filled');xlabel('a=0.6');
subplot(222);stem(n,x2,'filled');xlabel('a=-0.6');
subplot(223);stem(n,x3,'filled');xlabel('a=1.2');
subplot(224);stem(n,x4,'filled');xlabel('a=-1.2');
```

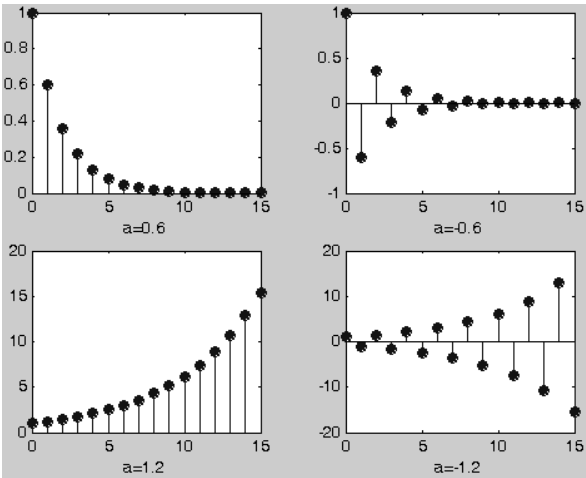


图 7.6-1 指数序列的时域波形

**例 7.6-2** 绘制矩形序列  $x_1[n] = u[n+2] - u[n-4]$ ， $x_2[n] = u[n] - u[n-5]$  和正弦序列  $x_3[n] = \sin \frac{n\pi}{5} \cdot u[n]$ ， $x_4[n] = \sin 5n \cdot u[n]$  的时域波形。

**解：**将第 2 章介绍的单位阶跃信号的函数 Heaviside 加以修改，即可以变成单位阶跃序列的函数 jyx1，如下所示：

```
function x = jyx1(n)
x = (n >= 0);
```

用 MATLAB 绘制序列波形的程序清单 exec702.m 如下，波形如图 7.6-2 所示。由  $x_3[n]$  和  $x_4[n]$  的时域波形可见， $x_3[n]$  的序列具有周期性， $x_4[n]$  的序列没有周期性。因为用  $2\pi$  除以  $x_3[n]$  的角频率是 10，即周期为 10。

```
n = -4:8; x1 = jyx1(n+2)-jyx1(n-4);
x2 = jyx1(n)-jyx1(n-5);
n1 = 0:20; x3 = sin(n1*pi/5); x4 = sin(5*n1);
subplot(221); stem(n,x1,'filled'); xlabel('x1[n]');
subplot(222); stem(n,x2,'filled'); xlabel('x2[n]');
subplot(223); stem(n1,x3,'filled'); xlabel('x3[n]');
subplot(224); stem(n1,x4,'filled'); xlabel('x4[n]');
```

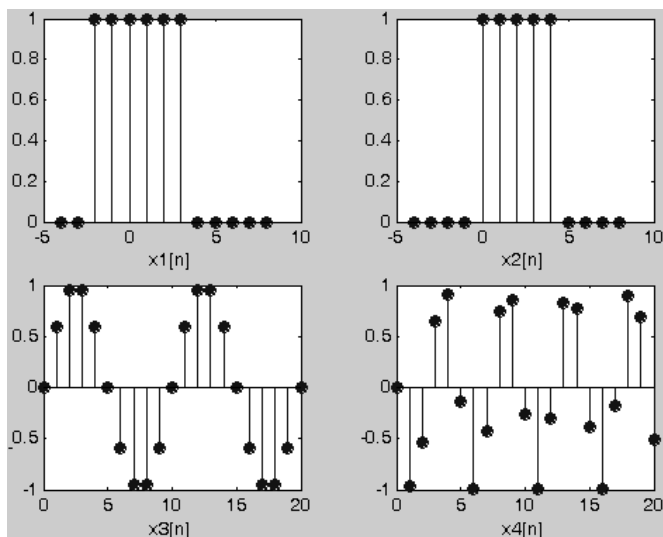


图 7.6-2 矩形序列和正弦序列的时域波形

**例 7.6-3** 求下列序列的  $z$  变换或  $z$  逆变换。

- (1)  $x_1[n] = (1/3)^n u[n]$
- (2)  $x_2[n] = \cos \frac{n\pi}{2}$
- (3)  $X_3(z) = \frac{z}{(z+1)(z-2)}$
- (4)  $X_4(z) = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-0.25)}$

**解：**用符号表达式并通过调用 ztrans 和 iztrans 函数来计算上述结果，其程序清单 exec703.m 如下，可以在 MATLAB 命令窗口看到计算结果。

```
syms n z; x1 = (1/3).^n; x2 = cos(n*pi/2);
z1 = ztrans(x1)
z2 = ztrans(x2)
z3 = z/((z+1)*(z-2)); z4 = (z.^2)/((z-0.5)*(z-0.25));
x3 = iztrans(z3)
x4 = iztrans(z4)
```

**例 7.6-4** 已知序列  $x[n] = (-0.8)^n$ ,  $-5 \leq n \leq 5$ , 绘制出该序列的傅里叶变换的幅度谱和相位谱, 并观察频谱的共轭性。

**解:** 因为  $x[n]$  是离散值, 它的频谱满足周期性, 被定义在一个  $2\pi$  周期上。我们将在  $[-2\pi, 2\pi]$  之间的两个周期中的 401 个频点上计算, 并观察其共轭性。用 MATLAB 绘制序列频谱的程序清单 `exec704.m` 如下, 频谱如图 7.6-3 所示。由频谱图可知, 因为  $x[n]$  是实数序列, 它的频谱是共轭对称的。

```
n = -5:5; x = (-0.8).^n;
k = -200:200; w = (pi/100)*k;
X = x*(exp(-j*pi/100)).^(n'*k);
magX = abs(X); angX = angle(X);
subplot(211); plot(w/pi, magX); grid;
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('|X|'); axis([-2 2 0 15]);
subplot(212); plot(w/pi, angX/pi); grid;
xlabel('\omega/\pi'); ylabel('弧度/\pi'); axis([-2 2 -1 1]);
```

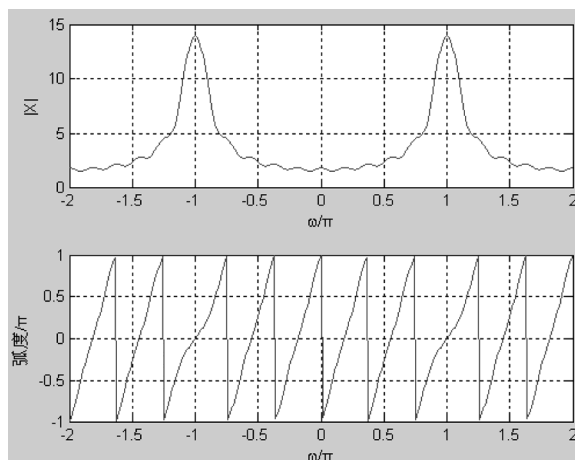


图 7.6-3 离散序列的离散时间傅里叶变换频谱

## 习 题

7-1 分别绘出下列各序列的图形。

$$(1) x[n] = (1/2)^n u[n] \quad (2) x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n] \quad (3) x[n] = (-1/2)^n u[n] \quad (4) x[n] = 2^{-n} u[-n-1]$$

$$(5) x[n] = 2^n u[n] \quad (6) x[n] = (-2)^n u[n] \quad (7) x[n] = (-2)^n u[-n+1] \quad (8) x[n] = -(1/2)^n u[n]$$

7-2 分别绘出下列各序列的图形, 并判断下列各序列是否是周期序列, 如果是周期序列, 试确定其周期  $N$ 。

- (1)  $x[n] = 3 \sin\left(\frac{3n\pi}{7} - \frac{3\pi}{4}\right)$  (2)  $x[n] = e^{j\left(\frac{n}{10} - \frac{\pi}{5}\right)}$   
 (3)  $x[n] = \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$  (4)  $x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{10} - \frac{\pi}{5}\right)$   
 (5)  $x[n] = \left(\frac{2}{3}\right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{5}\right)$  (6)  $x[n] = \cos\left(\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right)\{u[n] - u[n-10]\}$

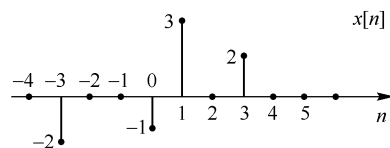
7-3 设有序列  $x[n] = \begin{cases} n+2, & -2 \leq n \leq 3 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ , 画出下面各序列的波形图。

- (1)  $x[n-2]$  (2)  $2x[2-n]x[n]$   
 (3)  $x[1-n]+x[n+1]$  (4)  $x[n-2]+x[n+2]$

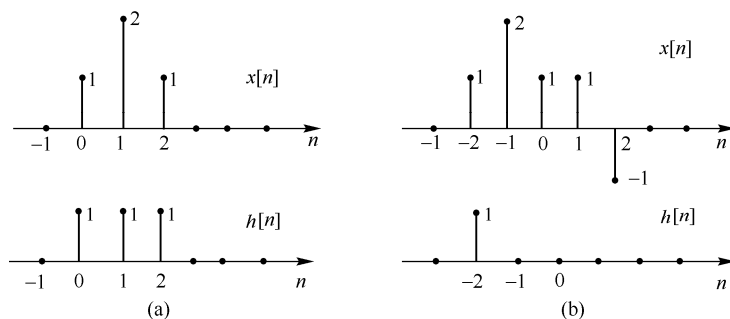
7-4 序列  $x[n]$  如图题 7-4 所示, 把  $x[n]$  表示为  $\delta[n]$  的加权与延迟之线性组合。

7-5 计算下面各对序列的卷积和。

- (1)  $x[n], h[n]$  如图题 7-5(a) 所示。  
 (2)  $x[n], h[n]$  如图题 7-5(b) 所示。  
 (3)  $h[n] = R_4[n], x[n] = R_4[n]$   
 (4)  $h[n] = 2^n R_5[n], x[n] = \delta[n] - \delta[n+2]$   
 (5)  $h[n] = (1/2)^n u[n], x[n] = R_4[n]$   
 (6)  $x[n] = \alpha^n u[n], 0 < \alpha < 1; h[n] = \beta^n u[n], 0 < \beta < 1 \text{ 且 } \beta \neq \alpha$ 。



图题 7-4



图题 7-5

- 7-6 设  $x[n] = x[n]\{u[n-N_0] - u[n-(N_1+1)]\}, N_0 < N_1$   
 $h[n] = h[n]\{u[n-N_2] - u[n-(N_3+1)]\}, N_2 < N_3$   
 $s[n] = x[n] * h[n] = s[n]\{u[n-N_4] - u[n-(N_5+1)]\}, N_4 < N_5$

试用  $N_0, N_1, N_2, N_3$  来表示  $N_4, N_5$ 。

7-7 求下列序列的  $z$  变换  $X(z)$ , 并注明收敛域, 绘出  $X(z)$  的零极点图。

- (1)  $(-1/2)^n \{u[n] - u[n-8]\}$  (2)  $(1/2)^n u[-n]$  (3)  $-(1/2)^n u[-n-1]$   
 (4)  $2^n u[n+4]$  (5)  $u[n] - u[n-N]$  (6)  $(1/2)^{|n|}$   
 (7)  $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \delta[n] - \frac{1}{5} \delta[n-2]$  (8)  $nu[n-1]$  (9)  $3^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) \cdot u[n]$

7-8 画出  $X(z) = \frac{-3z^{-1}}{2-5z^{-1}+2z^{-2}}$  的零极点图, 在下列三种收敛域下, 哪种情况对应左边序列, 哪种情况对应右边序列, 哪种情况对应双边序列? 并求出各对应序列。

$$(1) |z| > 2 \quad (2) |z| < 0.5 \quad (3) 0.5 < |z| < 2$$

7-9 求下列  $X(z)$  的逆变换  $x[n]$ 。

$$(1) X(z) = \frac{1 - 0.5z^{-1}}{1 + \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \quad |z| > 0.5$$

$$(2) X(z) = \frac{1 - az^{-1}}{z^{-1} - a} \quad |z| > \left| \frac{1}{a} \right|$$

$$(3) X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega + z^{-2}} \quad |z| > 1$$

$$(4) X(z) = \frac{z^{-1}}{(1 - 5z^{-1})^2} \quad |z| > 5$$

$$(5) X(z) = \frac{z^{-2}}{1 + z^{-2}} \quad |z| > 1$$

$$(6) x(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \quad |z| > 1$$

$$(7) \frac{z^2}{(z + 1/2)(z - 1/3)} \quad |z| < 1/3$$

$$(8) \frac{z}{(z - 1/2)(z - 1/3)} \quad 1/3 < |z| < 1/2$$

$$(9) \frac{1}{(z + 1/2)(z + 1/3)} \quad |z| > 1/2$$

$$(10) X(z) = \frac{10z}{(z - 1)(z - 2)} \quad (|z| > 2)$$

7-10 求下列  $z$  变换在不同收敛域下的逆变换  $x[n]$ :

$$(1) X(z) = \frac{2}{1 - z} \quad (a) |z| > 1, (b) |z| < 1$$

$$(2) X(z) = \frac{3z}{(z - 1)^2(z - 2)} \quad (a) |z| > 2, (b) |z| < 1, (c) 1 < |z| < 2$$

$$(3) x(z) = \frac{z^3}{(z - \frac{1}{4})^2(z + 1)} \quad (a) |z| < \frac{1}{4}, (b) |z| > 1, (c) \frac{1}{4} < |z| < 1$$

7-11 已知  $x[n]$  的  $z$  变换为  $X(z)$ , 试证明下列关系:

$$(1) \mathcal{Z}[e^{-an}x[n]] = X(e^a z) \quad (2) \mathcal{Z}[x^*[n]] = X^*(z^*) \quad (3) \mathcal{Z}[x[-n]] = X(z^{-1})$$

$$(4) \mathcal{Z}[\operatorname{Re}\{x[n]\}] = \frac{1}{2} \{X(z) + X^*(z^*)\} \quad (5) \mathcal{Z}[\operatorname{Im}\{x[n]\}] = -\frac{j}{2} \{X(z) - X^*(z^*)\}$$

\*\*7-12 已知  $\mathcal{Z}[x[n]u[n]] = X(z)$ , 证明  $\mathcal{Z}\left[\sum_{m=0}^n x[m]\right] = \frac{z}{z-1}X(z)$ 。

\*\*7-13 已知序列  $x[n]$  和  $h[n]$  的  $z$  变换分别为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]], \quad R_{x+} < |z| < R_{x-}; \quad H(z) = \mathcal{Z}[h[n]], \quad R_{h+} < |z| < R_{h-}$$

证明  $z$  域卷积定理:

$$\mathcal{Z}[x[n]h[n]] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}dv, \quad R_{x+}R_{h+} < |z| < R_{x-}R_{h-}$$

式中,  $C$  为  $X\left(\frac{z}{v}\right)$  与  $H(v)$  收敛域的重叠部分内逆时针旋转的围线。

\*\*7-14 如果序列  $x[n]$  和  $h[n]$  是复序列, 且它们的  $z$  变换分别为  $X(z) = \mathcal{Z}[x[n]]$ ,  $H(z) = \mathcal{Z}[h[n]]$ , 证明帕斯瓦尔定理:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]h^*[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)z^{-1}dz$$

7-15 试证明实序列的相关定理 
$$\mathcal{Z}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[m-n]\right] = H(z)X\left(\frac{1}{z}\right)$$

其中  $H(z) = \mathcal{Z}[h[n]]$ ,  $X(z) = \mathcal{Z}[x[n]]$ 。

7-16 利用卷积定理求  $y[n] = x[n] * h[n]$ 。已知

$$(1) x[n] = a^n u[n], h[n] = b^n u[-n] \quad (2) x[n] = a^n u[n], h[n] = u[n-1]$$

$$(3) x[n] = R_N[n] = u[n] - u[n-N], h[n] = a^n u[n], 0 < a < 1$$

\*\*7-17 利用  $z$  域卷积定理求序列  $e^{-an} \sin \omega_0 n \cdot u[n]$  的  $z$  变换。

\*\*7-18 已知  $x[n], y[n]$  的  $z$  变换, 用逆变换法和  $z$  域卷积定理求  $x[n] \cdot y[n]$  的  $z$  变换。

$$(1) X(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}, |z| > 0.5; Y(z) = \frac{1}{1 - 2z}, |z| < 0.5$$

$$(2) X(z) = \frac{0.8}{(1 - 0.2z^{-1})(1 - 0.2z)}, 0.2 < |z| < 5; Y(z) = \frac{2}{1 - 5z}, |z| > 0.2$$

$$7-19 \text{ 已知 } X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - 2z^{-1})}。$$

(1) 确定与  $X(z)$  有关的收敛域可能有几种情况, 画出各自的收敛域图;

(2) 求以上各种收敛域所对应的离散时间序列的表达式;

(3) 以上序列中哪一种序列存在傅氏变换?

7-20 计算下列序列的傅里叶变换。

$$(1) 2^n u[-n] \quad (2) (1/2)^n \{u[n+2] - u[n-3]\} \quad (3) \delta[4-2n]$$

$$(4) \sum_{m=0}^{\infty} (1/4)^m \delta[n-3m] \quad (5) \frac{\sin \frac{\pi n}{3}}{\pi n} \cdot \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{\pi n} \quad (6) (1/2)^{|n|}$$

7-21 令  $x[n]$  和  $X(e^{j\omega})$  分别表示一个序列及其傅氏变换, 证明

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x^*[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})d\omega$$

\*\*7-22 假设  $y[n] = x[n] * h[n]$ , 且已知  $x[n], y[n]$  分别如下, 求  $h[n]$ 。

$$(1) x[n] = \{1, 2, 3\}, 0 \leq n \leq 2; y[n] = \{2, 3, 4, 5, 6, 3, 2, 1\}, 0 \leq n \leq 7。$$

$$(2) x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 3^n u[-n-1]。$$

以下为 MATLAB 习题

7-23 绘制矩形序列  $x_1[n] = u[n] - u[n-5], x_2[n] = u[n-2] - u[n-6]$  和正弦序列  $x_3[n] = \sin \frac{n\pi}{3} \cdot u[n], x_4[n] = \sin 3n \cdot u[n]$  的时域波形。

7-24 求下列序列的  $z$  变换或  $z$  逆变换。

$$(1) x_1[n] = 2^n u[n] \quad (2) x_2[n] = \sin \frac{n\pi}{3} \cdot u[n]$$

$$(3) X_3(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} \quad (4) X_4(z) = \frac{z}{(z-0.4)^2(z-0.5)}$$

7-25 已知序列  $x[n] = (0.7)^n, -2 \leq n \leq 6$ , 绘制出该序列的傅里叶变换的幅度谱和相位谱, 并观察频谱的共轭性。



# 第 8 章 离散时间系统的时域与变换域分析

对于连续时间系统，用微分方程式作为描写它们的数学模型。而对于离散时间系统而言，其输入输出都是离散信号，因而需要采用一种不同的数学模型——差分方程（difference equation）来表示。这是离散系统与连续系统的不同之处。本教材只限于讨论线性时不变离散时间系统（linear time-invariant discrete-time system）。

离散时间系统和连续时间系统在许多方面是平行相似的。比如，连续系统用微分方程描述，离散系统则用差分方程描述；差分方程和微分方程的求解方法在很大程度上是相互对应的；在连续系统的时域分析中，冲激响应和卷积积分具有重要的地位和意义，而在离散系统的时域分析中，单位样值响应（unit sample response /impulse response）与卷积和（convolution sum）占据同样重要的地位和意义；在连续系统的变换域分析中，拉普拉斯变换以及系统函数的概念被广泛采用，而在离散系统的变换域分析中，具有相应的  $z$  变换（ $z$  transform）以及系统函数的概念。与连续信号和系统分析方法的这些相似性，可以给学习离散信号和系统的分析方法提供极大的便利，但在具体应用时，应注意它们之间的差异，从而真正掌握信号和系统的本质。

## 8.1 离散时间系统与差分方程

### 8.1.1 线性时不变离散时间系统

离散时间系统框图如图 8.1-1 所示，它可以看成为一个离散信号的变换器，当输入信号  $x[n]$  经过该离散系统后，将变换成另一个序列——输出信号  $y[n]$ 。

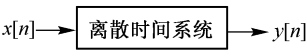


图 8.1-1 离散时间系统

对离散系统，可以从各个不同侧面描述其特征。从性能上，可以划分为：线性、非线性，时变、时不变，从响应特点上分为：因果、非因果，稳定和不稳定等各种类型。目前，最常用的是“线性时不变系统”。其中后两种特点即因果性、稳定性将在介绍完离散系统的单位样值响应  $h[n]$  之后再讨论。下面先讨论线性时不变离散系统的基本特点。

线性离散系统是指满足叠加性与均匀性的离散系统。具体地说，对以  $T[\cdot]$  表示的离散系统，若激励信号分别为  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  时，产生的响应分别为  $y_1[n]$  和  $y_2[n]$ ，当激励信号为  $c_1x_1[n] + c_2x_2[n]$  时，响应变为  $c_1y_1[n] + c_2y_2[n]$ ，则此系统为线性系统。其特点如图 8.1-2 所示。

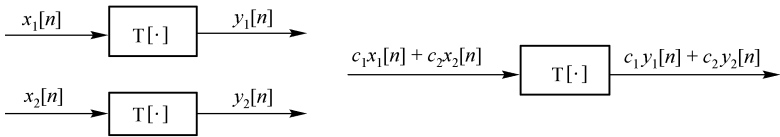


图 8.1-2 线性系统的均匀性与叠加性

时不变离散系统是指在起始状态为零时，系统响应与激励施加于系统的时刻无关。即：

若激励信号  $x[n]$  产生的响应为  $y[n]$ ，则激励信号  $x[n-m]$  产生的响应为  $y[n-m]$ ，即发生同步延迟，如图 8.1-3 所示。对时不变系统，其激励位移多少，实际上是其零状态响应也相应位移多少。

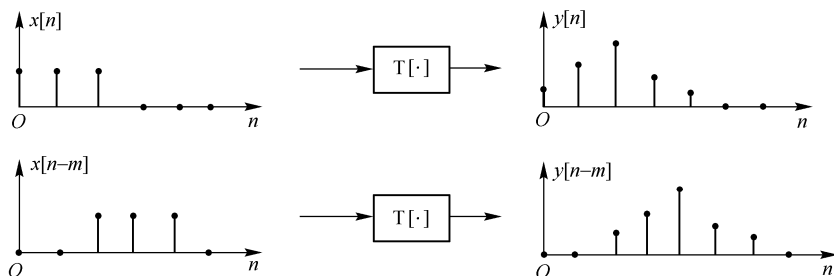


图 8.1-3 时不变系统特性示意图

**例 8.1-1** 判断滑动平均滤波器的线性特性及时不变特性。广义的滑动平均系统的输出  $y[n]$  与输入  $x[n]$  满足以下关系

$$y[n] = T[x[n]] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] \quad (8.1-1)$$

**解：**假设  $y_1[n] = T[x_1[n]]$  和  $y_2[n] = T[x_2[n]]$ ，即  $y_1[n]$  和  $y_2[n]$  分别为输入  $x_1[n]$  和  $x_2[n]$  时的输出信号。

(1) 当输入信号为  $x[n] = ax_1[n]$  时，输出信号为

$$y[n] = T[ax_1[n]] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} ax_1[n-k] = \frac{a}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x_1[n-k] = ay_1[n]$$

因而该系统满足均匀性。

(2) 输入信号为  $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$  时，输出信号为

$$\begin{aligned} y[n] &= T[x_1[n] + x_2[n]] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} (x_1[n-k] + x_2[n-k]) \\ &= \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x_1[n-k] + \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x_2[n-k] \\ &= y_1[n] + y_2[n] \end{aligned}$$

该系统满足叠加性，所以该系统是线性系统。

(3) 假设输入信号为  $x[n] = x_1[n-m]$ ，则输出信号为

$$y[n] = T[x_1[n-m]] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x_1[n-m-k] = y_1[n-m]$$

因而该系统是时不变系统。

综合以上讨论，该系统是一个线性时不变系统。

由上例可以看出：对于离散系统，输入、输出信号的自变量  $n$  是代表离散时间的整型值。因此，离散系统的行为和性能描述，要用差分方程进行描述。

描述线性时不变连续系统的微分方程由连续自变量  $t$  的函数  $x(t)$  和  $y(t)$  及其各阶导函数项

$\frac{d^n y(t)}{dt^n}, \frac{d^m x(t)}{dt^m}$  ( $n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots$ ) 或积分项等线性组合而成。而线性时不变离散系统的描述方程中, 构成方程式的各项必定包含有离散自变量及其序列  $x[n]$  和  $y[n]$ , 以及它们的位移序列  $x[n+1], x[n+2], \dots, x[n-1], x[n-2], \dots$  和  $y[n+1], y[n+2], \dots, y[n-1], y[n-2], \dots$ , 并且各项的系数是与  $n$  无关的常数。这样的方程称为常系数线性差分方程 (linear constant-coefficient difference equation)。

## 8.1.2 线性时不变离散时间系统的数学模型

研究离散系统的数学模型——差分方程, 需要首先研究离散时间系统中几种基本运算关系, 特别是涉及线性时不变特性的运算关系, 如移位 (或称为延时)、数乘、相加。这与连续时间系统的数学运算关系, 如积分、数乘、相加完全对应。构成一个离散时间系统所需的时间域基本单元如图 8.1-4 所示。其中, 单位延时器用  $E^{-1}$  表示, 这与式 (7.1-16) 的第 3 式是一致的; 两序列相加用符号  $\oplus$  来表示, 序列与数的相乘用  $\otimes$  来表示。为使图形简化, 也常使用信号流图来表示。下面举例说明, 根据一个由图 8.1-4 所示的基本单元组成的离散系统, 如何建立描述该系统的数学模型——差分方程。

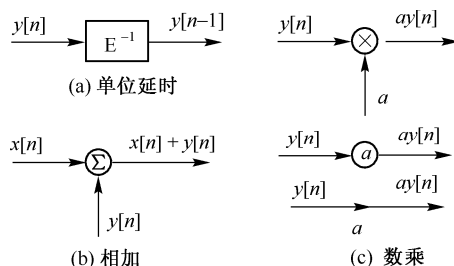


图 8.1-4 离散时间系统的基本运算单元符号

**例 8.1-2** 考察图 8.1-5 所示的离散系统, 试写出其激励  $x[n]$  和响应  $y[n]$  之间关系的差分方程。

**解:** 为掌握如何建立差分方程, 先对三个基本单元的输入、输出进行逐个列写:

单位移位 (延时) 器: 输入为  $y[n]$ , 输出为  $y[n-1]$ ;

数乘单元: 输入为  $y[n-1]$ , 输出为  $ay[n-1]$ ;

加法器单元: 输入为  $x[n]$  和  $ay[n-1]$ , 输出为  $y[n]$ 。

因此, 针对加法器可以写出:  $y[n] = x[n] + ay[n-1]$

移项整理可得:  $y[n] - ay[n-1] = x[n]$  (8.1-2)

这是一个一阶常系数线性差分方程。其左端是由响应序列  $y[n]$

及其移位序列  $y[n-1]$  线性叠加构成的, 右端是激励序列  $x[n]$ 。若令  $a = 1$ , 则式 (8.1-2) 左端正好是式 (7.1-18), 这说明  $x[n]$  是  $y[n]$  的一阶后向差分运算, 差分方程也由此而得名。

一般情况下, 差分方程的等式左端由未知序列  $y[n]$  及其移位序列  $y[n-1], y[n-2], \dots, y[n-N]$  线性组合而成, 等式右端是已知的激励  $x[n], x[n-1], x[n-2], \dots, x[n-M]$  的线性组合, 将未知序列变量序号的最高值与最低值之差称为差分方程的阶数。若差分方程如式 (8.1-2) 所示, 即方程左端由未知序列  $y[n]$  及其右移序列 (序列序号递减) 组成, 这一类差分方程称为后向差分方程 (backward difference equation)。如果方程左端由未知序列  $y[n]$  及其左移序列 (序列序号递增), 如  $y[n+1], y[n+2], \dots$  组成, 则称为前向差分方程 (forward difference equation)。

**例 8.1-3** 将图 8.1-5 所示的离散系统中的延时器位置稍做调整, 组成如图 8.1-6 所示的系统, 试写出其输入、输出关系式。

**解:** 延时器的输出为  $y[n]$ , 则输入必为  $y[n+1]$ , 即加法器输出为  $y[n+1]$ , 因而针对加法器

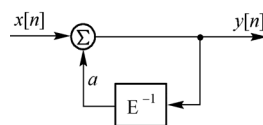


图 8.1-5 例 8.1-2 的系统方框图

可写出

$$y[n+1] = x[n] + ay[n]$$

即

$$y[n+1] - ay[n] = x[n] \quad (8.1-3)$$

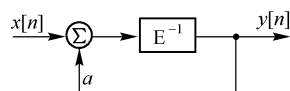


图 8.1-6 例 8.1-3 的系统方框图

该式与式(8.1-2)类似，但它是一阶前向差分方程。

不难验证，式(8.1-2)和式(8.1-3)所表示的离散系统均为线性时不变系统。而且比较图 8.1-5 和图 8.1-6，可以看出两系统并无本质上的差别，只是输出信号的取出端不同。图 8.1-5 的  $y[n]$  取自延时器的输入端，而图 8.1-6 的  $y[n]$  取自延时器的输出端，如果将同一输入信号分别作用于这两个系统，那么两系统的输出信号的形式相同，但后者较前者延时一个单位。通常，对于因果系统用后向差分方程比较方便，在一般的离散系统中都采用这种方式。而在状态变量分析中，习惯上采用前向差分方程（见第 9 章）。

以上分析初步说明了离散时间系统数学模型的特点。实际上，如果用计算机编程的高级语言中的循环语句及数组来描述式(8.1-2)和式(8.1-3)，便会发现：在计算机中，所谓的延时是由存储器实现的。给定数组  $x[n]$  的全部样值及数组  $y[n]$  的边界值，由计算机来求解式(8.1-2)和式(8.1-3)是可行的方法之一。

**例 8.1-4** 对图 8.1-7 所示的离散系统，试写出其输入、输出关系式。

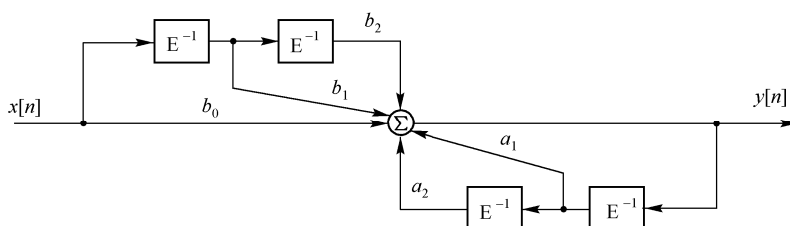


图 8.1-7 例 8.1-4 中的二阶系统

**解：**本例比前两例多了几个移位单元和数乘单元，但只要列出每个延时器（移位单元）的输入、输出，并列出加法器的输入输出方程，便很容易写出其对应的差分方程为

$$y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] \quad (8.1-4)$$

需要说明的是，在差分方程中，离散自变量虽以  $n$  表示，但  $n$  并不只是代表时间。实际上  $n$  也可代表数组中元素出现的先后次序，如著名的海诺塔（Tower of Hanoi）问题，菲波纳西（Fibonacci）数列问题，用差分方程求解时，其自变量  $n$  均与时间无关。

一般情况下，线性时不变离散系统可以由常系数线性差分方程描述，上面几例都是如此，求解这一类差分方程的方法大致有以下几种。

### 1. 递推解法（迭代法）

以方程(8.1-2)为例，即  $y[n] - ay[n-1] = x[n]$

设输入  $x[n] = \delta[n]$ ，并假设  $y[-1] = 0$ ，从而有

$$y[0] = x[0] + ay[-1] = 1$$

$$\begin{aligned}
 y[1] &= x[1] + ay[0] = a \\
 y[2] &= x[2] + ay[1] = a^2 \\
 &\vdots \\
 y[n] &= x[n] + ay[n-1] = a^n
 \end{aligned}$$

此范围仅限于  $n \geq 0$ , 故

$$y[n] = a^n u[n]$$

递推（迭代）法是解差分方程的一种原始方法，用计算机实现较方便，且方法简单、概念清楚，但一般只能得出有限数值解，而不能直接给出完整的解析解（闭式解）。

## 2. 时域经典法

类似于第 4 章中微分方程的经典解法，差分方程的解可分为齐次解和特解，然后利用边界条件求出齐次解中的待定系数。这种方法虽然也是基本方法之一，且便于从物理概念上说明各响应分量之间的关系，但求解过程较繁，在解决具体问题时已较少采用。但其求齐次解的思路则被利用来求解系统的零输入响应和单位样值响应。8.2.1 节将详细介绍此种解法。

## 3. 零输入、零状态响应解法

这是利用线性系统的可分解性，将系统响应分解成零输入响应与零状态响应两部分，利用时域经典法求解零输入响应，用离散线性卷积的方法求解零状态响应，这也是现今通行的时域解法。与连续时间系统的情况类似，卷积方法在离散时间系统分析中同样占有十分重要的地位。零输入、零状态响应解法将在 8.2.2 节中讨论。

## 4. $z$ 变换法

这是实际应用中简便有效的方法。类似于用拉普拉斯变换求解连续时间系统的微分方程，利用  $z$  变换可将离散系统的差分方程的求解转化为代数方程的求解，不仅可以得到差分方程的零状态响应，而且也可以得到零输入响应。此外，利用  $z$  变换法还可以用于研究离散系统的频率响应等诸多其他特性，并使离散系统的物理意义更加清晰。

## 5. 状态空间分析法

这是近代控制理论中常用的方法之一。特点是将由  $N$  阶差分方程描述的离散系统转化为状态空间描述的一组一阶线性常系数差分方程组，通过解此一阶差分方程组，得出系统的诸多输出或内部环节状态变量。这种方法与连续时间系统的状态变量分析法一起，将在第 9 章中讨论。

下面将讨论线性常系数差分方程的求解方法，包括时间域的经典法求解自由响应和强迫响应、系统法求解零输入响应和零状态响应和  $z$  变换法求解差分方程。

# 8.2 常系数线性差分方程的求解

$N$  阶常系数线性差分方程的一般形式可表示为

$$\begin{aligned}
 &a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_{N-1} y[n-N+1] + a_N y[n-N] \\
 &= b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \cdots + b_{M-1} x[n-M+1] + b_M x[n-M]
 \end{aligned} \tag{8.2-1}$$

式中, 系数  $a_i$  ( $0 \leq i \leq N$ ) 和  $b_j$  ( $0 \leq j \leq M$ ) 均为常数, 用求和符号表示为

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r] \quad (8.2-2)$$

### 8.2.1 线性常系数差分方程的时域经典法求解

一般地, 常系数线性差分方程的解由齐次解和特解组成, 齐次解也称系统的自由响应, 特解称为系统的强迫响应。齐次解是当式(8.2-2)右端等于 0, 即式(8.2-2)所对应的齐次方程式(8.2-3)的解。

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0 \quad (8.2-3)$$

首先求解最简单的一阶线性齐次差分方程。假设一阶线性齐次差分方程为

$$y[n] - ay[n-1] = 0 \quad (8.2-4)$$

如果  $y[n-1] \neq 0$ , 则式(8.2-4)可改写为  $a = y[n]/y[n-1]$ , 这说明输出序列  $y[n]$  构成一个以常数  $a$  为公比的等比级数, 从而  $y[n]$  具有下述形式

$$y[n] = C\alpha^n \quad (8.2-5)$$

其中  $C$  是根据边界条件确定的待定常数。

如在某一阶方程中, 假设边界条件为  $y[0] = b$ , 则相应的一阶差分方程的齐次解为

$$y[n] = b \cdot \alpha^n \quad (8.2-6)$$

可以证明, 对于  $N$  阶齐次线性差分方程式(8.2-3), 其齐次解是由  $N$  项形如  $C\alpha^n$  的指数序列叠加而成的。下面证明这一结论。

将式  $y[n] = C\alpha^n$  代入式(8.2-3), 得到

$$\sum_{k=0}^N a_k C\alpha^{n-k} = 0 \quad (8.2-7)$$

消去常数  $C$ , 并逐项除以  $\alpha^{n-N}$ , 式(8.2-7)可化简成

$$a_0 \alpha^N + a_1 \alpha^{N-1} + \cdots + a_{N-1} \alpha + a_N = 0 \quad (8.2-8)$$

这是一个一元  $N$  次方程。如果  $\alpha_k$  是一元  $N$  次方程式(8.2-8)的根, 则  $y[n] = C\alpha_k^n$  必定满足式(8.2-3)。式(8.2-8)称为差分方程(8.2-3)的特征方程, 而称其根  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$  为差分方程(8.2-3)的特征根。

在特征根无重根的情况下, 差分方程的齐次解为

$$y_h[n] = C_1 \alpha_1^n + C_2 \alpha_2^n + \cdots + C_N \alpha_N^n \quad (8.2-9)$$

式(8.2-9)中的系数  $C_1, C_2, \cdots, C_N$  是由边界条件决定的系数。下面举例说明齐次解的求解过程。

**例 8.2-1** 设描写某系统的齐次差分方程为  $y[n] - 0.7y[n-1] + 0.1y[n-2] = 0$ , 并设  $y[-1] = -26$ ,  $y[-2] = -202$ , 求该差分方程的齐次解。

**解:** 给定差分方程的特征方程为

$$\alpha^2 - 0.7\alpha + 0.1 = 0$$

求得特征根为  $\alpha_1 = 0.2$ ,  $\alpha_2 = 0.5$ , 于是齐次解为

$$y[n] = C_1(0.2)^n + C_2(0.5)^n$$

代入边界条件  $y[-1] = -26$ ,  $y[-2] = -202$ , 得到

$$y[-1] = C_1(0.2)^{-1} + C_2(0.5)^{-1} = 5C_1 + 2C_2$$

$$y[-2] = C_1(0.2)^{-2} + C_2(0.5)^{-2} = 25C_1 + 4C_2$$

由此求得系数  $C_1 = -10$ ,  $C_2 = 12$ , 则方程的解为

$$y[n] = -10(0.2)^n + 12(0.5)^n$$

在特征方程有重根的情况下, 齐次解的形式略有不同 (这一点与连续系统的微分方程求解类似, 出现  $e^{\alpha_1 t}$ ,  $te^{\alpha_1 t}$ ,  $\dots$  项)。假定  $\alpha_1$  是特征方程式(8.2-8)的  $K$  重根, 那么, 在齐次解中, 相应于  $\alpha_1$  的部分将有  $K$  项

$$C_1 n^{K-1} \alpha_1^n + C_2 n^{K-2} \alpha_1^n + \dots + C_{K-1} n \alpha_1^n + C_K \alpha_1^n \quad (8.2-10)$$

**例 8.2-2** 求差分方程  $y[n] - 2y[n-1] + 2y[n-2] - 2y[n-3] + y[n-4] = 0$  的齐次解。已知边界条件为  $y[1]=1, y[2]=0, y[3]=1, y[5]=1$ 。

**解:** 特征方程为  $\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$  即  $(\alpha-1)^2(\alpha^2+1) = 0$

特征根为  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  (二重根),  $\alpha_3 = j$ ,  $\alpha_4 = -j$  (共轭复根)

于是齐次解为  $y[n] = C_1 n + C_2 + C_3 j^n + C_4 (-j)^n = C_1 n + C_2 + C_3 e^{jn\pi/2} + C_4 e^{-jn\pi/2}$

$$= C_1 n + C_2 + P \cos \frac{n\pi}{2} + Q \sin \frac{n\pi}{2}$$

这里,  $C_1, C_2, P, Q$  是待定系数, 而且  $P = (C_3 + C_4)$ ,  $Q = j(C_3 - C_4)$ , 将边界条件代入上式得

$$1 = C_1 + C_2 + Q \quad 0 = 2C_1 + C_2 - P \quad 1 = 3C_1 + C_2 - Q \quad 1 = 5C_1 + C_2 + Q$$

由上述方程组解得  $C_1 = 0, C_2 = 1, P = 1, Q = 0$

从而有  $y[n] = 1 + \cos \frac{n\pi}{2}$

**例 8.2-3** 图 8.2-1 是一个链形电阻网络, 设信号源的电压为  $x(t)$ , 试确定输出端的电流  $y(t)$  (注: 本例的链形网络不是一个离散时间系统, 因为  $n$  不是时间变量, 而是表示节点的序号, 如前所述——差分方程中变量的选取因具体函数而异, 并不仅限于时间)。

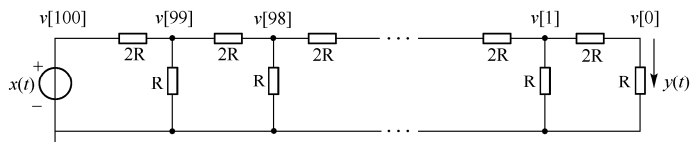


图 8.2-1 链形电阻网络的节点电位

**解:** 根据该网络的结构和电阻值, 设从右往左数的第  $n$  个节点的对地电压为  $v[n]$ , 则有

$$v[0] = Ry(t)$$

$$v[1] = v[0] + 2Ry(t) = 3Ry(t)$$

对  $2 \leq n \leq 100$  的节点, 则有 
$$\frac{v[n] - v[n-1]}{2R} = \frac{v[n-1]}{R} + \frac{v[n-1] - v[n-2]}{2R}$$

整理后得 
$$v[n] - 4v[n-1] + v[n-2] = 0$$

该二阶差分方程式的特征方程为 
$$\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0$$

特征根为 
$$\alpha_1 = 2 + \sqrt{3}, \quad \alpha_2 = 2 - \sqrt{3}$$

于是节点电压的一般表达式为 
$$v[n] = C_1(2 + \sqrt{3})^n + C_2(2 - \sqrt{3})^n$$

根据初始条件, 有 
$$\begin{cases} v[0] = C_1 + C_2 = Ry(t) \\ v[1] = C_1(2 + \sqrt{3}) + C_2(2 - \sqrt{3}) = 3Ry(t) \end{cases}$$

所以 
$$C_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} Ry(t) \quad C_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} Ry(t)$$

从而有 
$$v[n] = \frac{1}{6} [(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^n + (3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^n] Ry(t)$$

显然, 当  $n = 100$  时, 有  $v[100] = x(t)$ , 于是求得

$$y(t) = \frac{6}{(3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})^{100} + (3 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})^{100}} \cdot \frac{x(t)}{R}$$

这是差分方程在连续时间网络中的一种应用。

下面再来讨论特解的求解方法。首先将激励序列  $x[n]$  代入方程式右端 (称为自由项), 通过观察自由项的形式来选择含有待定系数的特解形式; 将此特解代入原非齐次差分方程后, 通过与方程右端的自由项比较, 求得特解中的待定系数。一般来说, 已知自由项的形式, 则特解形式可按表 8.2-1 确定。

表 8.2-1 自由项与特解的对应形式

| 自由项                            | 特解形式                                                         | 自由项                                  | 特解形式                                                |
|--------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $C$ (常数)                       | $B$ (常数)                                                     | $e^{j\omega n}$                      | $Ae^{j\omega n}$ ( $A$ 为复数)                         |
| $n$                            | $C_0 + C_1 n$                                                | $\sin \omega n$ (或 $\cos \omega n$ ) | $C_1 \sin \omega n + C_2 \cos \omega n$             |
| $n^k$                          | $C_0 + C_1 n + C_2 n^2 + \cdots + C_{k-1} n^{k-1} + C_k n^k$ | $\alpha^n$                           | $C\alpha^n$ ( $\alpha$ 不是方程的特征根)                    |
| $e^{\alpha n}$ ( $\alpha$ 为实数) | $Ce^{\alpha n}$                                              | $\alpha^n$                           | $C \cdot n^r \alpha^n$<br>( $\alpha$ 是方程的 $r$ 重特征根) |

下面举例说明非齐次线性差分方程的求解, 其中包含求解齐次解和特解, 最后得到完全解 (完全响应)。

**例 8.2-4** 求差分方程  $y[n] - 2y[n-1] - 3y[n-2] = x[n]$  的完全解。其中激励信号为  $x[n] = n^2 u[n]$ , 且边界条件为  $y[-1] = -1$ ,  $y[-2] = 0$ 。

**解:** (1) 求齐次解:

特征方程 
$$\alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0$$

特征根 
$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_2 = -1$$

齐次解 
$$y_h[n] = C_1 3^n + C_2 (-1)^n$$

(2) 求特解:

将  $x[n] = n^2 u[n]$  代入差分方程的右端, 得自由项为  $n^2 u[n]$ 。可假设特解为

$$y_p[n] = D_0 n^2 + D_1 n + D_2, \quad n \geq 0$$



代入原方程并比较两端系数得到

$$D_0 = -1/4, \quad D_1 = -1, \quad D_2 = -9/8$$

所以特解为

$$y_p[n] = -\frac{1}{4}n^2 - n - \frac{9}{8}$$

完全解为

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = C_1 3^n + C_2 (-1)^n - \frac{1}{4}n^2 - n - \frac{9}{8} \quad (8.2.11)$$

(3) 将边界条件  $y[-1] = -1$ ,  $y[-2] = 0$  代入差分方程, 经过迭代, 可得到  $y[0] = -2$ ,  $y[1] = -6$ , 那么方程的解应满足式 (8.2.11), 从而解得  $C_1 = -9/8$ ,  $C_2 = 1/4$ 。

所以完全解为

$$y[n] = -\frac{9}{8} \times 3^n + \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{1}{4}n^2 - n - \frac{9}{8}, \quad n \geq 0$$

从上例可以看出, 线性常系数差分方程特解的求解类似于求解微分方程的特解。主要着眼点是自由项的具体形式及其和特征根的关系。

最后需要说明的是, 齐次解中的待定系数应该由  $N$  阶差分方程的  $N$  个边界条件, 例如  $y[0]$ ,  $y[1]$ ,  $\dots$ ,  $y[N-1]$  确定, 也就是将这些条件, 代入完全解的表达式中, 从而构成一组联立方程, 求得  $N$  个系数  $C_1, C_2, \dots, C_N$ 。

比较上述差分方程与微分方程的求解可以看出, 差分方程和微分方程之间存在着很多相似之处。微分方程的齐次解一般具有  $e^{\alpha_m t}$  的形式, 而差分方程的齐次解一般具有  $\alpha_m^n$  的形式。它们的特解都与各自的自由项的形式相同, 而且齐次解中的待定系数也都是将边界条件代入完全解中求解得到的。

## 8.2.2 线性常系数差分方程的零输入响应与零状态响应求解

在对连续系统的讨论中, 系统的响应可以分解为自由响应分量和强迫响应分量; 也可以分解为零输入响应分量和零状态响应分量。同理, 离散系统也有类似的分解方法。上一节中求得的齐次解就是自由响应分量, 而特解就是强迫响应分量。即

$$\text{齐次解} = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n = \text{自由响应} \quad (8.2-12)$$

$$\text{特解} = y_p[n] = \text{强迫响应} \quad (8.2-13)$$

$$\text{完全解} = \sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n + y_p[n] = \text{完全响应} \quad (8.2-14)$$

另一方面, 完全响应  $y[n]$  还可以分解为零输入响应分量和零状态响应分量。

**零输入响应:** 若系统的激励序列  $x[n] = 0$ , 仅由系统的起始状态  $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$  引起的响应, 称为离散系统的零输入响应, 常用  $y_{zi}[n]$  表示。

**零状态响应:** 系统的零状态是指  $y[-1] = y[-2] = \dots = y[-N] = 0$ , 此时若激励序列  $x[n]$  在  $n = 0$  时接入系统 (即因果序列输入), 则在此条件下, 由激励序列  $x[n]$  所产生的响应, 称为离散系统的零状态响应, 常用  $y_{zs}[n]$  表示。

这样, 完全响应就是零输入响应与零状态响应之和, 即

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] \quad (8.2-15)$$

在零输入条件下, 差分方程式 (8.2-1) 等号右端等于零, 化为齐次方程。若其特征根均为单根, 则其零输入响应为

$$y_{zi}[n] = \sum_{k=1}^N C_{zik} \alpha_k^n \quad (8.2-16)$$

式中,  $C_{zik}$  均为待定系数, 由起始状态  $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$  来确定。

若系统的起始状态为零, 这时差分方程式(8.2-1)仍是非齐次方程, 假设其特征根均为单根, 则其零状态响应为

$$y_{zs}[n] = \sum_{k=1}^N C_{zsk} \alpha_k^n + y_p[n] \quad (8.2-17)$$

式中,  $C_{zsk}$  均为待定系数, 它们由系统的初始条件  $y[0], y[1], \dots, y[N-1]$  确定。而这些初始条件则由起始状态  $y[-1] = y[-2] = \dots = y[-N] = 0$  和输入序列  $x[n]$  通过差分方程式(8.2-1)来确定。

系统的全响应可分解为自由响应和强迫响应, 也可分解为零输入响应和零状态响应, 它们之间的关系为

$$y[n] = \underbrace{\sum_{k=1}^N C_{zik} \alpha_k^n}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N C_{zsk} \alpha_k^n}_{\text{零状态响应}} + \underbrace{\sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n}_{\text{自由响应}} + \underbrace{y_p[n]}_{\text{强迫响应}} \quad (8.2-18)$$

$$\sum_{k=1}^N C_k \alpha_k^n = \sum_{k=1}^N C_{zik} \alpha_k^n + \sum_{k=1}^N C_{zsk} \alpha_k^n \quad (8.2-19)$$

可见, 零输入响应  $y_{zi}[n]$  是自由响应的一部分, 其形式与自由响应完全相同, 但两者的系数并不相同。而零状态响应  $y_{zs}[n]$  包含了自由响应中余下的另一部分及强迫响应。

**例 8.2-5** 已知某系统的差分方程为

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \frac{1}{3}u[n]$$

试分别求当起始条件为下列情况时系统的完全响应。(1)  $y[-1] = 0$ , (2)  $y[-1] = 1$ 。

**解:** 本例中的方程为一阶差分方程, 只需给出一个边界条件。由于两种情形下的起始条件不同, 注意求解时的差别。

$$\text{齐次解为} \quad y_h[n] = C \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

当  $n \geq 0$  时, 方程右端自由项为常数  $1/3$ , 故可假设特解为  $D$ , 将其代入差分方程, 解得  $D = 2/3$ 。从而完全解为

$$y[n] = C \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{3}$$

(1) 当起始条件  $y[-1] = 0$  时, 将  $y[-1] = 0$  代入原差分方程, 得到  $y[0] = 1/3$ , 从而得到  $C = -1/3$ 。另外, 由于起始条件  $y[-1] = 0$ , 所以系统的完全响应也就是系统的零状态响应, 即

$$y[n] = y_{zs}[n] = \left[ \left( -\frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{3} \right] u[n]$$

(2) 当起始条件  $y[-1] = 1$  时, 再将  $y[-1]$  代入原差分方程, 得到  $y[0] = 5/6$ , 从而得到  $C = 1/6$ , 即  $y[n] = \left[ \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{3} \right] u[n]$ 。当  $y[-1] = 1$  时, 也可以先求系统的零状态响应, 令  $y[-1] = 0$ ,

就是问题 (1), 所以有

$$y_{zs}[n] = \left[ \left( -\frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{3} \right] u[n]$$

而零输入响应为

$$y_{zi}[n] = C_{zi} \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

将  $y[-1] = 1$  代入上式, 求得系数  $C_{zi} = 1/2$ , 于是有  $y_{zi}[n] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n$ 。从而完全响应为

$$y[n] = y_{zi}[n] + y_{zs}[n] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n + \left( -\frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{2}{3} \quad n \geq 0$$

需要注意的是, 零输入响应中的待定系数只能由起始条件  $y[-1], y[-2], \dots$  确定, 而不能由初始条件  $y[0], y[1], \dots$  直接确定。例如, 例 8.2-5 中若已知  $y[0] = 5/6$ , 则必须由差分方程迭代出  $y[-1] = 1$  来确定零输入响应的系数。这是因为  $y[0]$  是由起始条件  $y[-1]$  和激励信号  $x[n]$  共同作用的结果。同理, 零状态响应中的待定系数则必须由系统的初始条件  $y[0], y[1], \dots$  确定, 而不能直接依据起始条件  $y[-1] = y[-2] = \dots = 0$  确定。

### 8.2.3 线性常系数差分方程的 $z$ 变换法求解

在 7.4 节中已经看到用  $z$  变换可以很方便地求解差分方程, 见例 7.4-2。与拉氏变换求解微分方程类似,  $z$  变换也是求解线性常系数差分方程的强有力的数学工具。应用  $z$  变换的时移及线性特性, 将差分方程转化为代数方程, 从而简化求解过程。由于一般的激励和响应都是有始序列, 所以应用  $z$  变换法求解差分方程一般是指单边  $z$  变换。

设某离散系统的差分方程(8.2-2)的输入信号为  $x[n] = x[n]u[n]$ , 起始状态为  $y[-N], y[-N+1], \dots, y[-2], y[-1]$ , 对方程(8.2-2)两边做单边  $z$  变换, 得代数方程

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \left[ Y(z) + \sum_{l=-k}^{-1} y[l] z^{-l} \right] = \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} X(z) \quad (8.2-20)$$

$$\text{即} \quad \left( \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right) Y(z) = \left( \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \right) X(z) - \left\{ \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \left( \sum_{l=-k}^{-1} y[l] z^{-l} \right) \right\} \quad (8.2-21)$$

$$\text{从而} \quad Y(z) = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} X(z) + \frac{-\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \left( \sum_{l=-k}^{-1} y[l] z^{-l} \right)}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \quad (8.2-22)$$

式(8.2-22)中等号右边第一项含有  $X(z)$ , 必然受激励信号的影响, 又不含有差分方程的起始条件, 因而是系统的零状态响应; 而第二项中只含有起始条件, 不包含输入信号, 因而是系统的零输入响应。

**例 8.2-6** 用  $z$  变换法重解例 8.2-1 的差分方程。

**解:** 对差分方程两边取单边  $z$  变换。根据时移性质可得

$$Y(z) - 0.7[z^{-1}Y(z) + y[-1]] + 0.1[z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]] = 0$$

从而 
$$Y(z) = \frac{0.7y[-1] - 0.1z^{-1}y[-1] - 0.1y[-2]}{1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}}$$

代入起始条件  $y[-1] = -26$  和  $y[-2] = -202$ ，并进行部分分式展开，可得

$$Y(z) = \frac{2 + 2.6z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.1z^{-2}} = \frac{2z(z + 1.3)}{(z - 0.5)(z - 0.2)} = \frac{12z}{z - 0.5} + \frac{-10z}{z - 0.2}$$

求其逆变换，得到零输入响应为

$$y[n] = [12(0.5)^n - 10(0.2)^n]u[n]$$

**例 8.2-7** 用  $z$  变换法求解差分方程  $y[n] - y[n-1] = nu[n]$ ，已知  $y[-1] = 1$ 。

**解：**对差分方程两边取单边  $z$  变换。根据时移性质可得

$$Y(z) - [z^{-1}Y(z) + y[-1]] = X(z)$$

从而

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}X(z) + \frac{y[-1]}{1 - z^{-1}}$$

代入  $X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$  和起始条件  $y[-1] = 1$ ，并进行部分分式展开，可得

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3} + \frac{z}{z-1} = \frac{z^3}{(z-1)^3} \cdot z^{-1} + \frac{z}{z-1}$$

根据表 7.3-1，可求出  $\frac{z^3}{(z-1)^3}$  的逆变换为  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}u[n]$ ，再根据时移性质和线性性质，可得

$$y[n] = \frac{n(n+1)}{2}u[n-1] + u[n] = \left[ \frac{n(n+1)}{2} + 1 \right]u[n]$$

**例 8.2-8** 用  $z$  变换法重解例 8.2-5 (2)，并确定其零输入响应和零状态响应。

**解：**对方程两边取单边  $z$  变换，得到

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{2}y[-1] = X(z)$$

所以

$$Y(z) = \underbrace{\frac{X(z)}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{Y_{zs}(z)} + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}y[-1]}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}}_{Y_{zi}(z)}$$

将  $X(z) = \frac{1}{3} \frac{z}{z-1}$  及  $y[-1] = 1$  代入上式，并进行部分分式展开，得到

$$Y(z) = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{(z-1/2)(z-1)}}_{Y_{zs}(z)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1/2}}_{Y_{zi}(z)} = \underbrace{\frac{1}{3} \left( \frac{-z}{z-1/2} + \frac{2z}{z-1} \right)}_{Y_{zs}(z)} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{z}{z-1/2}}_{Y_{zi}(z)}$$

所以

$$y[n] = \underbrace{\frac{1}{3}[2 - (1/2)^n]}_{Y_{zs}[n]}u[n] + \underbrace{(1/2)^{n+1}}_{Y_{zi}[n]}u[n]$$

可见, 与例 8.2-5(2)的结果完全一致。

由以上各例可以看出,  $z$  变换是求解差分方程的强有力的工具, 在求解系统的零状态响应和零输入响应时, 比时域解法要简洁。

## 8.3 离散系统的单位样值响应和系统函数

### 8.3.1 单位样值响应

**定义:** 离散时间系统受单位样值信号  $\delta[n]$  激励而产生的零状态响应, 称为单位样值响应(也称为单位冲激响应或单位脉冲响应), 一般以  $h[n]$  表示。 $h[n]$  在离散时间系统中的作用, 完全类似于连续系统中的由  $\delta(t)$  引起的冲激响应  $h(t)$ 。

由于  $\delta[n]$  只在  $n=0$  时取值为 1, 在  $n$  取其他值时都为零, 因而利用迭代法可以较为方便地求出  $h[0], h[1], \dots, h[n]$ 。

**例 8.3-1** 已知离散时间系统的差分方程为  $y[n] - \frac{1}{3}y[n-1] = x[n]$ , 试求其单位样值响应  $h[n]$ 。

**解:** 因为单位样值响应属于零状态响应, 故起始状态为零, 即  $h[-1] = y[-1] = 0$ , 而  $x[n] = \delta[n]$ , 将此条件代入差分方程可得

$$h[0] = \frac{1}{3}h[-1] + \delta[0] = 0 + 1 = 1$$

依次代入求得

$$h[1] = \frac{1}{3}h[0] + \delta[1] = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

$$h[2] = \frac{1}{3}h[1] + \delta[2] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 0 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$\vdots$

$$h[n] = \frac{1}{3}h[n-1] + \delta[n] = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

因此, 系统的单位样值响应为 
$$h[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

对于一般形式的差分方程, 用这种迭代方法求解其单位样值响应, 一般不能得到闭式解。而利用  $z$  变换法可以简洁而方便地获得系统单位样值响应的闭式解, 请看以下各例。

**例 8.3-2** 求由差分方程  $y[n] - 3y[n-1] + 3y[n-2] - y[n-3] = x[n]$  所表示的离散时间系统的单位样值响应  $h[n]$ 。

**解:** 因为求解的是单位样值响应, 即  $y[n] = h[n]$ , 则  $h[-1] = h[-2] = h[-3] = 0$ , 又  $x[n] = \delta[n]$ , 即  $X(z) = 1$ , 对方程两边求单边  $z$  变换, 得

$$(1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3})H(z) = 1$$

即 
$$H(z) = \frac{1}{1 - 3z^{-1} + 3z^{-2} - z^{-3}} = \frac{z^3}{(z-1)^3}$$

根据表 7.3-1, 得到系统的单位样值响应为

$$h[n] = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)u[n]$$

**例 8.3-3** 已知离散时间系统的差分方程为

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n] - 3x[n-1] + x[n-2]$$

试求其单位样值响应  $h[n]$ 。

**解：**对差分方程两边应用单边  $z$  变换，并应用起始条件  $h[-1] = h[-2] = 0$  和输入信号  $X(z) = 1$ ，得到

$$H(z) = \frac{1 - 3z^{-1} + z^{-2}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} = \frac{z^2 - 3z + 1}{z^2 - 5z + 6} = \frac{1}{6} + \frac{z/2}{z-2} + \frac{z/3}{z-3}$$

$$h[n] = \frac{1}{6}\delta[n] + \frac{1}{6}[(3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n)]u[n]$$

**例 8.3-4** 试利用线性时不变系统的特性，讨论离散系统对单位阶跃信号  $u[n]$  的零状态响应——单位阶跃响应  $g[n]$  与单位样值响应  $h[n]$  之间的关系。

**解：**由式(7.1-22)第一个等号，知  $u[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n-m]$ ，利用线性时不变系统的时不变特性和叠加性，有

$$g[n] = \sum_{m=0}^{\infty} h[n-m] \quad (8.3-1)$$

另一方面，根据式(7.1-23)，得  $\delta[n] = \nabla u[n] = u[n] - u[n-1]$ ，从而有

$$h[n] = \nabla g[n] = g[n] - g[n-1] \quad (8.3-2)$$

对任意信号  $x[n]$ ，根据式(7.1-21)，即  $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta[n-m]$ ，利用线性时不变系统的时不变特性、叠加性和均匀性，得到系统的零状态响应为

$$y_{zs}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m] = x[n] * h[n] \quad (8.3-3)$$

即系统在任意激励信号下的零状态响应是激励信号和其单位样值响应的卷积和。

$h[n]$  反映了离散系统的一些重要特性，如因果性、稳定性等。

**因果离散系统：**输出不超前于输入的离散系统。即任一时刻的输出  $y[n]$  仅取决于此时及此时刻以前的输入  $x[n], x[n-1], x[n-2], \dots$ 。

离散线性时不变系统是因果系统的充分必要条件为

$$h[n] = 0 \quad n < 0 \quad (8.3-4)$$

也就是

$$h[n] = 0 \quad n < 0 \quad (8.3-5)$$

**稳定离散系统：**只要激励是有界的，则响应必定是有界的系统。稳定系统的充分必要条件是系统的单位样值响应绝对可和。即

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (8.3-6)$$

既满足稳定条件又满足因果条件的线性时不变离散系统是本书研究的主要对象。

### 8.3.2 线性时不变系统的时域分析——卷积和

式(8.3-3)说明, 对于线性时不变离散时间系统, 其零状态响应是激励信号和其单位样值响应的卷积和。这一特点类似于连续时间系统零状态响应的意义, 而且其计算方法也类似于卷积积分的四个步骤, 即包括反褶、时移、相乘、求和, 这种计算方法, 我们已经在 7.1.4 节离散信号计算一节中详细分析过。当然也可以用变换域方法实现。

**例 8.3-5** 假设  $x[n]=u[n]$ ,  $y[n]=a^n u[n]$  ( $0 < a < 1$ ), 试求  $s[n]=x[n]*y[n]$ 。

**解:** 利用  $z$  变换的卷积定理求解。

$$X(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1; \quad Y(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$S(z) = X(z)Y(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z}{z-a} \quad |z| > \max(1, |a|)$$

由于  $0 < a < 1$ , 所以收敛域为  $|z| > 1$ , 即

$$S(z) = \frac{1}{1-a} \left[ \frac{z}{z-1} - \frac{az}{z-a} \right] \quad |z| > 1$$

所以

$$s[n] = \frac{1}{1-a} [1 - a^{n+1}] u[n]$$

利用  $z$  变换的卷积定理的例子在 7.4 节已介绍很多, 请读者自己复习阅读。

与卷积积分类似, 卷积和也有一些有用的性质, 分别说明如下:

$$\text{交换律} \quad x[n]*y[n] = y[n]*x[n] \quad (8.3-7)$$

$$\text{结合律} \quad [x[n]*y[n]]*z[n] = x[n]*[y[n]*z[n]] \quad (8.3-8)$$

$$\text{分配律} \quad [x[n]+y[n]]*z[n] = x[n]*z[n]+y[n]*z[n] \quad (8.3-9)$$

**移位性质及其他性质:**

假设  $s[n]=x[n]*y[n]$ , 则有

$$s[n-n_1-n_2] = x[n-n_1]*y[n-n_2] = x[n]*y[n-n_1-n_2] \quad (8.3-10)$$

$$\nabla s[n] = \nabla x[n]*y[n] = x[n]*\nabla y[n] \quad (8.3-11)$$

$$s[n] = \nabla x[n]*\left[\sum_{i=-\infty}^n y[i]\right] \quad (8.3-12)$$

$$x[n]*\delta[n] = x[n] \quad (8.3-13)$$

$$x[n]*\delta[n-n_0] = x[n-n_0] \quad (8.3-14)$$

$$x[n]*u[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] \quad (8.3-15)$$

以上性质, 请读者自行证明, 此处从略。需要说明的是, 与卷积积分在连续系统中的分析相似, 卷积和的结合律式(8.3-8)和分配律式(8.3-9)可以用于级联和并联系统的分析。

### 8.3.3 系统函数

若描述线性时不变离散系统的差分方程为

$$\sum_{m=0}^N a_m y[n-m] = \sum_{r=0}^M b_r x[n-r] \quad (8.3-16)$$

并假设激励  $x[n]$  是因果信号，且系统处于零状态，这样对上式取单边  $z$  变换可得

$$Y(z) \sum_{m=0}^N a_m z^{-m} = X(z) \sum_{r=0}^M b_r z^{-r}$$

于是，令

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{\sum_{m=0}^N a_m z^{-m}} \quad (8.3-17)$$

或

$$Y(z) = H(z)X(z) \quad (8.3-18)$$

式中， $H(z)$  被称为离散系统的系统函数或传输函数，它由系统特性所决定。从式(8.3-17)看出，它是离散系统的零状态响应的  $z$  变换与激励信号  $z$  变换之比值。而根据  $z$  变换的时域卷积定理，式(8.3-18)在时域的表达形式可写为： $y[n] = x[n] * h[n]$ ，根据卷积和的物理意义， $h[n]$  就是系统的单位样值响应。这说明，离散系统的系统函数  $H(z)$  和其单位样值响应  $h[n]$  正好是一对  $z$  变换与反变换的关系，两者分别从变换域和时域表述了离散系统的性能和特点。

将式(8.3-17)的分子与分母因式分解，可写成

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_r)}{\prod_{m=1}^N (z - p_m)} \quad (8.3-19)$$

式中， $z_r$  是  $H(z)$  的零点， $p_m$  是  $H(z)$  的极点，它们的位置确定了离散系统所具有的性质。

### 8.3.4 离散系统的零极点分布与时域响应特性的关系

系统函数  $H(z)$  是单位样值响应  $h[n]$  的  $z$  变换，而由式(8.3-19)，如果不考虑常数  $H_0$ ，系统函数又可以表示为不同分布的零、极点 (zero and pole) 因子的组合，即可以用系统的极点  $p_m$  和零点  $z_r$  分布确定系统函数  $H(z)$ ；也就是说，根据极点  $p_m$  和零点  $z_r$  的分布就可以确定系统的单位样值响应的波形特点。

如果一个因果离散系统，它的系统函数  $H(z)$  如式(8.3-19)所示，则  $H(z)$  可展开为部分分式（假设所有极点均是一阶极点），即  $H(z) = \sum_{m=0}^N \frac{A_m z}{z - p_m}$ ，则其逆变换（系统的单位样值响应）为

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)] = \mathcal{Z}^{-1} \left[ \sum_{m=0}^N \frac{A_m z}{z - p_m} \right]$$

式中， $p_0 = 0$ 。这样



$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1} \left[ A_0 + \sum_{m=1}^N \frac{A_m z}{z - p_m} \right] = A_0 \delta[n] + \sum_{m=1}^N A_m (p_m)^n u[n]$$

这里,  $p_m$  可能是实数, 也可能是成对出现的共轭复数。也就是说, 单位样值响应  $h[n]$  的波形变化性质取决于  $H(z)$  的极点, 而其幅度值由系数  $A_m$  决定, 但  $A_m$  与  $H(z)$  的零点分布有关。类似于  $s$  域中系统函数  $H(s)$  的零极点对冲激响应  $h(t)$  波形的影响,  $H(z)$  的极点决定  $h[n]$  的波形特征, 而零点只影响  $h[n]$  的幅度和相位。

系统函数  $H(z)$  的极点处于  $z$  平面的不同位置将对应  $h[n]$  的不同函数形式, 如图 8.3-1 所示。

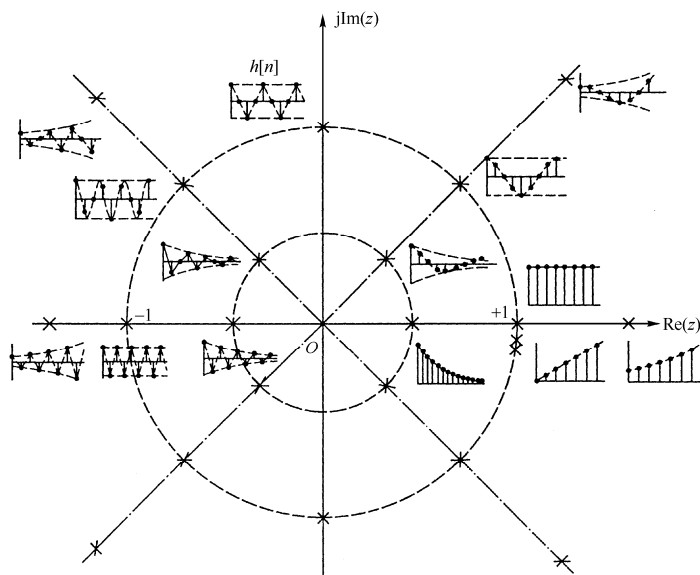


图 8.3-1  $H(z)$  的极点位置与  $h[n]$  波形的关系

当  $p_m$  为实数时 (设  $p_m$  为单极点)

$$(1) \begin{cases} p_m < 1 & h[n] \text{ 递减} \\ p_m = 1 & h[n] \text{ 恒定} \\ p_m > 1 & h[n] \text{ 递增} \end{cases} \quad \text{当 } p_m > 0, h[n] \text{ 恒为正值, 且}$$

(2)  $p_m < 0$ ,  $h[n]$  正负交替变化,  $|h[n]|$  的变化趋势与  $p_m > 0$  时的情况相同。

当  $p_m$  为复数时, 一对共轭复数极点对应于  $h[n]$  的一项振幅按  $|p_m|^n$  规律变化的正弦序列分量。例如, 共轭复数极点  $p_{1,2} = \rho e^{\pm j\phi}$ , 相应的单位样值响应为

$$p_1^n + p_2^n = \rho^n (e^{jn\phi} + e^{-jn\phi}) = 2\rho^n \cos(n\phi)$$

另外, 如果极点  $p_m$  是高级极点, 则当  $|p_m| < 1$  的时候, 冲激响应  $h[n]$  是一个总体衰减的序列, 而当  $|p_m| \geq 1$  时, 冲激响应  $h[n]$  是一个总体增长的序列。

### 8.3.5 系统函数和系统的因果性与稳定性

在 8.3.1 节中已经说明, 对于因果系统, 其单位样值响应为因果序列, 即  $h[n] = 0, n < 0$ , 所以其系统函数  $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n}$  的收敛域必为  $|z| > R_+$ , 且  $R_+$  为  $H(z)$  的所有极点中离原点最远的那个极点的模; 对于稳定系统, 其单位样值响应绝对可和, 即  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ 。

因为

$$H(z) = \mathcal{Z}[h[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

根据一致收敛条件, 当  $z=1$  时

$$H(z)|_{z=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \quad (8.3-20)$$

式(8.3-20)说明, 稳定系统的系统函数  $H(z)$  的收敛域应包含单位圆。这是  $z$  域系统稳定的充要条件。下面再按照单位样值响应  $h[n]$  的不同形式来讨论稳定系统  $H(z)$  的极点分布。

(1) 若  $h[n]$  是因果序列 (即因果系统), 则  $H(z)$  的收敛域为圆外部分, 即  $|z| > R_+$ , 由于收敛域要包含单位圆, 则必有

$$R_+ < 1 \quad (8.3-21)$$

也就是说,  $H(z)$  的全部极点必落在单位圆之内, 如图 8.3-2(a) 所示。

(2) 若  $h[n]$  是终止于  $n=-1$  的左边序列, 则  $H(z)$  的收敛域为圆内部分, 即  $|z| < R_-$ , 同样, 由于收敛域要包含单位圆, 则必有

$$R_- > 1 \quad (8.3-22)$$

也就是说,  $H(z)$  的全部极点必落在单位圆之外, 如图 8.3-2(b) 所示。

(3) 若  $h[n]$  是双边序列, 则  $H(z)$  的收敛域为圆环部分, 即  $R_+ < |z| < R_-$ , 根据稳定系统的收敛域要包含单位圆, 则必有

$$R_+ < 1 \text{ 和 } R_- > 1 \quad (8.3-23)$$

这时  $H(z)$  的一部分极点在单位圆之内, 而另一部分极点则在单位圆之外, 但收敛域一定包含单位圆, 如图 8.3-2(c) 所示。

总之, 不管是因果系统, 还是非因果系统, 其系统稳定的充要条件是  $H(z)$  的收敛域应包含单位圆。

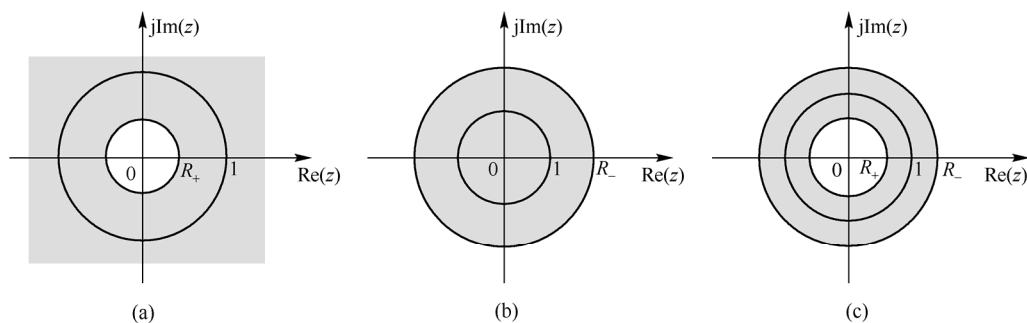


图 8.3-2 稳定系统的收敛域

**例 8.3-6** 检验下列各系统的因果性与稳定性。

$$(1) H(z) = \frac{z}{z-0.5} \quad |z| > 0.5$$

$$(2) H(z) = \frac{z}{z-2} \quad |z| > 2$$

$$(3) H(z) = \frac{z}{z-2} \quad |z| < 2$$

$$(4) H(z) = \frac{z}{(z-0.5)(z-2)} \quad 0.5 < |z| < 2$$

**解:** (1) 由于收敛域为  $|z| > 0.5$ , 所以该系统为因果系统。又因为极点  $p = 0.5$  在单位圆内, 所以该系统是稳定的。

(2) 由于收敛域为  $|z| > 2$ , 所以该系统是因果系统。但此时极点  $p = 2$  在单位圆外, 所以该系统是不稳定的。

(3) 由于收敛域为  $|z| < 2$ , 它对应的  $h[n]$  为终止于  $n = -1$  的左边序列, 所以该系统是非因果系统。由于极点  $p = 2$  在单位圆外, 故该系统是稳定的。

(4) 由于收敛域为  $0.5 < |z| < 2$ , 它对应的  $h[n]$  为双边序列, 因此该系统为非因果系统。由于收敛域包含单位圆, 因此该系统是稳定的。

这里, 同时说明了系统的因果性与系统函数的收敛域的关系, 即: 如果系统函数的收敛域为  $|z| > R_+$ , 则系统为因果系统, 否则系统为非因果系统。

**例 8.3-7** 求下列差分方程所描述的离散系统的系统函数和单位样值响应。

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n]$$

**解:** 将差分方程两边取单边  $z$  变换 (注意: 求系统函数时考虑系统为零状态), 可得

$$(1 - az^{-1})Y(z) = bX(z)$$

所以 
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{1 - az^{-1}} = \frac{bz}{z - a}$$

这样, 如果上式的收敛域为  $|z| > |a|$ , 则  $h[n] = ba^n u[n]$  (因果系统)。如果上式的收敛域为  $|z| < |a|$ , 则  $h[n] = -ba^n u[-n-1]$  (非因果系统)。

**例 8.3-8** 已知因果离散系统的差分方程为

$$y[n] - 0.7y[n-1] + 0.12y[n-2] = 2x[n] - 3x[n-1]$$

若输入  $x[n] = (0.2)^n u[n]$ , 试求系统的零状态响应  $y_{zs}[n]$ 。

**解:** 由差分方程可求出系统函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2 - 3z^{-1}}{1 - 0.7z^{-1} + 0.12z^{-2}} = \frac{2z(z - 3/2)}{(z - 0.3)(z - 0.4)} \quad |z| > 0.4$$

这是因为系统是因果系统, 所以其系统函数的收敛域为收敛圆的外部。

输入序列  $x[n]$  的  $z$  变换为 
$$X(z) = \mathcal{Z}[x[n]] = \mathcal{Z}[(0.2)^n u[n]] = \frac{z}{z - 0.2} \quad |z| > 0.2$$

由式(8.3-17)得系统零状态响应的  $z$  变换为

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{2z(z - 3/2)}{(z - 0.3)(z - 0.4)} \cdot \frac{z}{z - 0.2} = \frac{72z}{(z - 0.3)(z - 0.4)} + \frac{-44z}{z - 0.4} + \frac{-26z}{z - 0.2} \quad |z| > 0.4$$

取其逆变换, 得出系统的零状态响应

$$y_{zs}[n] = \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)] = [72(0.3)^n - 44(0.4)^n - 26(0.2)^n] u[n]$$

**例 8.3-9** 求下列差分方程表示的离散因果系统的系统函数  $H(z)$ , 并注明收敛域, 说明它是否稳定。

$$y[n] + 0.2y[n-1] - 0.24y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

**解:** 对给定的差分方程取  $z$  变换

$$Y(z) + 0.2z^{-1}Y(z) - 0.24z^{-2}Y(z) = X(z) - z^{-1}X(z)$$

所以系统函数为

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.2z^{-1} - 0.24z^{-2}} = \frac{z(z-1)}{(z-0.4)(z+0.6)}$$

其极点为  $p_1=0.4$  与  $p_2=-0.6$ ，由于系统是因果系统，故其收敛域是半径为 0.6 的圆的外部区域，即  $|z| > 0.6$ 。又因为两极点均在单位圆之内（如图 8.3-3 所示），故系统是稳定系统。

如果此系统为非因果系统，则其收敛域为  $0.4 < |z| < 0.6$  或  $|z| < 0.4$ ，不包括单位圆，从而系统不稳定。

在实际问题中，遇到的通常都是因果系统，因而判定其是否稳定只需判断其极点是否都落在单位圆内（即系统函数分母多项式的根  $|p_m| < 1$ ），这可由朱里准则（Jury criterion）（可参考相关书籍）来判断。

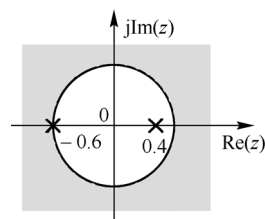


图 8.3-3 例 8.3-9 系统函数的极点及收敛域

## 8.4 离散系统的频响特性

### 8.4.1 频响特性的定义

在连续时间系统中，系统的频率响应特性  $H(j\Omega)$  反映了系统在正弦激励下的稳态响应随频率变化的情况。与此相似，在离散系统中，也要研究在正弦序列激励下的稳态响应随激励信号的频率变化的关系，即离散系统的频率响应。由于正弦序列或余弦序列是复指数序列的虚部或实部，为了简化运算，可以考虑在复指数序列  $\dot{A}e^{jn\Omega T}$  激励下的稳态响应。

假设一个稳定的离散系统，其单位样值响应为  $h[n]$ ，系统函数为  $H(z)$ ，输入为复指数序列  $x[n] = \dot{A}e^{jn\Omega T}$ ，式中， $\dot{A} = Ae^{j\phi}$  是复向量， $A$  为幅度， $\phi$  为初相角， $T$  为取样间隔。则系统的零状态响应为

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] * h[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\dot{A}e^{j(n-m)\Omega T} \\ &= \dot{A}e^{jn\Omega T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-jm\Omega T} \end{aligned} \quad (8.4-1)$$

因为系统是稳定的，所以  $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |h[m]| < \infty$ ，因而  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-jm\Omega T} < \infty$ 。从而上式可以写成

$$y[n] = \dot{A}e^{jn\Omega T} H(e^{j\Omega T}) = H(e^{j\Omega T})x[n] \quad (8.4-2)$$

$$\text{式中} \quad H(e^{j\Omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-jn\Omega T} = H(z)|_{z=e^{j\Omega T}} \quad (8.4-3)$$

由于激励信号  $\dot{A}e^{jn\Omega T}$  是复指数振荡序列，所以式(8.4-2)表明：输出序列  $y[n]$  就是系统的稳态响应，而且离散系统对复指数序列（或正弦序列）的稳态响应仍是同频率的复指数序列（或正弦序列），但要乘以系数  $H(e^{j\Omega T})$ 。式(8.4-3)说明，系数  $H(e^{j\Omega T})$  就是系统单位样值响应  $h[n]$  的傅里叶变换，是  $\Omega$  的连续函数，它反映了离散系统在正弦序列激励下的稳态响应随激励信号的频率变化的情况，又称为离散系统的频响特性。由式(8.4-3)可知，对于稳定系统，只要把系统函数  $H(z)$  中的复变量  $z$  换成  $e^{j\Omega T}$ ，即得离散系统的频响特性  $H(e^{j\Omega T})$ 。由于  $\omega$ （数字频率）

$= \Omega T$ , 所以, 频响特性也可更简洁地表示成  $H(e^{j\omega})$  (在以后的讨论中, 我们采用  $H(e^{j\omega})$  的形式), 这样

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = H(z)|_{z=e^{j\omega}} \quad (8.4-4)$$

一般情况下,  $H(e^{j\omega})$  是复数, 它可以表示成

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)} \quad (8.4-5)$$

式中,  $|H(e^{j\omega})|$  称为幅频特性或幅度响应 (magnitude response),  $\varphi(\omega)$  称为相频特性或相位响应 (phase response)。

实际上, 将式(8.4-5)与式(7.5-2) (只要将式(7.5-2)中的  $x[n]$  换成  $h[n]$ , 将  $X(e^{j\omega})$  换成  $H(e^{j\omega})$ ) 比较可知, 离散系统的频响特性  $H(e^{j\omega})$  就是单位样值响应  $h[n]$  的傅里叶变换, 即  $h[n]$  与  $H(e^{j\omega})$  之间是一对傅氏变换, 因而频响特性  $H(e^{j\omega})$  也是周期为  $2\pi$  的连续周期函数。频率响应的周期性是离散系统有别于连续系统的一个突出特点。

另外, 与连续系统的频响特性相似, 幅频特性  $|H(e^{j\omega})|$  是频率  $\omega$  的偶函数, 相频特性  $\varphi(\omega)$  是频率  $\omega$  的奇函数。

应该指出, 与连续系统的滤波特性一样, 离散系统 (数字滤波器) 按其频响特性也有低通、高通、带通、带阻和全通之分。由于频响特性  $H(e^{j\omega})$  的周期性, 因此, 这些特性只限于在  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  范围内区分, 如图 8.4-1 所示 (图中画出的均是理想滤波特性)。

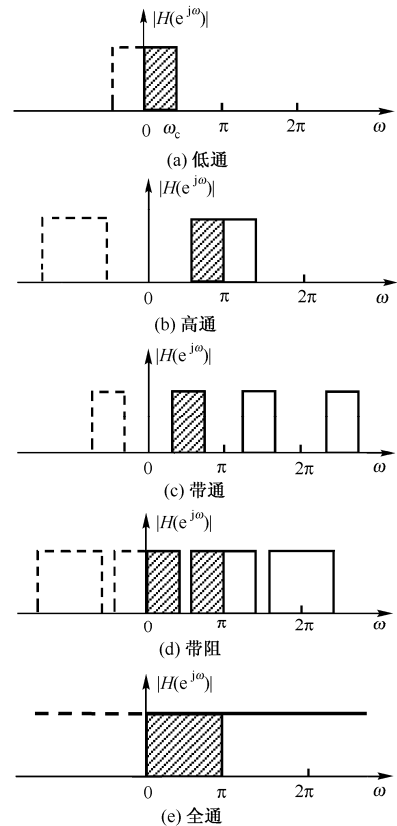


图 8.4-1 离散系统的各种频响特性

## 8.4.2 频响特性的矢量几何作图法

与连续系统的频响特性的确定方法类似, 也可以通过几何方法 (geometric method), 利用系统函数  $H(z)$  在  $z$  平面上的零极点分布, 简便而直观地描述离散系统的频响特性。

若已知

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^M (z - z_r)}{\prod_{m=1}^N (z - p_m)}$$

则

$$H(e^{j\omega}) = H_0 \frac{\prod_{r=1}^M (e^{j\omega} - z_r)}{\prod_{m=1}^N (e^{j\omega} - p_m)} = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$$

令

$$e^{j\omega} - z_r = A_r e^{j\psi_r}, \quad e^{j\omega} - p_m = B_m e^{j\theta_m}$$

于是幅频特性

$$|H(e^{j\omega})| = H_0 \frac{\prod_{r=1}^M A_r}{\prod_{m=1}^N B_m} \quad (8.4-6)$$

相频特性

$$\varphi(\omega) = \sum_{r=1}^M \psi_r - \sum_{m=1}^N \theta_m \quad (8.4-7)$$

式中  $A_r, \psi_r$  分别表示  $z$  平面上零点  $z_r$  到单位圆上点  $e^{j\omega}$  的矢量 ( $e^{j\omega} - z_r$ ) 的模与辐角;  $B_m, \theta_m$  表示极点  $p_m$  到  $e^{j\omega}$  的矢量 ( $e^{j\omega} - p_m$ ) 的模与辐角, 如图 8.4-2 所示。

图中  $C$  点对应于  $\omega = 0$ ,  $E$  点对应于  $\omega = \pi$ 。随着单位圆上的  $D$  点不断移动, 就可以得到全部的频率响应, 而且可以看出,  $D$  点的移动是绕着单位圆周期性进行的, 因而离散系统的频响特性呈现周期性的变化特点。利用这种方法可以较方便地由  $H(z)$  的零极点位置画出该系统的频响特性。可见频响特性的形状取决于  $H(z)$  的零极点分布, 或者说, 取决于离散系统的形式及差分方程各系数的大小。

同时, 也不难看出, 位于  $z = 0$  处的零点或极点对幅频特性不产生作用, 因而在  $z = 0$  处加入或去除零点或极点, 不会使幅频特性发生变化, 但会影响相频特性。此外, 当  $e^{j\omega}$  旋转到某个极点 ( $p_m$ ) 附近时, 此时矢量  $B_m$  的长度最短, 频率响应在该点可能出现峰值。且极点  $p_m$  越靠近单位圆,  $B_m$  越短, 频率响应在峰值附近越尖锐。如果极点  $p_m$  落在单位圆上,  $B_m = 0$ , 则频率响应的峰值趋于无穷大。对于零点来说, 其作用与极点正好相反, 在这里不再赘述。

**例 8.4-1** 已知某一阶离散系统的结构框图如图 8.4-3 所示。分别求  $0 < a < 1$  和  $-1 < a < 0$  两种情况下的频率响应特性, 并画出幅频特性与相频特性曲线。

**解:** 由所给系统的结构框图可写出其差分方程为

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

其系统函数为

$$H(z) = \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a|$$

频响特性为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a} = \frac{1}{1 - a \cos \omega + ja \sin \omega}$$

幅频特性为

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a \cos \omega}}$$

相频特性为

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{a \sin \omega}{1 - a \cos \omega}\right)$$

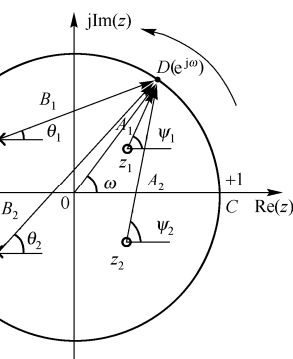


图 8.4-2 离散系统频率响应  $H(e^{j\omega})$  的几何确定法

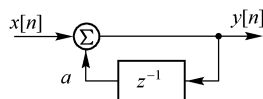


图 8.4-3 例 8.4-1 系统的框图

(1) 若  $0 < a < 1$ , 零极点分布如图 8.4-4(a)所示, 幅频特性  $|H(e^{j\omega})|$  与相频特性  $\varphi(\omega)$  曲线如图 8.4-4(b)和(c)所示。由图(b)可知, 系统呈“低通”特性。

(2) 若  $-1 < a < 0$ , 零极点分布如图 8.4-4(d)所示。同理, 可绘出幅频特性  $|H(e^{j\omega})|$  与相频特性  $\varphi(\omega)$  曲线, 如图 8.4-4(e)和(f)所示。由图(e)可知, 系统呈“高通”特性。

本例说明, 只要将系数  $a$  改变符号 (从“正”→“负”), 就可以方便地改变滤波特性 (从“低通”→“高通”)。由此可见, 离散系统比较灵活。

以上分析是先求出幅频特性与相频特性的表达式, 然后逐点描图绘出频响特性曲线。由于本例是一阶系统, 用这种方法并不复杂。但对于高阶系统, 用这种方法就很麻烦, 而采用几何作图法就比较方便。利用几何作图法描绘本例的幅频特性与相频特性曲线留给读者自行完成。

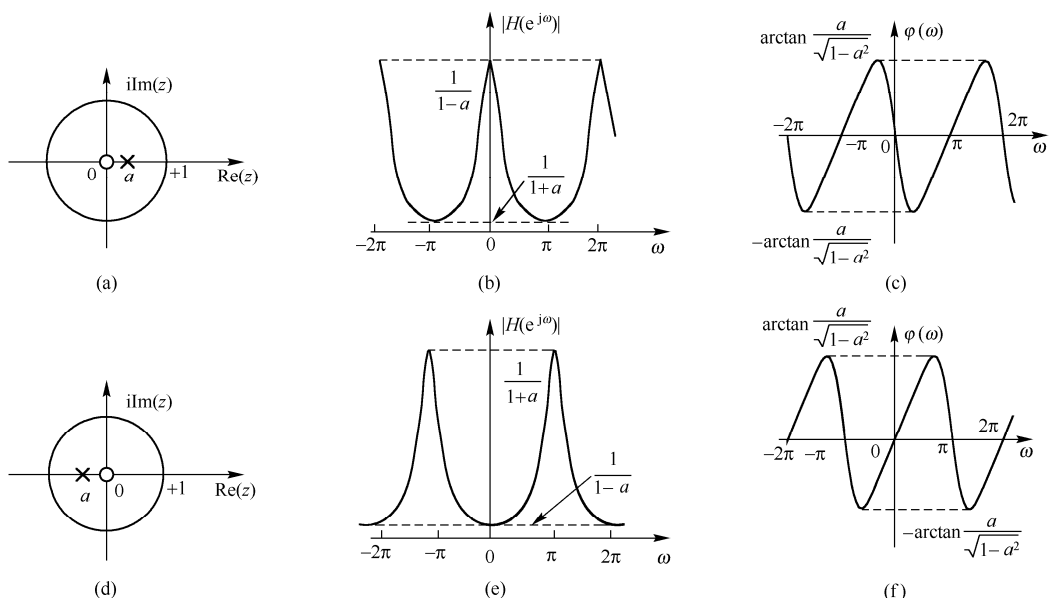


图 8.4-4 例 8.4-1 的系统频率响应特性

**例 8.4-2** 分析图 8.4-5 所示二阶离散系统的幅频特性。

**解：**由图 8.4-5 可写出该系统的差分方程为

$$y[n] - 0.9y[n-1] + 0.81y[n-2] = x[n-1]$$

其系统函数为

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}} \\
 &= \frac{z}{z^2 - 0.9z + 0.81} \\
 &= \frac{z}{(z - 0.9e^{j\pi/3})(z - 0.9e^{-j\pi/3})}
 \end{aligned}$$

$H(z)$  的零极点如图 8.4-6(a) 所示。

下面利用几何作图法来分析该系统的幅频特性。

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{(e^{j\omega} - 0.9e^{j\pi/3})(e^{j\omega} - 0.9e^{-j\pi/3})} = \frac{A_1}{B_1 B_2} e^{j[\psi_1 - (\theta_1 + \theta_2)]}$$

由于零点位于原点，因此无论  $\omega$  为何值， $A_1$  始终等于 1，这样

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{A_1}{B_1 B_2} = \frac{1}{B_1 B_2} \quad \varphi(\omega) = \psi_1 - (\theta_1 + \theta_2)$$

当  $\omega = 0$  时， $B_1 = B_2 = \sqrt{0.91}$ ，所以  $|H(e^{j\omega})|_{\omega=0} = \frac{1}{B_1 B_2} = \frac{1}{0.91} \approx 1.10$ ；当  $\omega = \frac{\pi}{3}$  时， $B_1 = 0.1$  为最小值，而  $B_2 = 1.65$ ，所以  $|H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi/3} = \frac{1}{0.165} \approx 6.06$ ，达到最大值；当  $\omega = \pi$  时， $B_1 = B_2 = \sqrt{2.71}$  为最大值， $|H(e^{j\omega})|_{\omega=\pi} = \frac{1}{2.71} \approx 0.37$  达到最小值；同理，当  $\omega = \frac{5\pi}{3}$  时， $|H(e^{j\omega})|_{\omega=5\pi/3} \approx 6.06$ 。

根据以上分析可绘出幅频特性曲线，如图 8.4-6(b) 所示。

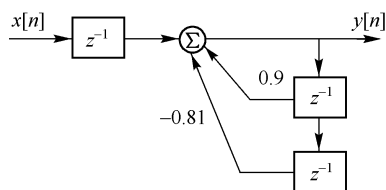


图 8.4-5 例 8.4-2 的二阶离散系统框图

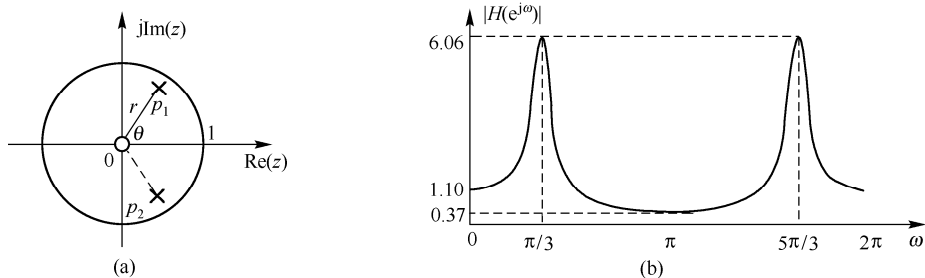


图 8.4-6 例 8.4-2 的零极点图和幅频特性

此例与 RLC 二阶连续系统相仿，具有带通特性。

**例 8.4-3** 证明图 8.4-7(a)所示系统为二阶全通离散系统。其中  $b_1, b_2$  为实数，且满足  $b_1^2 - 4b_2 < 0$ 。

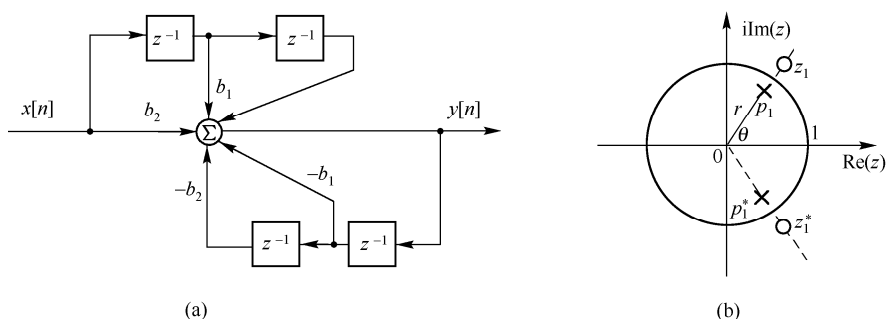


图 8.4-7 二阶全通离散系统

**证明：**图示系统的差分方程为

$$y[n] + b_1 y[n-1] + b_2 y[n-2] = b_2 x[n] + b_1 x[n-1] + x[n-2]$$

其系统函数为

$$H(z) = \frac{b_2 + b_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} = \frac{z^{-1} + b_1 + b_2 z}{b_2 z^{-1} + b_1 + z}$$

系统的频响特性为

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{z^{-1} + b_1 + b_2 z}{b_2 z^{-1} + b_1 + z} \bigg|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{-j\omega} + b_1 + b_2 e^{j\omega}}{b_2 e^{-j\omega} + b_1 + e^{j\omega}} \\ &= \frac{[b_1 + \cos \omega + b_2 \cos \omega] + j[b_2 \sin \omega - \sin \omega]}{[b_1 + \cos \omega + b_2 \cos \omega] - j[b_2 \sin \omega - \sin \omega]} \end{aligned}$$

显然

$$|H(e^{j\omega})| = 1 \quad \varphi(\omega) = 2 \arctan \left[ \frac{(b_2 - 1) \sin \omega}{b_1 + (b_2 + 1) \cos \omega} \right]$$

从而证明了该系统是全通系统。

另外，由于  $b_1, b_2$  是实系数，且  $b_1^2 - 4b_2 < 0$ ，则  $H(z)$  具有一对共轭极点与一对共轭零点，可以写成

$$H(z) = \frac{b_2(z - z_1)(z - z_1^*)}{(z - p_1)(z - p_1^*)}$$



令  $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$ ,  $p_1 = r_2 e^{j\theta_2}$ , 则可以得到

$$r_1^2 = 1/b_2, \quad r_2^2 = b_2, \quad 2b_2 r_1 \cos \theta_1 = -b_1, \quad 2r_2 \cos \theta_2 = -b_1$$

显然  $r_2 = 1/r_1 = r = \sqrt{b_2}$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ , 因此,  $H(z)$  的零极点位于  $z_1 = \frac{1}{r} e^{j\theta}$ ,  $z_1^* = \frac{1}{r} e^{-j\theta}$ ,  $p_1 = r e^{j\theta}$ ,  $p_1^* = r e^{-j\theta}$ , 如图 8.4-7(b) 所示。

不难看出, 全通系统零、极点分布的特征是: 零点与极点互为共轭倒数。而根据  $s$  平面和  $z$  平面的映射规律, 借助连续系统的全通函数的零、极点分布特点也能得到上述结论。

## 8.5 数字滤波器的原理与结构

对系统频响特性的分析表明, 信号通过系统后, 信号频谱将发生变化。因此, 从信号处理的观点来看, 系统本身就是一个滤波器。与模拟滤波器相对应, 在离散系统中广泛地应用各种数字滤波器。所谓数字滤波器就是一个离散时间系统, 它的作用是利用离散系统的频响特性对输入信号的频谱进行处理, 或者对信号进行变换, 使其转换成预期的输出信号, 从而达到改变信号频谱的目的。因此从广义上讲, 数字滤波器是具有某种“算法”的数字处理过程。

### 8.5.1 数字滤波器原理

为了说明数字滤波器的滤波作用, 以图 8.5-1 所示的模拟滤波器为例, 介绍其滤波原理。图中  $h(t)$  为模拟滤波器的冲激响应,  $x(t), y(t)$  分别为系统的激励与响应信号。在时域分析中, 响应  $y(t)$  可通过卷积积分得到, 即  $y(t) = x(t) * h(t)$ ; 在频域中表示为  $Y(j\Omega) = H(j\Omega)X(j\Omega)$ , 其中,  $X(j\Omega)$  和  $Y(j\Omega)$  分别为  $x(t)$  和  $y(t)$  的频谱,  $H(j\Omega)$  是系统的频响特性, 也就是  $h(t)$  的傅里叶变换。这说明, 在频率域, 一个输入信号的频谱  $X(j\Omega)$  经过滤波器的作用后, 被变换成  $H(j\Omega)X(j\Omega)$ 。因此, 根据不同的滤波要求来选定  $H(j\Omega)$  就可以得到不同的模拟滤波器。

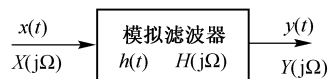


图 8.5-1 模拟滤波器

在数字滤波器中, 输入和输出都是离散时间序列, 其输出序列  $y[n]$  可以表示为输入序列  $x[n]$  与单位样值响应  $h[n]$  的卷积和, 即  $y[n] = x[n] * h[n]$ 。根据序列的傅里叶变换的卷积特性, 得

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \quad (8.5-1)$$

其中,  $X(e^{j\omega})$  和  $Y(e^{j\omega})$  分别是数字滤波器的输入序列  $x[n]$  和输出序列  $y[n]$  的傅里叶变换;  $H(e^{j\omega})$  为单位样值响应  $h[n]$  的傅里叶变换, 也就是离散系统的频响特性。

由此可见, 输入序列  $x[n]$  的频谱  $X(e^{j\omega})$  经过滤波器后变为输出序列  $y[n]$  的频谱  $Y(e^{j\omega})$ 。按照  $X(e^{j\omega})$  的特点和信号处理的目的, 选取适当的  $H(e^{j\omega})$ , 使滤波后的  $H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$  符合输出频谱的要求, 这就是数字滤波器所起的作用。

数字滤波器的典型应用如图 8.5-2 所示, 假设待处理的信号是连续信号, 为了进行数字滤波, 须对连续信号进行采样, 得到离散信号  $x[n]$ ;  $x[n]$  经数字滤波, 得到输出序列  $y[n]$ ; 再经过模拟低通滤波器, 将离散信号转变成满足要求的模拟信号, 如图 8.5-2(a) 所示。在实际应用中, 对采样后的信号还需进行量化 (quantization) 和编码 (coding) 处理, 转化成二进制数表示的数字信号, 这个过程总称为模数变换 (A/D 变换: analog-to-digital conversion);  $x[n]$  经数字滤波器加工后的输

出序列  $y[n]$ ，再经数模变换器（D/A 转换器：digital-to-analog conversion）将数码反转成模拟电压（或电流）；最后，经模拟滤波器滤除不必要的高频成分，从而得到系统输出的模拟信号  $y(t)$ ，如图 8.5-2(b)所示。

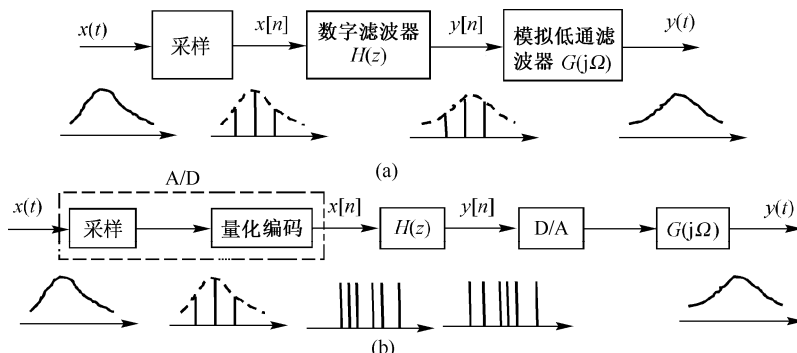


图 8.5-2 离散时间系统处理连续时间信号

下面从频域上来简单分析一下图 8.5-2(a)所示系统对信号的滤波过程。

设输入的连续信号  $x(t)$  为带限信号，其频谱  $X(j\Omega)$  限制在  $\pm\Omega_m$  之间，如图 8.5-3(a)所示；数字滤波器的频率响应为  $H(e^{j\Omega T})$ ，如图 8.5-3(b)所示；模拟低通滤波器是一个理想低通滤波器，其频率特性为

$$G(j\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0 & |\Omega| > \Omega_c \end{cases} \quad (8.5-2)$$

其中， $\Omega_m \leq \Omega_c \leq \Omega_s - \Omega_m$ ，如图 8.5-3(c)所示。

在满足采样定理的条件下，对  $x(t)$  进行采样（采样间隔为  $T_s$ ），得到序列  $x(nT_s) = x[n]$ 。这样， $x[n]$  的频谱  $X(e^{j\Omega T})$  是  $X(j\Omega)$  以  $\Omega_s = 2\pi/T_s$  为周期，周期性延拓而成的，即

$$X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - k\Omega_s)] \quad (8.5-3)$$

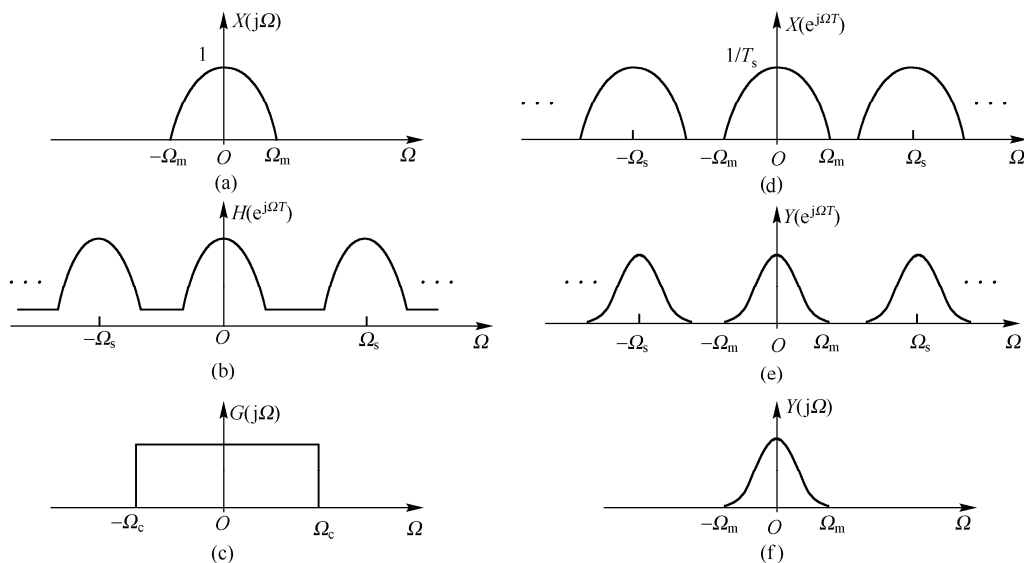


图 8.5-3 数字滤波器对信号的滤波过程

如图 8.5-3(d)所示。而  $x[n]$  经数字滤波器后, 输出  $y[n]$  的频谱为

$$Y(e^{j\Omega T}) = H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T})$$

如图 8.5-3(e)所示, 显然  $x[n]$  的频谱经过  $H(e^{j\Omega T})$  的滤波而得到了  $y[n]$  的频谱。而离散时间信号经模拟低通滤波器后, 得到连续信号的输出  $y(t)$ , 其频谱为

$$Y(j\Omega) = G(j\Omega)Y(e^{j\Omega T}) = G(j\Omega)H(e^{j\Omega T})X(e^{j\Omega T}) \quad (8.5-4)$$

如图 8.5-3(f)所示。将式(8.5-2)和式(8.5-3)代入式(8.5-4), 可得

$$Y(j\Omega) = \frac{1}{T_s} G(j\Omega)H(e^{j\Omega T}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\Omega - k\Omega_s)] = \frac{1}{T_s} H(e^{j\Omega T})X(j\Omega) \quad (8.5-5)$$

这样, 可以从  $y[n]$  的周期性频谱  $Y(e^{j\Omega T})$  中选出频谱  $Y(j\Omega)$ , 即得到连续时间信号的输出  $y(t)$ 。上面就是应用数字滤波器对连续时间信号的处理过程。

## 8.5.2 数字滤波器结构

数字滤波器是一个离散时间系统, 既可以用系统函数  $H(z)$  表示, 也可以用差分方程或单位样值响应  $h[n]$  表示, 因而数字滤波又表现为输入信号  $x[n]$  和单位样值响应  $h[n]$  的卷积和。这样, 就可以利用软件, 即编写程序在通用的计算机或微处理机上实现, 也可以用专用的数字信号处理芯片, 即由加法器、数乘器及延时器等数字器件连接而成的硬件来实现。由于目前大规模集成电路的价格不断降低, 且具有速度快和实时处理等优点, 使得用硬件实现的数字滤波器的应用更为广泛。

这里将介绍数字滤波器的基本构成形式, 给出各种结构的方框图或流图。至于数字滤波器的具体设计方法, 将在“数字信号处理”课程中介绍。

由于离散系统的系统函数  $H(z)$  的形式与连续系统的系统函数  $H(s)$  的形式相同 (仅是复变量  $z$  和  $s$  的区别), 因而若不考虑它们各自的物理含义, 其分析方法也与连续系统的分析方法相同。第 5 章已详细介绍了连续系统的直接形式、级联形式和并联形式三种结构框图 (或信号流图)。若将连续系统中的积分器  $s^{-1}$  改为离散系统的延时单元  $z^{-1}$ , 则连续系统的结构图的分析方法完全适用于离散系统 (即数字滤波器)。这里不再赘述。仅以一例说明离散时间系统的结构图的分析, 请读者认真体会。

**例 8.5-1** 已知某数字滤波器的系统函数为:  $H(z) = \frac{2z^{-2} + 4z^{-3}}{1 + 3z^{-1} + 5z^{-2} + 3z^{-3}}$ , 试分别画出该

系统的直接形式、级联形式和并联形式的结构图。

**解:** (1) 直接形式: 根据所给的  $H(z)$  的形式, 可直接画出直接形式的流图, 如图 8.5-4(a) 所示。其相应的方框图如图 8.5-4(b)所示。

(2) 级联形式: 将  $H(z)$  写成零极点因子的形式

$$H(z) = \frac{2z^{-1}(z^{-1} + 2z^{-2})}{(1 + z^{-1})(1 + 2z^{-1} + 3z^{-2})}$$

$$\text{令} \quad H_1(z) = \frac{2z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad H_2(z) = \frac{z^{-1} + 2z^{-2}}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}}$$

$$\text{则} \quad H(z) = H_1(z)H_2(z)$$

其级联形式的信号流图和方框图分别如图 8.5-5(a)和(b)所示。

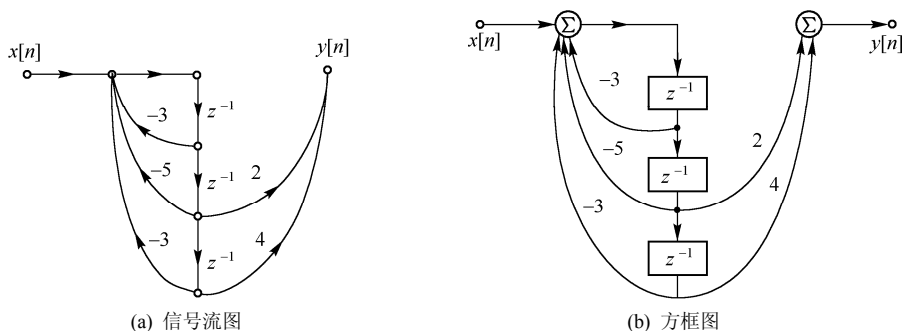


图 8.5-4 直接形式的结构图

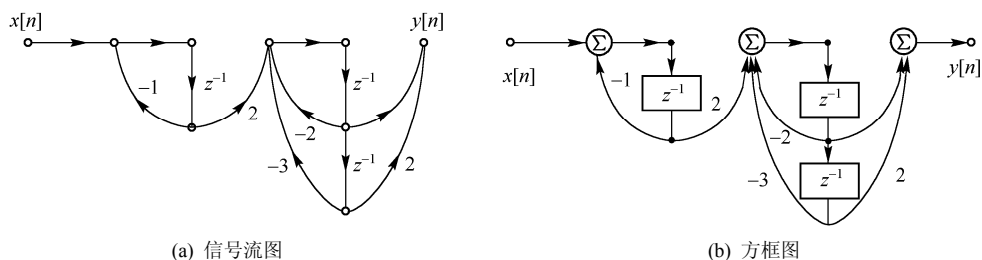


图 8.5-5 级联形式的结构图

(3) 并联形式：将  $H(z)$  展开成部分分式的形式

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{-z^{-1}+z^{-2}}{1+2z^{-1}+3z^{-2}}$$

令

$$H_1(z) = \frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}, \quad H_2(z) = \frac{-z^{-1}+z^{-2}}{1+2z^{-1}+3z^{-2}}$$

则

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

其并联形式的信号流图和方框图分别如图 8.5-6(a)和(b)所示。

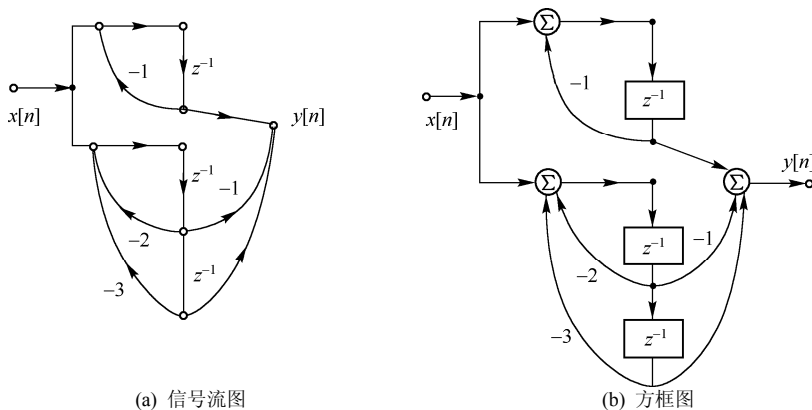


图 8.5-6 并联形式的结构图

该例说明，数字滤波器的结构和连续时间系统的结构极为相似，若将连续系统的积分器  $s^{-1}$  改为离散系统的延时器  $z^{-1}$ ，则连续系统的分析方法完全适合于离散系统的分析。现将其简要归纳如下：

### (1) 直接形式

设系统函数为

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{n=1}^N a_n z^{-n}} \quad (8.5-6)$$

由于系统函数  $H(z)$  的零极点是由其系数  $a_n$  和  $b_m$  决定的, 因此当滤波器的阶数较高时, 某个系数  $a_n$  (或  $b_m$ ) 发生变化, 其所有的极点 (或零点) 必然都发生变化, 即零极点随系数的变化很敏感, 从而影响系统的特性。所以要求系数  $a_n$  和  $b_m$  具有较高的精度和稳定度。一般情况下, 直接形式的结构多用于低阶 (一阶或二阶) 滤波器。对于高阶系统, 通常利用下列方法分解成低阶的组合, 然后分别加以实现。

### (2) 级联形式

将  $H(z)$  分解为几个子系统函数的乘积形式, 即

$$H(z) = A_0 H_1(z) H_2(z) H_3(z) \cdots H_K(z) = A_0 \prod_{i=1}^K H_i(z) \quad (8.5-7)$$

其中每一个子系统都是一阶或二阶的 (如例 8.5-1(2) 中的  $H_1(z)$  和  $H_2(z)$ ), 并均采用直接形式实现。从而级联系统的结构框图如图 8.5-7 所示。

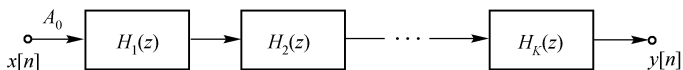


图 8.5-7 数字滤波器的级联形式

### (3) 并联形式

并联形式是将  $H(z)$  分解为几个子系统函数与常数  $C$  之和, 即

$$H(z) = C + H_1(z) + H_2(z) + H_3(z) + \cdots + H_K(z) = C + \sum_{i=1}^K H_i(z) \quad (8.5-8)$$

其中每一个子系统都是一阶或二阶的 (如例 8.5-1(3) 中的  $H_1(z)$  和  $H_2(z)$ ), 并均采用直接形式实现。从而并联系统的结构框图如图 8.5-8 所示。

由于进行了上述分解, 把高阶差分方程变成低阶差分方程, 因而降低了对系数  $a_n$  和  $b_m$  的精度要求。在实际应用中常常采用级联形式或并联形式的结构实现高阶复杂系统。

需要指出, 与连续系统类似, 数字滤波器无论采用级联形式还是并联形式, 都需要将  $H(z)$  的分母多项式 (对于级联还有分子多项式) 分解为一阶因式或二阶因式的乘积, 这些因式的系数必须是实数。也就是说,  $H(z)$  的实极点可构成一阶节的分母, 而一对复共轭极点构成二阶节的分母。对于级联形式其分子亦然。

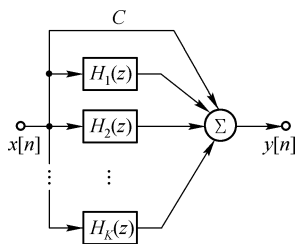


图 8.5-8 数字滤波器的并联形式

## 8.6 应用 MATLAB 分析离散时间系统

离散时间系统可以从时域、频域和  $z$  域进行分析。时域分析的数学模型是差分方程, MATLAB 为线性时不变系统的差分方程提供了专用函数 `filter`, 该函数可以计算对于指定时间

范围的激励序列的响应，并提供了求两个有限时间区间非零的离散时间序列卷积和的专用函数 `conv`。频域分析的数学模型是频率响应，MATLAB 为分析系统频率响应提供了专用函数 `freqz`。 $z$  域分析的数学模型是系统函数，MATLAB 为系统函数的两种不同形式提供了转换函数 `tf2zp`，`zp2tf`，并提供了可以绘制零极点分布图的函数 `zplane`，以及可以计算系统单位样值响应的函数 `impz`。

**例 8.6-1** 已知离散时间系统的系统函数的零极点分别为： $z = 0.2$ ， $p_1 = 0.8e^{j\pi/4}$ ， $p_2 = 0.8e^{-j\pi/4}$ ，绘制系统的零极点分布图，并绘出系统的单位样值响应  $h[n]$  的时域波形。

**解：**用 MATLAB 绘制系统的零极点分布图和单位样值响应  $h[n]$  的时域图形的程序清单 `exec801.m` 如下，波形如图 8.6-1 所示。

```
z=0.2;p=[0.8*exp(pi*i/4);0.8*exp(-pi*i/4)];
k=1;subplot(121);zplane(z,p);
[b,a]=zp2tf(z,p,k);subplot(122);
impz(b,a,20);title('h[n]');
```

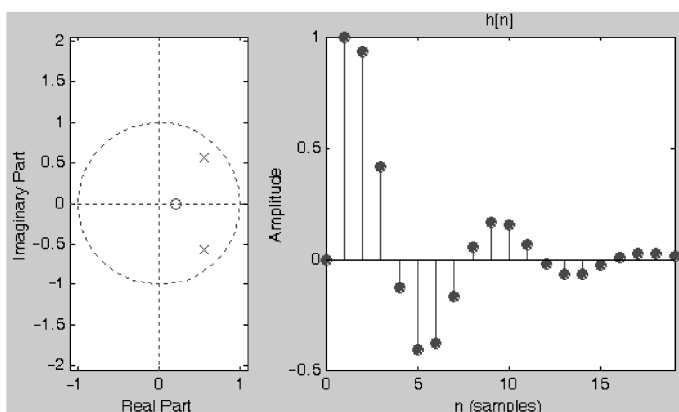


图 8.6-1 离散系统零极点分布图和单位样值响应

**例 8.6-2** 已知离散时间系统的差分方程为： $2y[n] - 3y[n-1] + 2y[n-2] = x[n] + x[n-1]$ ，且系统的激励序列  $x[n] = 4\sin\frac{n\pi}{5} \cdot u[n]$ 。试用 MATLAB 绘制激励序列和响应序列在 0~50 样点时间范围的时域波形。

**解：**用 MATLAB 绘制序列波形的程序清单 `exec802.m` 如下，波形如图 8.6-2 所示。

```
a=[2 -3 2];b=[1 1];n=0:50;x=4*sin(n*pi/5);
y=filter(b,a,x);subplot(211);stem(n,x,'filled');
title('激励序列 x[n]');
subplot(212);stem(n,y,'filled');title('响应序列 y[n]');
```

**例 8.6-3** 已知离散时间系统的激励序列和单位样值响应分别为： $x[n] = n(u[n] - u[n-16])$ ， $h[n] = 0.8^n(u[n] - u[n-12])$ ，求系统的响应。

**解：**用 MATLAB 绘制序列波形的程序清单 `exec803.m` 如下，波形如图 8.6-3 所示。

```
n1=0:15;x=n1;n2=0:11;h=(0.8).^n2;
y=conv(x,h);n=length(y);n3=0:n-1;
subplot(221);stem(n1,x,'filled');xlabel('x[n]');
```

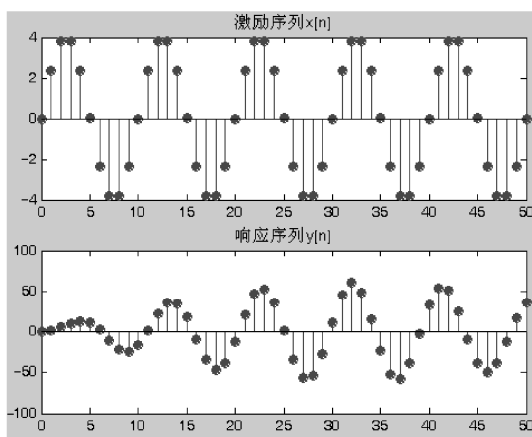


图 8.6-2 离散系统激励与响应序列

```
subplot(222);stem(n2,h,'filled');xlabel('h[n]');
subplot(223);stem(n3,y,'filled');xlabel('y[n]');
p=get(gca,'position');p(3)=2.4*p(3);set(gca,'position',p);
```

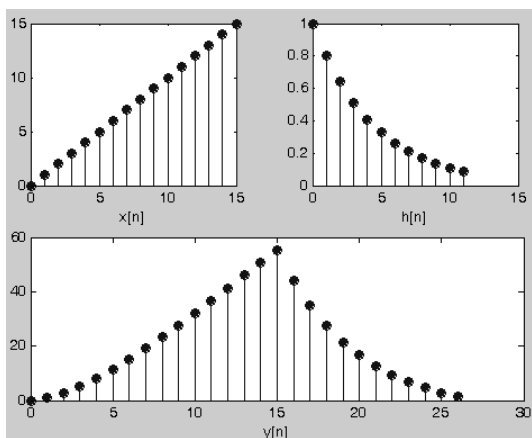


图 8.6-3 离散系统激励、单位样值响应序列

**例 8.6-4** 已知线性时不变系统的结构如图 8.6-4 所示，其中  $h_1[n] = (0.5)^n u[n]$ ， $h_2[n] = (0.8)^n u[n]$ ，当输入序列为  $x[n] = u[n] - u[n-1]$  时，求系统的零状态响应  $y[n]$ ，并绘制系统的零极点分布图和频响特性，以及零状态响应  $y[n]$  的波形。

**解：**系统的单位样值序列  $h[n]$  等于  $h_1[n]$  和  $h_2[n]$  的卷积，系统的零状态响应  $y[n]$  等于  $h[n]$  和  $x[n]$  的卷积。由于  $h_1[n]$  和  $h_2[n]$  是右边序列，长度无限，而 MATLAB 的卷积函数只能计算有限长序列的卷积，故仅取  $h_1[n]$  和  $h_2[n]$  的 0~10 区间的值，这样会造成一部分误差。系统函数  $H(z)$  的计算如下：

$$H_1(z) = \frac{z}{z-0.5}, \quad H_2(z) = \frac{z}{z-0.8}$$

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{z}{z-0.5} \cdot \frac{z}{z-0.8} = \frac{z^2}{z^2 - 1.3z + 0.4}$$

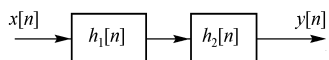


图 8.6-4 线性时不变系统的结构

用 MATLAB 计算  $y[n]$ ，绘制波形和零极点图，以及系统频响特性的程序清单 `exec804.m`

如下，各图形如图 8.6-5 所示。

```

n1=0:10;h1=(0.5).^n1;h2=(0.8).^n1;
h=conv(h1,h2);x=ones(1,11);y=conv(h,x);
n2=length(y);n3=0:n2-1;
subplot(221);stem(n3,y,'filled');xlabel('y[n]');
b=[1 0 0];a=[1 -1.3 0.4];
subplot(222);zplane(a,b);
[H w]=freqz(b,a);Hm=abs(H);Hp=angle(H)*180/pi;
subplot(223);plot(w/pi,Hm);title('系统幅频特性');
xlabel('\omega\pi');ylabel('Magnitude');
subplot(224);plot(w/pi,Hp);title('系统相频特性');
xlabel('\omega\pi');ylabel('Phase,degrees');

```

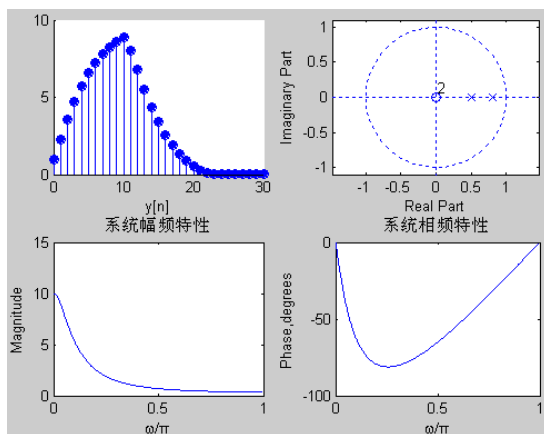


图 8.6-5 系统的零状态响应、零极点图和频响特性

## 习 题

8-1 在下列每个系统中， $x[n]$ 表示激励， $y[n]$ 表示响应。判断每个激励与响应的关系是否是线性的？是否是时不变的？

(1)  $y[n] = 2x[n] + 3$     (2)  $y[n] = x[n] \cos\left(\frac{3n\pi}{8} - \frac{\pi}{5}\right)$     (3)  $y[n] = (x[n])^2$     (4)  $y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m]$

8-2 列出图题 8-2 所示系统的差分方程，指出其阶次。

8-3 列出图题 8-3 所示系统的差分方程，已知边界条件  $y[-1] = 0$ ，分别求以下输入序列时的输出  $y[n]$ ，并绘出其图形（用逐次迭代方法求）。

(1)  $x[n] = \delta[n]$     (2)  $x[n] = u[n]$

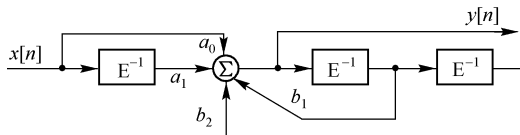


图 题 8-2

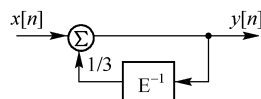


图 题 8-3

8-4 列出图题 8-4 所示系统的差分方程，已知边界条件  $y[-1] = 0$ ，并限定当  $n < 0$  时，全部  $y[n] = 0$ 。若



$x[n] = \delta[n]$ , 求  $y[n]$ 。比较本题与 8-3 题相应的结果。

8-5 求下列齐次差分方程的解。

(1)  $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 0, \quad y[0] = 1$

(2)  $y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = 0, \quad y[0] = y[-1] = 1$

(3)  $y[n] + y[n-2] = 0, \quad y[0] = 1, y[1] = 2$

(4)  $y[n] - 7y[n-1] + 16y[n-2] - 12y[n-3] = 0, \quad y[1] = -1, y[2] = -3, y[3] = -5$

8-6 求下列差分方程的零输入响应和零状态响应, 以及自由响应和强迫响应。

$$y[n] + 2y[n-1] + y[n-2] = 3^n u[n], \quad y[0] = y[-1] = 0$$

8-7 用单边  $z$  变换解下列差分方程。

(1)  $y[n] + 0.1y[n-1] - 0.02y[n-2] = 10u[n], \quad y[-1] = 4, y[-2] = 6$

(2)  $y[n] + 2y[n-1] = (n-2)u[n], \quad y[0] = 1$

(3)  $y[n] + 3y[n-1] + 2y[n-2] = u[n], \quad y[-1] = 0, y[-2] = 0.5$

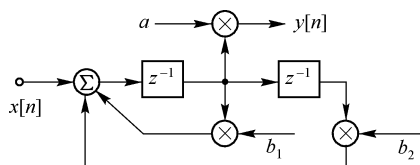
8-8 若描述某线性时不变系统的差分方程为:  $y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = x[n] + 2x[n-2]$ , 已知  $y[-1] = 2, y[-2] = -1/2, x[n] = u[n]$ 。求系统的零输入响应和零状态响应。

8-9 已知一阶因果离散系统的差分方程为:  $y[n] + 3y[n-1] = x[n]$ , 试求:

(1) 系统的单位样值响应  $h[n]$ ;

(2) 若  $x[n] = (n+n^2)u[n]$ , 求响应  $y[n]$ 。

8-10 写出图题 8-10 所示因果离散系统的差分方程, 并求其系统函数  $H(z)$  及单位样值响应  $h[n]$ 。



图题 8-10

8-11 以下各序列是系统的单位样值响应  $h[n]$ , 试分别讨论各系统的因果性与稳定性。

(1)  $\delta[n-4]$

(2)  $\delta[n+5]$

(3)  $u[4-n]$

(4)  $2^n u[n+5]$

(5)  $3^n u[-n]$

(6)  $2^n R_5[n]$

(7)  $(1/2)^n u[-n]$

(8)  $\frac{1}{n}u[n]$

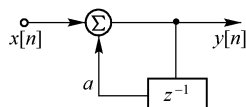
(9)  $\frac{1}{n!}u[n]$

8-12 对于由差分方程  $y[n] + y[n-1] = x[n]$  所表示的因果离散系统:

(1) 求系统函数  $H(z)$  及单位样值响应  $h[n]$ , 并说明系统的稳定性;

(2) 若系统起始状态为零, 而且输入  $x[n] = 10u[n]$ , 求系统的响应  $y[n]$ 。

8-13 对于图题 8-13 所示的一阶因果离散系统 ( $0 < a < 1$ ), 求该系统在单位阶跃序列  $u[n]$  和复指数序列  $e^{jn\omega} u[n]$  激励下的响应, 并指出暂态响应及稳态响应分量。



图题 8-13

8-14 因果系统的系统函数  $H(z)$  如下, 试说明这些系统是否稳定。

(1)  $\frac{z+2}{8z^2-2z-2}$

(2)  $\frac{1-z^{-1}-z^{-2}}{2+5z^{-1}+2z^{-2}}$

(3)  $\frac{3z+4}{2z^2+z-1}$

(4)  $\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+z^{-2}}$

8-15 已知系统函数为  $H(z) = \frac{9.5z}{(z-0.5)(10-z)}$ , 分别在  $|z| > 10$  及  $0.5 < |z| < 10$  两种收敛域情况下, 求系统的单位样值响应, 并说明系统的稳定性与因果性。

8-16 建立图题 8-16 所示各系统的差分方程, 并求单位样值响应  $h[n]$ 。

8-17 利用  $z$  平面零极点分布的几何作图法粗略画出下列各系统函数所对应系统的幅频特性曲线。

(1)  $H(z) = \frac{z}{z-0.5}$

(2)  $H(z) = \frac{1}{z-0.5}$

(3)  $H(z) = \frac{z+0.5}{z}$

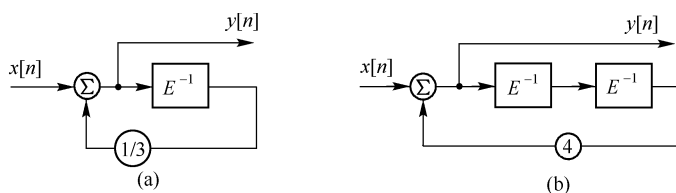


图 题 8-16

\*8-18 已知横向数字滤波器的结构如图题 8-18 所示。试以  $M=8$  为例。

- (1) 写出差分方程;
- (2) 求系统函数  $H(z)$ ;
- (3) 求单位样值响应  $h[n]$ ;
- (4) 画出  $H(z)$  的零极点图;
- (5) 粗略画出系统的幅频特性曲线。

\*8-19 求图题 8-19 所示系统的差分方程、系统函数及单位样值响应, 并大致画出系统函数  $H(z)$  的零极点图及系统的幅频特性曲线。

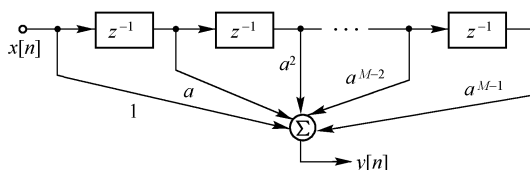


图 题 8-18

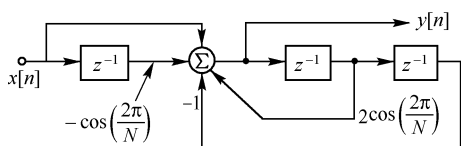


图 题 8-19

8-20 已知某离散时间系统的差分方程为:  $y[n] + 0.2y[n-1] - 0.24y[n-2] = x[n] + x[n-1]$ , 求该系统的系统函数  $H(z)$ , 并根据几何作图法大致画出系统的幅频特性曲线。

8-21 已知某离散时间系统的模拟框图如图题 8-21 所示, 求该系统的幅频特性与相频特性表达式, 并粗略画出幅频特性曲线。

8-22 试求图题 8-22 所示离散时间系统的频率响应特性, 并粗略画出其幅频特性与相频特性曲线。

\*8-23 已知离散因果系统的差分方程为:  $y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1]$ 。

- (1) 求该系统的频率响应, 并粗略画出幅频特性曲线;
- (2) 分别画出直接形式、级联形式和并联形式结构框图或信号流图。

8-24 已知  $s$  平面上零、极点分布如图题 8-24 所示, 试绘出映射到  $z$  平面上零、极点的分布图(令  $T=1$ )。

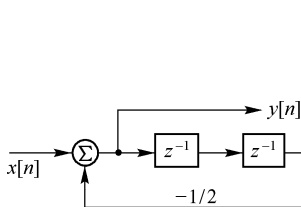


图 题 8-21

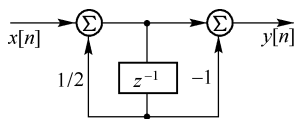


图 题 8-22

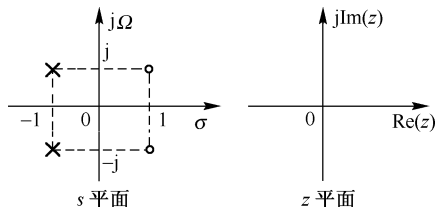


图 题 8-24

\*8-25 由下列差分方程画出因果离散系统的结构图, 求系统函数  $H(z)$  及单位样值响应  $h[n]$ 。

- (1)  $3y[n] - 6y[n-1] = x[n]$
- (2)  $y[n] = x[n] - 5x[n-1] + 8x[n-2]$
- (3)  $y[n] - 3y[n-1] + 3y[n-2] - y[n-3] = x[n]$
- (4)  $y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = x[n] - 3x[n-2]$

8-26 图题 8-26 所示的系统包括两个级联的线性时不变系统, 它们的单位样值响应分别为  $h_1[n]$  和  $h_2[n]$ , 已知  $h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$ ,

$h_2[n] = (0.8)^n u[n]$ , 令  $x[n] = u[n]$ 。

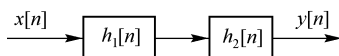


图 题 8-26

(1) 按下式求  $y[n]$ :  $y[n] = \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n]$

(2) 按下式求  $y[n]$ :  $y[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$

注: 以上两种方法的结果应该相同 (卷积结合律)。

8-27 已知某离散系统的系统函数为  $H(z) = \frac{z}{z-m}$ ,  $m$  为常数。

(1) 写出对应的差分方程;

(2) 画出该系统的结构图;

(3) 求系统的频率响应特性, 并画出  $m = 0, 0.5, 1$  三种情况下系统的幅频特性与相频特性曲线。

8-28 画出系统函数  $H(z) = \frac{3z^3 - 5z^2 + 10z}{z^3 - 3z^2 + 7z - 5}$  所表示的系统的级联和并联形式的结构图。

8-29 已知描述系统的差分方程可表示为:  $y[n] = \sum_{r=0}^7 b_r x[n-r]$ , 试绘出此离散系统的方框图。如果

$y[-1]=0$ ,  $x[n] = \delta[n]$ , 试求  $y[n]$ , 并指出  $y[n]$  有何特点, 这种特点与系统结构有何关系?

8-30 一个乒乓球从  $H$  米高度自由下落至地面, 每次弹跳起的最高值是前一次最高值的  $2/3$ 。若以  $y[n]$  表示第  $n$  次跳起的最高值, 试列写描述此过程的差分方程。又若给定  $H=2$  m, 解此差分方程。

8-31 如果在第  $n$  个月初向银行存款  $x[n]$  元, 月利率为  $a$ , 每月利息不取出, 试用差分方程写出第  $n$  月初的本利和  $y[n]$ 。设  $x[n]=10$  元,  $a=0.003$ ,  $y[0]=20$  元, 求  $y[n]$ 。若  $n=12$ , 求  $y[12]$ 。

8-32 对于图题 8-32 的电阻梯形网络, 其各支路电阻都为  $R$ , 每个节点对地的电压为  $v[n]$ ,  $n=0, 1, 2, \dots, N$ 。已知两边界节点电压为  $v[0]=E$ ,  $v[N]=0$ 。试写出求第  $n$  个节点电压  $v[n]$  的差分方程式, 并求解  $v[n]$  的表达式 (注意, 答案中有系数  $N$ )。如果  $N \rightarrow \infty$  (无限节梯形网络), 试写出  $v[n]$  的近似式。

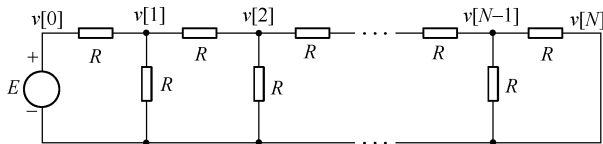


图 题 8-32

\*\*8-33 住房按揭是解决购房资金的一种重要渠道。假设某人购房时向银行贷款总额  $P$  元, 贷款的月利率为  $I$ , 还款期限是  $N$  个月, 采用等额还款 (即每月还款金额相同, 假设为  $R$  元) 方式还贷, 求每月的还款额  $R$ 。

8-34 用计算机对测量的随机数据  $x[n]$  进行平均处理, 当收到一个测量数据后, 计算机就把这一次输入数据与前三次输入数据进行平均。试求这一运算过程的频率响应。

\*\*8-35 设  $X(e^{j\omega})$ ,  $Y(e^{j\omega})$  和  $H(e^{j\omega})$  分别是线性时不变系统的输入  $x[n]$ 、输出  $y[n]$  和单位样值响应  $h[n]$  的傅氏变换, 且  $y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$ , 对上式的离散卷积和做傅氏变换, 证明:  $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$ 。

\*\*8-36 某地质勘探测试设备给出的发射信号  $x[n] = \delta[n] + 0.5\delta[n-1]$ , 接收的回波信号  $y[n] = (0.5)^n u[n-1]$ , 若地层反射情况的冲激响应以  $h[n]$  表示, 且满足  $y[n] = h[n] * x[n]$ 。

(1) 求  $h[n]$ ;

(2) 以延时、相加、数乘运算为基本单元, 画出系统框图。

以下为 MATLAB 习题

8-37 已知离散时间系统的系统函数的零极点分别为:  $z_1=1$ ,  $z_2=-0.5$ ,  $p_1=0.5+j0.7$ ,  $p_2=0.5-j0.7$ , 绘制系统的零极点分布图, 并绘出系统的单位样值响应  $h[n]$  的时域波形。

8-38 已知离散时间系统的激励序列和单位样值响应序列分别为

$$x[n] = (0.9)^n (u[n] - u[n-9]) \quad h[n] = (n+2)(u[n] - u[n-12])$$

求系统的响应。

8-39 已知线性时不变系统的结构如图题 8-39 所示, 其中  $h_1[n] = (0.6)^n u[n]$ ,  $h_2[n] = (0.9)^n u[n]$ , 当输入序列为  $x[n] = u[n] - u[n-10]$  时, 求系统的零状态响应  $y[n]$ , 并绘制系统的零极点分布图和频响特性, 以及零状态响应  $y[n]$  的波形。

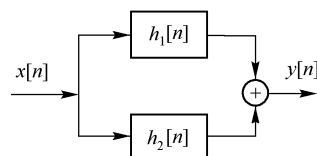


图 题 8-39

## 第 9 章 系统的状态变量分析法

第 2 到第 8 章从时域和变换域两个方面分别讨论了信号和线性时不变系统的输入和输出特性, 系统的这种描述方法称之为端口分析法 (port analysis), 也叫经典分析法, 或称为输入-输出分析法, 其特点是以系统函数为特征, 着重运用频率响应特性的概念, 且只研究系统输出与输入之间的外部特性, 而不关心系统内部的各种问题。系统的这种描述方法特别适合于单输入单输出系统 (single-input and single-output system), 而对于多输入多输出系统 (multi-input and multi-output system), 以及更加复杂的系统, 则用这种方法进行描述比较困难。随着现代控制理论的发展, 人们不仅关心系统外部输出量的变化情况, 而且对系统内部的一些变量也要进行研究, 以便设计和控制这些变量达到最优控制的目的。20 世纪 60 年代, 卡尔曼 (P.E.Kalman) 引入的状态空间分析法成为现代系统与控制理论形成的标志, 其特点是以描述系统内部特性的状态变量 (state variable) 取代描述系统外部特性的系统函数, 该方法特别适合于多输入多输出系统。在此基础上, 卡尔曼进一步提出了系统的“可观测性”和“可控制性”等重要概念, 完整地揭示了系统的内部特性, 并促进了控制系统分析和设计方法的根本变革。另外, 状态空间方法可以成功地用来分析非线性系统或时变系统, 并易于计算机求解。

本章主要介绍连续时间系统和离散时间系统的状态变量分析法, 着重介绍如何建立它们的状态方程和输出方程, 以及应用变换域方法求解和分析这类系统。

### 9.1 系统的状态变量和状态方程

系统的输入-输出描述法, 着眼点仅在于系统的响应与激励之间的关系。例如, 由图 9.1-1 所示的串联谐振电路构成的二阶动态系统, 如果只关心其激励  $x(t)$  与响应——电容两端电压  $v_C(t)$  之间的关系, 则该系统可用二阶微分方程式(9.1-1)来描述

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dv_C(t)}{dt} + \Omega_0^2 v_C(t) = \Omega_0^2 x(t)$$

$$\text{其中 } \alpha = \frac{R}{2L}, \quad \Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}。$$

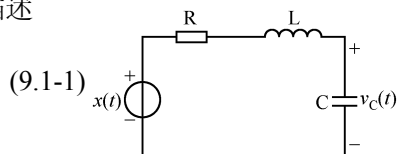


图 9.1-1 二阶动态系统

一般地, 对于单输入单输出系统, 输入-输出分析法的数学模型是一个高阶微分方程; 而对于多输入多输出系统的数学模型则是一组高阶联立微分方程。此外, 一旦系统数学模型建立之后, 就不再关心其内部状态的变化情况, 而只对其响应变化感兴趣。这是端口描述法的特点, 也是它的局限, 即不能全面揭示系统的内部特性。

用状态变量法来研究系统的特点是, 不仅研究系统输出的变化情况, 还要研究系统内部状态变量的变化。现仍以图 9.1-1 为例来说明。如果感兴趣的不仅是电容上的电压  $v_C(t)$ , 而且还希望知道在激励  $x(t)$  作用下, 电感中电流  $i_L(t)$  的变化情况, 这时可以列出方程组式(9.1-2)

$$\begin{cases} \frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i_L(t) - \frac{1}{L}v_C(t) + \frac{1}{L}x(t) \\ \frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}i_L(t) + 0 \cdot x(t) \end{cases} \quad (9.1-2)$$

系统的响应  $y(t)$  是电容上电压  $v_C(t)$ ，于是有

$$y(t) = v_C(t) + 0 \cdot i_L(t) + 0 \cdot x(t) \quad (9.1-3)$$

式(9.1-2)是以  $i_L(t)$  和  $v_C(t)$  作为变量的一阶联立微分方程组。对于图 9.1-1 所示的二阶谐振电路，只要知道  $i_L(t)$  和  $v_C(t)$  的初始情况和加入激励  $x(t)$  的情况，就可完全确定电路的全部行为。这种描述系统的方法就称为系统的状态变量分析法，其中  $i_L(t)$  和  $v_C(t)$  称为该电路的状态变量。式(9.1-2)和式(9.1-3)分别为系统的状态方程和输出方程，也能表示成矢量矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L(t)}{dt} \\ \frac{dv_C(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} [x(t)] \quad (9.1-4)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} \quad (9.1-5)$$

对于高阶系统而言，其状态变量的个数较多，但状态方程和输出方程的形式仍与式(9.1-4)和式(9.1-5)相同；而如果输入信号和输出信号的个数也比较多，则式(9.1-4)和式(9.1-5)中向量或矩阵的维数会增加。

对于动态系统而言，其**状态**是表示该系统的一组数目最少的数据，只要知道  $t = t_0$  时的这组数据和  $t \geq t_0$  时的系统输入，就能完全确定系统在  $t \geq t_0$  的任何时间的行为。这组数据就称为系统在  $t = t_0$  时刻的状态，也就是说，系统的状态是相互独立的。能够表示系统状态随时间  $t$  变化的变量称为**状态变量**。系统状态变量的数目就是系统的**阶次**。或者说，系统状态变量的数目就是系统中独立储能元件的数目。系统的所有状态变量可以组合成一个状态矢量表示，见式(9.1-4)和式(9.1-5)。应当指出，并不是任何一个系统都存在状态变量，譬如一个纯电阻网络，它在任何时刻的响应仅仅取决于该时刻的激励，而与其在过去时刻的值无关，这种即时系统（无记忆系统 **memoryless system**）不能用状态变量法分析。状态变量法只适用于动态系统（有记忆系统 **memory system**）。

式(9.1-2)形式的一阶联立微分方程组称为**状态方程（state equation）**，它描述了系统状态变量的一阶导数与状态变量和激励的关系。式(9.1-3)形式的代数方程称为**输出方程（output equation）**，它描述了系统输出与状态变量和激励之间的关系。式(9.1-4)和式(9.1-5)是状态方程和输出方程的矩阵表达形式，而其中矢量的各个坐标就是描述系统行为的各个状态变量。

状态变量分析法对于离散时间系统也是同样适用的，即上面给出的概念对离散时间系统同样有效。只不过对于离散时间系统，其状态变量  $\lambda[n]$  是离散时间信号，状态方程是一阶联立差分方程组。

上述关于状态变量和状态方程的基本概念，可用于讨论系统状态方程和输出方程的一般形式。

## 1. 线性时不变连续时间系统状态方程和输出方程的一般形式

一个动态连续时间系统的时域数学模型都是用输入、输出信号的各阶导数来描述的。连续时间系统的状态方程是各状态变量的一阶联立微分方程组。对于线性时不变系统，状态方程和输出方程的右端为状态变量和输入信号的线性组合，即线性时不变系统的状态方程和输出方程一般具有如下两种形式

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = a_{11}\lambda_1(t) + a_{12}\lambda_2(t) + \cdots + a_{1k}\lambda_k(t) + b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t) + \cdots + b_{1m}x_m(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = a_{21}\lambda_1(t) + a_{22}\lambda_2(t) + \cdots + a_{2k}\lambda_k(t) + b_{21}x_1(t) + b_{22}x_2(t) + \cdots + b_{2m}x_m(t) \\ \vdots \\ \dot{\lambda}_k(t) = a_{k1}\lambda_1(t) + a_{k2}\lambda_2(t) + \cdots + a_{kk}\lambda_k(t) + b_{k1}x_1(t) + b_{k2}x_2(t) + \cdots + b_{km}x_m(t) \end{cases} \quad (9.1-6)$$

和

$$\begin{cases} y_1(t) = c_{11}\lambda_1(t) + c_{12}\lambda_2(t) + \cdots + c_{1k}\lambda_k(t) + d_{11}x_1(t) + d_{12}x_2(t) + \cdots + d_{1m}x_m(t) \\ y_2(t) = c_{21}\lambda_1(t) + c_{22}\lambda_2(t) + \cdots + c_{2k}\lambda_k(t) + d_{21}x_1(t) + d_{22}x_2(t) + \cdots + d_{2m}x_m(t) \\ \vdots \\ y_r(t) = c_{r1}\lambda_1(t) + c_{r2}\lambda_2(t) + \cdots + c_{rk}\lambda_k(t) + d_{r1}x_1(t) + d_{r2}x_2(t) + \cdots + d_{rm}x_m(t) \end{cases} \quad (9.1-7)$$

式中  $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_k(t)$  为系统的  $k$  个状态变量；

$\dot{\lambda}_i(t)$  为第  $i$  个状态变量  $\lambda_i(t)$  的一阶导数，即  $\dot{\lambda}_i(t) = \frac{d\lambda_i(t)}{dt}$ ,  $i = 1, 2, \cdots, k$ ；

$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)$  为系统的  $m$  个输入信号；

$y_1(t), y_2(t), \cdots, y_r(t)$  为系统的  $r$  个输出信号。

如果用矢量矩阵（vector-matrix）形式表示，则状态方程可写为

$$\dot{\lambda}(t)_{k \times 1} = A_{k \times k} \lambda(t)_{k \times 1} + B_{k \times m} x(t)_{m \times 1} \quad (9.1-8)$$

输出方程可写为

$$y(t)_{r \times 1} = C_{r \times k} \lambda(t)_{k \times 1} + D_{r \times m} x(t)_{m \times 1} \quad (9.1-9)$$

其中

$$\dot{\lambda}(t) = [\dot{\lambda}_1(t), \dot{\lambda}_2(t), \cdots, \dot{\lambda}_k(t)]^T, \quad \lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \cdots, \lambda_k(t)]^T$$

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_m(t)]^T, \quad y(t) = [y_1(t), y_2(t), \cdots, y_r(t)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rk} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{r1} & d_{r2} & \cdots & d_{rm} \end{bmatrix}$$

系数矩阵  $A, B, C, D$  表示系统的结构参数。对于线性时不变系统，它们都是常量矩阵（constant matrix）。

## 2. 线性时不变离散时间系统状态方程和输出方程的一般形式

对于一个动态的离散时间系统，它的时域数学模型是一个高阶差分方程，其状态方程是各状态变量的一阶联立差分方程组。

设一个有  $m$  个输入  $x_1[n], x_2[n], \dots, x_m[n]$ ,  $r$  个输出  $y_1[n], y_2[n], \dots, y_r[n]$  的  $k$  阶线性时不变离散时间系统，若将其  $k$  个状态变量记为  $\lambda_1[n], \lambda_2[n], \dots, \lambda_k[n]$ ，则其状态方程和输出方程可以写成

$$\lambda[n+1] = A\lambda[n] + Bx[n] \quad (9.1-10)$$

$$y[n] = C\lambda[n] + Dx[n] \quad (9.1-11)$$

式中

$$\lambda[n] = [\lambda_1[n], \lambda_2[n], \dots, \lambda_k[n]]^T$$

$$x[n] = [x_1[n], x_2[n], \dots, x_m[n]]^T$$

$$y[n] = [y_1[n], y_2[n], \dots, y_r[n]]^T$$

分别是状态矢量、输入矢量 (input vector) 和输出矢量 (output vector)。系数矩阵  $A, B, C, D$  的形式与连续时间系统的形式相同。

用状态变量分析法研究系统具有如下优点：

(1) 便于研究系统内部的一些物理量在信号转换过程中的变化。这些物理量可以用状态矢量的一个分量表现出来，从而便于研究其变化规律。

(2) 系统的状态变量分析法与系统的复杂程度无关。复杂系统和简单系统的数学模型形式都相似，表现为一些状态变量的线性组合，因而这种分析法更适用于多输入多输出系统。

(3) 状态变量分析法还适用于非线性和时变系统，因为一阶微分方程或差分方程是研究非线性和时变系统的有效方法。

(4) 状态方程的主要参数鲜明地表征了系统的关键性能，可以用来定性地研究系统的稳定性及如何控制各个参数使系统的性能达到最佳等，因而在控制系统分析和设计中得到了广泛的应用。

(5) 由于状态方程都是一阶联立微分方程组或一阶联立差分方程组，因而便于采用数值解法，为使用计算机分析系统提供了有效的途径。

下面开始研究连续时间系统和离散时间系统状态方程的建立和求解（变换域）方法。而关于状态方程更深入、更详细地讨论，读者可以阅读现代控制理论等教材。

## 9.2 连续时间系统状态方程的建立

建立状态方程的方法大致可分为直接法 (direct method) 和间接法 (indirect method) 两种。直接法是根据给定的电网络直接列出状态方程和输出方程。间接法是根据系统的数学模型描述，如输入-输出方程、系统函数或系统的信号流图等，列写状态方程和输出方程。但无论采用哪种方法，建立状态方程的基本步骤都包括：

(1) 确定状态变量的个数，它等于系统的阶数；

(2) 选择状态变量；

(3) 列写联系状态变量的一阶微分方程组和输出变量的代数方程组；

(4) 对步骤 (3) 中所列写的方程组进行化简，为求解方便起见，一般写成矢量矩阵的形式。



## 9.2.1 系统状态方程的直接编写

对给定的网络（或电路）建立状态方程时，首先必须确定电路中包含的储能元件（因为无记忆电路不能应用状态变量分析法），如电容、电感等。从而上述的 4 个步骤可具体化为：

- （1）确定状态变量的个数：它等于独立的储能元件的个数，即独立电感和电容个数之和；
- （2）选择状态变量：一般选择流过电感的电流  $i_L(t)$  和电容两端电压  $v_C(t)$  作为状态变量；
- （3）微分方程的编写：依据网络约束条件（即 KVL 和 KCL）来建立电路方程；
- （4）消去非状态变量：运算化简成状态方程的标准形式，并写成矢量矩阵形式。

由于状态变量是相互独立的，因而选择流过独立电感的电流和独立电容两端的电压作为状态变量。例如图 9.2-1(a) 是只含电容的回路，显然，根据 KVL，图中任何一个电容电压都能由其余两个电容电压求得，也就是说三个电容中只有两个电容是相互独立的储能元件，因而只能选择两个电容电压作为状态变量。同样对于图 9.2-1(b)，它是只含有电容和理想电压源的回路，因而两个电容电压中只能选择其中之一作为状态变量。类似地，对图 9.2-2(a) 所示的只含自感的节点（割集），只能选择其中的两个电感电流作为状态变量；而对图 9.2-2(b) 的只含自感和理想电流源的节点（割集），只能选择两个自感电流的其中之一作为状态变量。总之，系统状态变量的数目与系统独立储能元件的数目是相等的。

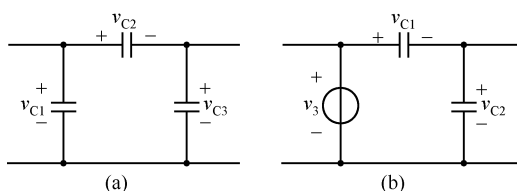


图 9.2-1 非独立的电容储能元件

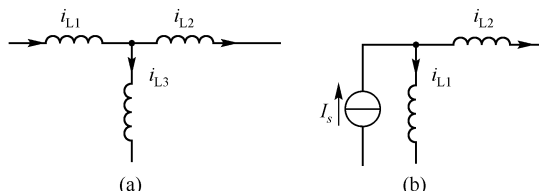


图 9.2-2 非独立的电感储能元件

**例 9.2-1** 列写如图 9.2-3 所示电路的状态方程。若以电阻  $R_2$  上的电压  $v_5(t)$  和电源电流  $i_1(t)$  作为输出，列写状态方程和输出方程，其中  $R_1 = R_2 = 1\Omega$ ,  $L_1 = L_2 = 0.5H$ 。

**解：**选电感中电流  $i_{L1}(t)$  和  $i_{L2}(t)$ ，以及电容两端电压  $v_C(t)$  作为状态变量，即有  $\lambda_1(t) = i_{L1}(t)$ ， $\lambda_2(t) = i_{L2}(t)$ ， $\lambda_3(t) = v_C(t)$ 。

对于图 9.2-3 的节点  $a$  列写电流方程为

$$C \dot{\lambda}_3(t) = \lambda_1(t) - \lambda_2(t) \quad (9.2-1)$$

对于电路中回路 II 和 III，列写电压方程为

$$L_2 \dot{\lambda}_2(t) = \lambda_3(t) + R_2 i_5(t) \quad (9.2-2)$$

$$L_1 \dot{\lambda}_1(t) = -\lambda_3(t) + R_1 i_4(t) \quad (9.2-3)$$

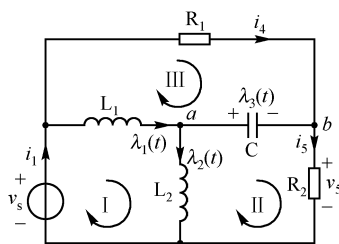


图 9.2-3 例 9.2-1 电路

为了消除非状态变量  $i_5(t)$  和  $i_4(t)$ ，列写由  $v_s(t)$ ,  $R_1$  和  $R_2$  组成的回路电压方程

$$v_s(t) = R_1 i_4(t) + R_2 i_5(t) \quad (9.2-4)$$

和节点  $b$  的电流方程

$$i_5(t) = i_4(t) + C \dot{\lambda}_3(t) \quad (9.2-5)$$

由式(9.2-1)、式(9.2-4)和式(9.2-5)，以及给定的元件参数得到

$$\begin{cases} i_4(t) = 0.5[v_s(t) - \lambda_1(t) + \lambda_2(t)] \\ i_5(t) = 0.5[v_s(t) + \lambda_1(t) - \lambda_2(t)] \end{cases}$$

从而, 由式(9.2-1)、式(9.2-2)和式(9.2-3)得到的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = -\lambda_1(t) + \lambda_2(t) - 2\lambda_3(t) + v_s(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) = \lambda_1(t) - \lambda_2(t) + 2\lambda_3(t) + v_s(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) = 2\lambda_1(t) - 2\lambda_2(t) \end{cases}$$

电路的输出, 即  $R_2$  上的电压  $v_5(t)$  和电源电流  $i_1(t)$ , 可写成

$$y_1(t) = v_5(t) = R_2 i_5(t)$$

$$y_2(t) = i_1(t) = \lambda_1(t) + i_4(t)$$

将上述状态方程和输出方程改写为矩阵形式, 得到

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_s(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot v_s(t)$$

## 9.2.2 系统状态方程的间接编写

由于连续系统的状态方程是由一阶联立微分方程组所构成的, 如果已知系统的信号流图(流图中  $s^{-1}$  表示积分器), 从而可以选择积分器的输出作为状态变量, 这样就可以方便地写出系统的状态方程。因此, 连续系统的状态方程间接编写的一般步骤为:

(1) 确定状态变量的个数, 它等于系统的阶数。

(2) 根据给定系统的表示方式, 如微分方程、冲激响应或系统函数等, 模拟出系统的信号流图。

(3) 选择信号流图中积分器的输出作为状态变量。

(4) 根据信号流图的运算规则, 列写状态方程和输出方程。

(5) 化简上述方程, 并写成矢量矩阵的形式。

由于系统的信号流图具有三种不同的结构, 即直接型、级联型和并联型, 因而依据不同结构的信号流图所列写的状态方程是不同的。请看下例。

**例 9.2-2** 分别给出用直接型、级联型和并联型结构实现下式所示系统的状态方程和输出方程。

$$H(s) = \frac{2s + 8}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6} \quad (9.2-6)$$

**解:** (1) 直接型。将系统函数写为便于绘制信号流图的标准形式

$$H(s) = \frac{2s^{-2} + 8s^{-3}}{1 + 6s^{-1} + 11s^{-2} + 6s^{-3}} \quad (9.2-7)$$

直接型的信号流图如图 9.2-4 所示。

选择积分器的输出作为状态变量, 则建立状态方程如下

$$\dot{\lambda}_1(t) = \lambda_2(t) \quad \dot{\lambda}_2(t) = \lambda_3(t) \quad \dot{\lambda}_3(t) = -6\lambda_1(t) - 11\lambda_2(t) - 6\lambda_3(t) + x(t)$$

输出方程为

$$y(t) = 8\lambda_1(t) + 2\lambda_2(t)$$

写成矢量矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (9.2-8)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} \quad (9.2-9)$$

直接型的信号流图还可以有另一种转置的形式,如图 9.2-5 所示。用类似的方法可以建立状态方程与输出方程

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (9.2-10)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} \quad (9.2-11)$$

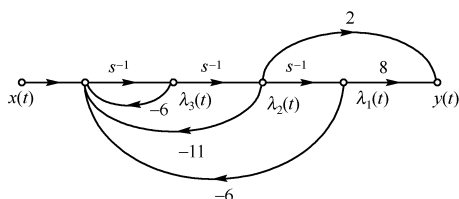


图 9.2-4 例 9.2-2 的直接型的信号流图

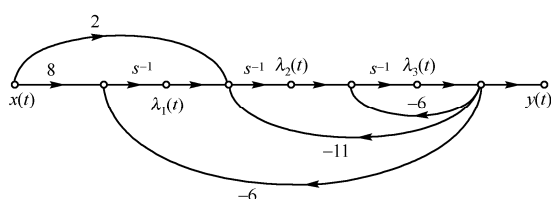


图 9.2-5 图 9.2-4 的信号流图的转置形式

从式(9.2-8)和式(9.2-10)可以看出,当信号流图互为转置时,其系数矩阵  $A$  亦互为转置。同时,它们的系数矩阵  $B$  和  $C$  互换。

(2) 级联型。将式(9.2-6)所示的系统函数  $H(s)$  分解为

$$H(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{s+4}{s+2} \cdot \frac{2}{s+3} \quad (9.2-12)$$

可以画出级联型的信号流图,如图 9.2-6 所示。

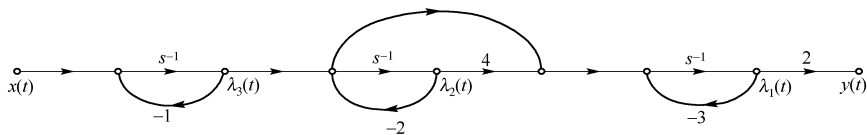


图 9.2-6 例 9.2-2 的级联型的信号流图

选择积分器的输出作为状态变量,见图 9.2-6,则状态方程和输出方程为

$$\dot{\lambda}_1(t) = -3\lambda_1(t) + 4\lambda_2(t) + [\lambda_3(t) - 2, \lambda_2(t)] = -3\lambda_1(t) + 2\lambda_2(t) + \lambda_3(t)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -2\lambda_2(t) + \lambda_3(t)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\lambda_3(t) + x(t)$$

$$y(t) = 2\lambda_1(t)$$

写成矢量矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (9.2-13)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} \quad (9.2-14)$$

可见级联结构形式的系数矩阵  $\mathbf{A}$  是三角阵，其对角线元素就是系统函数的极点。

(3) 并联型。将式(9.2-6)所示的系统函数  $H(s)$  展开为部分分式

$$H(s) = \frac{3}{s+1} + \frac{-4}{s+2} + \frac{1}{s+3} \quad (9.2-15)$$

其并联型的信号流图如图 9.2-7 所示。

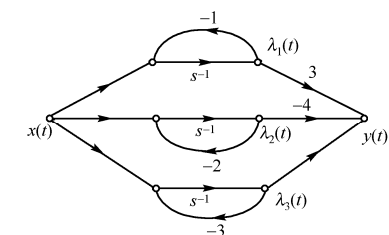


图 9.2-7 例 9.2-2 的并联型的信号流图

选择积分器的输出作为状态变量，则状态方程和输出方程为

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\lambda_1(t) + x(t)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -2\lambda_2(t) + x(t)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -3\lambda_3(t) + x(t)$$

$$y(t) = 3\lambda_1(t) - 4\lambda_2(t) + \lambda_3(t)$$

写成矢量矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (9.2-16)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \end{bmatrix} \quad (9.2-17)$$

可见并联结构的系数矩阵  $\mathbf{A}$  为对角阵，对角线元素也是系统函数的极点，也是系数矩阵  $\mathbf{A}$  的特征根。

根据线性代数理论，容易证明，式(9.2-8)、式(9.2-10)、式(9.2-13)和式(9.2-16)中的系数矩阵  $\mathbf{A}$  都是相似矩阵。

**例 9.2-3** 用并联结构形式列出下式系统函数的状态方程和输出方程

$$H(s) = \frac{s+4}{(s+1)^3(s+2)(s+3)}$$

解：用并联结构形式表示时，应将系统函数展开为部分分式的形式，即

$$H(s) = \frac{3/2}{(s+1)^3} + \frac{-7/4}{(s+1)^2} + \frac{15/8}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{1/8}{s+3}$$

对应于上式的信号流图如图 9.2-8 所示。

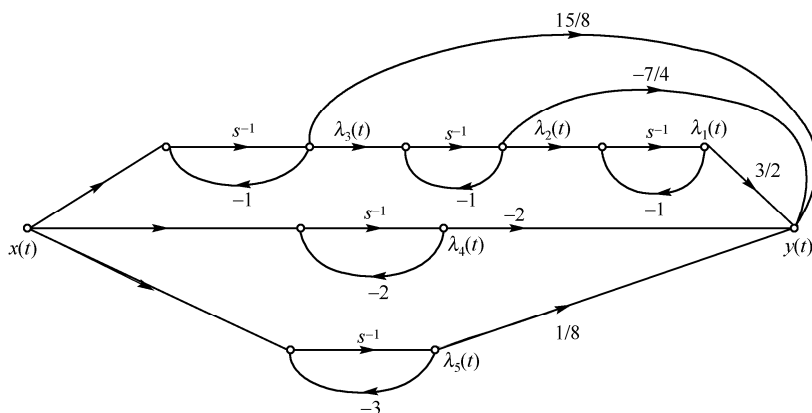


图 9.2-8 例 9.2-3 的并联型的信号流图

选积分器的输出作为状态变量，如图 9.2-8 中所标的  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ，则有

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\lambda_1(t) + \lambda_2(t)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_2(t) + \lambda_3(t)$$

$$\dot{\lambda}_3(t) = -\lambda_3(t) + x(t)$$

$$\dot{\lambda}_4(t) = -2\lambda_4(t) + x(t)$$

$$\dot{\lambda}_5(t) = -3\lambda_5(t) + x(t)$$

$$y(t) = \frac{3}{2} \lambda_1(t) - \frac{7}{4} \lambda_2(t) + \frac{15}{8} \lambda_3(t) - 2\lambda_4(t) + \frac{1}{8} \lambda_5(t)$$

写成矢量矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \\ \dot{\lambda}_3(t) \\ \dot{\lambda}_4(t) \\ \dot{\lambda}_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \\ \lambda_4(t) \\ \lambda_5(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{7}{4} & \frac{15}{8} & -2 & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \\ \lambda_3(t) \\ \lambda_4(t) \\ \lambda_5(t) \end{bmatrix}$$

这表明，当系统函数的特征根具有重根时，系数矩阵  $A$  为约当矩阵形式（对角阵是约当

阵的一种特殊情况)。线性代数中已经证明,任何矩阵都和约当矩阵相似。因此,对于同一系统而言,选择不同的状态变量,编写的状态方程的系数矩阵  $\mathbf{A}$  都是相似的,且系数矩阵  $\mathbf{A}$  的特征值正好是系统的极点,因而系数矩阵  $\mathbf{A}$  又称为系统矩阵。

## 9.3 离散时间系统状态方程的建立

观察离散时间系统状态方程,即式(9.1-10)可以看出,对于线性时不变离散系统,其  $(n+1)$  时刻的状态变量  $\lambda[n+1]$  是  $n$  时刻的状态变量  $\lambda[n]$  和输入信号  $x[n]$  的线性组合。在离散时间系统中,惯性元件是延时单元,因而通常取延时单元的输出作为状态变量。离散时间系统状态方程的编写一般按照以下步骤进行:

- (1) 确定状态变量的个数,它等于系统的阶数;
- (2) 根据给定系统的不同表示方式:如系统框图,差分方程、单位样值响应或系统函数等,模拟出系统的信号流图;
- (3) 选择信号流图中延时器的输出作为状态变量;
- (4) 根据信号流图的运算规则,列写状态方程和输出方程;
- (5) 化简上述方程,并写成矢量矩阵的形式。

### 9.3.1 根据给定系统的差分方程确定状态方程

对于离散时间系统,可用下列  $k$  阶差分方程来描述

$$\begin{aligned} y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots + a_{k-1} y[n-(k-1)] + a_k y[n-k] \\ = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_{k-1} x[n-(k-1)] + b_k x[n-k] \end{aligned} \quad (9.3-1)$$

其系统函数可以写为 
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_{k-1} z^{-(k-1)} + b_k z^{-k}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{k-1} z^{-(k-1)} + a_k z^{-k}} \quad (9.3-2)$$

根据上式可以画出系统的信号流图,如图 9.3-1 所示。其中,  $z^{-1}$  表示延时单元。

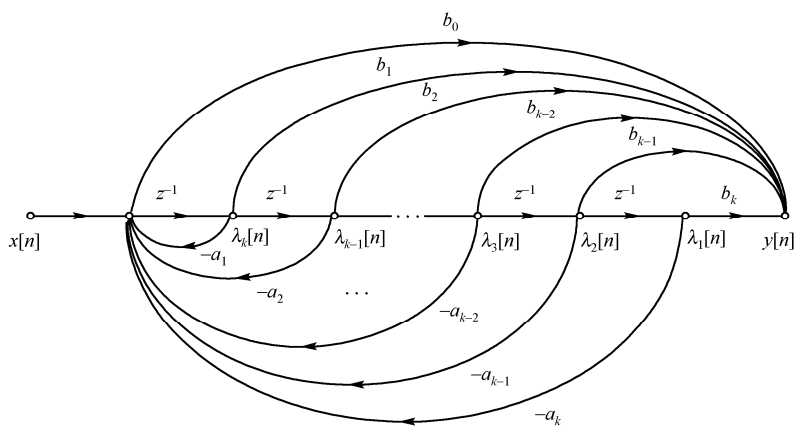


图 9.3-1 式(9.3-2)的信号流图

选择延时单元的输出作为状态变量,如图 9.3-1 中所标注的  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \cdots, k$ , 则有

$$\lambda_1[n+1] = \lambda_2[n]$$

$$\lambda_2[n+1] = \lambda_3[n]$$

$$\vdots$$

$$\lambda_{k-1}[n+1] = \lambda_k[n]$$

$$\lambda_k[n+1] = x[n] - a_k \lambda_1[n] - a_{k-1} \lambda_2[n] - \cdots - a_2 \lambda_{k-1}[n] - a_1 \lambda_k[n]$$

$$y[n] = b_0 \lambda_k[n+1] + b_1 \lambda_k[n] + b_2 \lambda_{k-1}[n] + \cdots + b_{k-1} \lambda_2[n] + b_k \lambda_1[n]$$

$$= (b_k - a_k b_0) \lambda_1[n] + (b_{k-1} - a_{k-1} b_0) \lambda_2[n] + \cdots + (b_2 - a_2 b_0) \lambda_{k-1}[n] + (b_1 - a_1 b_0) \lambda_k[n] + b_0 x[n]$$

写成矢量矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \\ \vdots \\ \lambda_{k-1}[n+1] \\ \lambda_k[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_k & -a_{k-1} & -a_{k-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \\ \vdots \\ \lambda_{k-1}[n] \\ \lambda_k[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \quad (9.3-3)$$

$$y[n] = [b_k - a_k b_0 \quad b_{k-1} - a_{k-1} b_0 \quad \cdots \quad b_2 - a_2 b_0 \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \\ \vdots \\ \lambda_{k-1}[n] \\ \lambda_k[n] \end{bmatrix} + b_0 x[n] \quad (9.3-4)$$

由此可见，根据离散时间系统的差分方程或系统函数画出信号流图，建立状态方程的步骤，与连续时间系统是类似的，只不过是使用延时单元来代替连续系统中的积分器。离散时间系统也可以根据级联和并联形式的流图及相应的转置流图，建立状态方程，这与连续时间系统一样，此处不再赘述。

### 9.3.2 根据给定系统的框图或流图建立状态方程

给定离散时间系统的方框图或流图，可以很容易地建立系统的状态方程，只要选取延时的输出作为状态变量，就可以实现。下面以一个两输入和两输出的系统为例做说明。

**例 9.3-1** 离散系统如图 9.3-2 所示，试列写其状态方程和输出方程。

**解：**选择状态变量  $\lambda_1[n]$ 、 $\lambda_2[n]$  和  $\lambda_3[n]$ ，如图 9.3-2 所示，从而状态方程和输出方程为

$$\lambda_1[n+1] = -(\lambda_1[n] + 2\lambda_2[n+1]) + x_1[n] - x_2[n]$$

$$\lambda_2[n+1] = -2\lambda_2[n] + x_1[n] - 3x_2[n]$$

$$\lambda_3[n+1] = -3(\lambda_2[n] + \lambda_3[n]) + x_2[n]$$

$$y_1[n] = (\lambda_1[n] + 2\lambda_2[n+1]) + \lambda_2[n]$$

$$y_2[n] = 2(\lambda_1[n] + 2\lambda_2[n+1]) + (\lambda_2[n] + \lambda_3[n])$$

经过整理，得到

$$\lambda_1[n+1] = -\lambda_1[n] + 4\lambda_2[n] - x_1[n] + 5x_2[n]$$

$$\lambda_2[n+1] = -2\lambda_2[n] + x_1[n] - 3x_2[n]$$

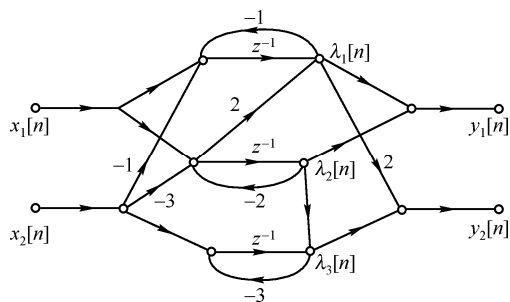


图 9.3-2 例 9.3-1 的信号流图

$$\begin{aligned}\lambda_3[n+1] &= -3\lambda_2[n] - 3\lambda_3[n] + x_2[n] \\ y_1[n] &= \lambda_1[n] - 3\lambda_2[n] + 2x_1[n] - 6x_2[n] \\ y_2[n] &= 2\lambda_1[n] - 7\lambda_2[n] + \lambda_3[n] + 4x_1[n] - 12x_2[n]\end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \\ \lambda_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \\ \lambda_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \\ \lambda_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[n] \\ x_2[n] \end{bmatrix}$$

需要注意的是，在本例中所选的两个状态变量 $\lambda_1[n]$ 和 $\lambda_3[n]$ 不单是延时单元的输出，同时还有其他信号输入，因此需要将来自延时单元的输入和其他的输入分开。

## 9.4 连续时间系统状态方程的求解

在 9.1 节，我们已给出连续时间系统状态方程和输出方程的一般形式为

$$\dot{\lambda}(t) = A\lambda(t) + Bx(t) \quad (9.4-1)$$

$$y(t) = C\lambda(t) + Dx(t) \quad (9.4-2)$$

式中  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]^T$  为输入矢量；

$y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)]^T$  为输出矢量；

$\lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_k(t)]^T$  为状态矢量；

$A, B, C, D$  是系数矩阵，对于线性时不变系统，它们都是常量矩阵。

通常可以利用时域方法或变换域方法求解状态方程，其中时域解法需要用到“矩阵指数”，往往需要借助于计算机求解；而变换域解法则较为简便。本教材只介绍变换域求解方法，即应用拉氏变换求解连续系统的状态方程和输出方程。对时域解法有兴趣的读者，可以参阅相关的参考书。

对式(9.4-1)和式(9.4-2)两边进行拉普拉斯变换，得到

$$sA(s) - \lambda(0^-) = AA(s) + BX(s) \quad (9.4-3)$$

$$Y(s) = CA(s) + DX(s) \quad (9.4-4)$$

式中  $A(s) = \mathcal{L}[\lambda(t)] = [\mathcal{L}[\lambda_1(t)], \mathcal{L}[\lambda_2(t)], \dots, \mathcal{L}[\lambda_k(t)]]^T$  为状态矢量的拉氏变换；

$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = [\mathcal{L}[x_1(t)], \mathcal{L}[x_2(t)], \dots, \mathcal{L}[x_m(t)]]^T$  为输入矢量的拉氏变换；

$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)] = [\mathcal{L}[y_1(t)], \mathcal{L}[y_2(t)], \dots, \mathcal{L}[y_r(t)]]^T$  为输出矢量的拉氏变换；

$\lambda(0^-) = [\lambda_1(0^-), \lambda_2(0^-), \dots, \lambda_k(0^-)]^T$  为系统的起始状态。

对式(9.4-3)和式(9.4-4)整理，得

$$A(s) = (sI - A)^{-1} \lambda(0^-) + (sI - A)^{-1} BX(s) \quad (9.4-5)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} \lambda(0^-) + [C(sI - A)^{-1} B + D] X(s) \quad (9.4-6)$$



式(9.4-5)和式(9.4-6)就是系统状态矢量和输出矢量的拉氏变换, 对其取拉氏逆变换, 得到其时域表达式为

$$\lambda(t) = \mathcal{L}^{-1}[A(s)] = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}\lambda(0^-)] + \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}B] * \mathcal{L}^{-1}[X(s)] \quad (9.4-7)$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \underbrace{C\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}\lambda(0^-)]}_{\text{零输入解}} + \underbrace{\{C\mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]B + D\delta(t)\} * \mathcal{L}^{-1}[X(s)]}_{\text{零状态解}} \quad (9.4-8)$$

可以看出, 计算过程中的关键步骤是求 $(sI - A)^{-1}$ , 为了方便起见, 定义矩阵

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

其逆变换 $\phi(t)$ 称为系统的状态转移矩阵 (state transition matrix)。记

$$H(s) = C\Phi(s)B + D = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (9.4-9)$$

则式(9.4-6)中等号右端的第二项可以写成  $H(s)X(s)$ , 与系统零状态响应的拉氏变换表示一致, 即

$$Y_{zs}(s) = H(s)X(s) \quad (9.4-10)$$

所以, 将  $H(s)$  称为系统函数矩阵 (system function matrix) 或特征矩阵, 它是一个  $r \times m$  阶矩阵, 即

$$H(s) = \begin{bmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) & \cdots & H_{1m}(s) \\ H_{21}(s) & H_{22}(s) & \cdots & H_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{r1}(s) & H_{r2}(s) & \cdots & H_{rm}(s) \end{bmatrix}$$

矩阵中第  $i$  行第  $j$  列的元素  $H_{ij}(s)$  表示, 第  $i$  个输出分量对于第  $j$  个输入 (其他输入均为零) 分量的系统函数。 $H(s)$  的拉氏逆变换称为系统的冲激响应矩阵 (impulse response matrix), 即

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \quad (9.4-11)$$

**例 9.4-1** 已知线性时不变系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其起始状态矢量和输入信号矢量分别为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(0^-) \\ \lambda_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \delta(t) \end{bmatrix}$$

试求系统的状态变量和输出信号。

**解:**  $\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

系统的状态矢量的拉氏变换为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\lambda}(0^-) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{X}(s) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} \\ -\frac{1}{s+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-2}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-1} \\ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{2}{s-1} \\ \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以系统的状态矢量

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} + 2e^t - 2 \\ 1 - 2e^{-t} \end{bmatrix} u(t)$$

系统输出的拉氏变换为  $\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \boldsymbol{\lambda}(0^-) + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{X}(s)$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \\ &\quad \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{s-1} \\ \frac{1}{s+1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中，第一部分是系统的零输入解，第二部分是系统的零状态解。从而其输出信号为

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2e^{-t} \end{bmatrix} u(t)$$

**例 9.4-2** 利用状态变量法求如图 9.4-1(a)所示系统的系统函数矩阵。

**解：**将系统框图修改为信号流图并选择状态变量，如图 9.4-1(b)所示。可以编写状态方程和输出方程

$$\dot{\lambda}_1(t) = 2\lambda_2(t) + \dot{\lambda}_2(t)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + x(t)$$

$$y(t) = \dot{\lambda}_2(t) + 2\lambda_2(t)$$

整理后得到

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\lambda_1(t) + 3\lambda_2(t) + x(t)$$

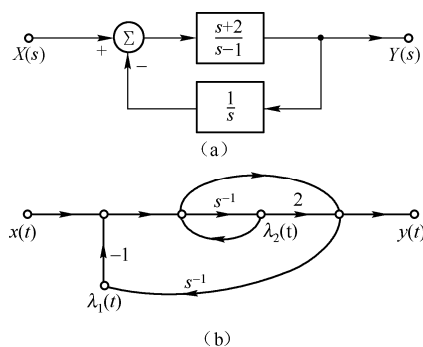


图 9.4-1 例 9.4-2 的系统框图及信号流图

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t) + \lambda_2(t) + x(t)$$

$$y(t) = -\lambda_1(t) + 3\lambda_2(t) + x(t)$$

从而

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [-1 \quad 3], \quad \mathbf{D} = [1]$$

因此

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & -3 \\ 1 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2+2} \begin{bmatrix} s-1 & 3 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

故系统函数矩阵为  $\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}\Phi(s)\mathbf{B} + \mathbf{D}$

$$= [-1 \quad 3] \frac{1}{s^2+2} \begin{bmatrix} s-1 & 3 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 = \frac{s(s+2)}{s^2+2}$$

## 9.5 离散时间系统状态方程的求解

和连续时间系统状态方程的求解方法类似，离散时间系统状态方程的求解也有时域和变换域两种解法。这里也只讲述  $\mathbf{Z}$  变换求解方法。假设离散系统的状态方程与输出方程为

$$\boldsymbol{\lambda}[n+1] = \mathbf{A}\boldsymbol{\lambda}[n] + \mathbf{B}\mathbf{x}[n] \quad (9.5-1)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}[n] + \mathbf{D}\mathbf{x}[n] \quad (9.5-2)$$

式中  $\boldsymbol{\lambda}[n] = [\lambda_1[n], \lambda_2[n], \dots, \lambda_k[n]]^T$  为状态矢量；

$\mathbf{x}[n] = [x_1[n], x_2[n], \dots, x_m[n]]^T$  为输入矢量；

$\mathbf{y}[n] = [y_1[n], y_2[n], \dots, y_r[n]]^T$  为输出矢量。

它们都是离散时间序列。矩阵  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  是系数矩阵，对于线性时不变系统，它们都是常数矩阵。

对式(9.5-1)和式(9.5-2)两边取  $z$  变换，得到

$$z\mathbf{A}(z) - z\boldsymbol{\lambda}[0] = \mathbf{A}\mathbf{A}(z) + \mathbf{B}\mathbf{X}(z) \quad (9.5-3)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}\mathbf{A}(z) + \mathbf{D}\mathbf{X}(z) \quad (9.5-4)$$

式中  $\mathbf{A}(z) = \mathcal{Z}[\boldsymbol{\lambda}[n]] = [\mathcal{Z}[\lambda_1[n]], \mathcal{Z}[\lambda_2[n]], \dots, \mathcal{Z}[\lambda_k[n]]]^T$  为状态矢量的  $z$  变换；

$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{x}[n]] = [\mathcal{Z}[x_1[n]], \mathcal{Z}[x_2[n]], \dots, \mathcal{Z}[x_m[n]]]^T$  为输入矢量的  $z$  变换；

$\mathbf{Y}(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{y}[n]] = [\mathcal{Z}[y_1[n]], \mathcal{Z}[y_2[n]], \dots, \mathcal{Z}[y_r[n]]]^T$  为输出矢量的  $z$  变换；

$\boldsymbol{\lambda}[0] = [\lambda_1[0], \lambda_2[0], \dots, \lambda_k[0]]^T$  为系统的初始状态。

对式(9.5-3)和式(9.5-4)整理后，得到离散系统的状态矢量与输出矢量的  $z$  变换为

$$\mathbf{A}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\boldsymbol{\lambda}[0] + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(z) \quad (9.5-5)$$

$$\mathbf{Y}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\boldsymbol{\lambda}[0] + [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{X}(z) \quad (9.5-6)$$

容易看出，式(9.5-6)中等号右边的第一项是系统零输入响应的  $z$  变换矩阵，第二项是系统零状态响应的  $z$  变换矩阵。若记

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (9.5-7)$$

则  $\mathbf{H}(z)$  为系统的系统函数矩阵，从而式(9.5-6)中的第二项，即零状态响应的  $z$  变换可以写为

$$\mathbf{Y}_{zs}(z) = \mathbf{H}(z)\mathbf{X}(z) \quad (9.5-8)$$

与连续时间系统类似,  $\mathbf{H}(z)$  也是一个  $r \times m$  阶矩阵, 其第  $i$  行第  $j$  列元素  $H_{ij}(z)$  是第  $i$  个输出分量对于第  $j$  个输入分量的系统函数。其逆  $z$  变换是系统的单位样值响应矩阵  $\mathbf{h}[n]$ , 即

$$\mathbf{h}[n] = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{H}(z)] \quad (9.5-9)$$

对式(9.5-5)和式(9.5-6)取  $z$  逆变换, 从而得到其时域表示为

$$\boldsymbol{\lambda}[n] = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{A}(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\boldsymbol{\lambda}[0]] + \mathcal{Z}^{-1}[(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}] * \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{X}(z)] \quad (9.5-10)$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{Y}(z)] = \underbrace{\mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\boldsymbol{\lambda}[0]]}_{\text{零输入解}} + \underbrace{\mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}] * \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{X}(z)]}_{\text{零状态解}} \quad (9.5-11)$$

**例 9.5-1** 已知离散系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

其起始状态矢量为  $\begin{bmatrix} \lambda_1[0] \\ \lambda_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ , 输入信号为  $x[n] = u[n]$ 。求系统的状态变量、输出信号和单位样值响应矩阵。

解:

$$z\mathbf{I} - \mathbf{A} = z \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 6 & z-5 \end{bmatrix}$$

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ 6 & z-5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z-2)(z-3)} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix}$$

故系统函数矩阵为  $\mathbf{H}(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{(z-2)(z-3)} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{z-2} + \frac{4}{z-3} \\ \frac{-1}{z-3} \end{bmatrix}$$

$$\text{单位样值响应矩阵为 } \mathbf{h}[n] = \begin{bmatrix} h_1[n] \\ h_2[n] \end{bmatrix} = \mathcal{Z}^{-1}[\mathbf{H}(z)] = \begin{bmatrix} 4 \cdot 3^{n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} \\ -3^{n-1} \end{bmatrix} u[n-1]$$

系统状态矢量的  $z$  变换为

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(z) &= (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}z\boldsymbol{\lambda}[0] + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{X}(z) \\ &= \frac{1}{(z-2)(z-3)} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix} z \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{(z-2)(z-3)} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{z}{z-2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \left( \frac{1/2z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{1/2z}{z-3} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1/2z}{z-1} + \frac{1/2z}{z-3} \\ \frac{2z}{z-2} + \frac{1/2z^2}{z-1} - \frac{z^2}{z-2} + \frac{1/2z^2}{z-3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

系统的状态矢量为  $\lambda[n] = \mathcal{Z}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \frac{1/2z}{z-1} + \frac{1/2z}{z-3} \\ \frac{2z}{z-2} + \frac{1/2z^2}{z-1} - \frac{z^2}{z-2} + \frac{1/2z^2}{z-3} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^n \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 3^{n+1} \end{bmatrix} u[n]$

系统的输出矢量为  $Y(z) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{(z-2)(z-3)} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix} z \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{(z-2)(z-3)} \begin{bmatrix} z-5 & 1 \\ -6 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ z \end{bmatrix} \frac{1}{z-1}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3z}{z-2} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} + \frac{-3z}{z-2} + \frac{2z}{z-3} \\ \frac{1/2z}{z-1} - \frac{1/2z}{z-3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} + \frac{2z}{z-3} \\ \frac{1/2z}{z-1} - \frac{1/2z}{z-3} \end{bmatrix}$$

系统的全响应为  $y[n] = \mathcal{Z}^{-1} \left( \begin{bmatrix} \frac{z}{z-1} + \frac{2z}{z-3} \\ \frac{1/2z}{z-1} - \frac{1/2z}{z-3} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 + 2 \cdot 3^n \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 3^n \end{bmatrix} u[n]$

**例 9.5-2** 图 9.5-1 所示的离散时间系统, 具有两个输入, 一个输出, 求系统对  $x_1[n] = \delta[n]$ ,  $x_2[n] = u[n]$  的响应。设该系统起始是静止的。

**解:** (1) 列写系统的状态方程和输出方程。取延时单元的输出作为状态变量, 如图 9.5-1 中所标注的  $\lambda_1[n]$  和  $\lambda_2[n]$ , 则有

$$\begin{cases} \lambda_1[n+1] = -\lambda_1[n] + 3\lambda_2[n] + 11x_1[n] \\ \lambda_2[n+1] = -2\lambda_1[n] + 4\lambda_2[n] + 6x_2[n] \\ y[n] = \lambda_1[n] - \lambda_2[n] + x_2[n] \end{cases}$$

可知系数矩阵  $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ,  $C = [1 \quad -1]$ ,  $D = [0 \quad 1]$

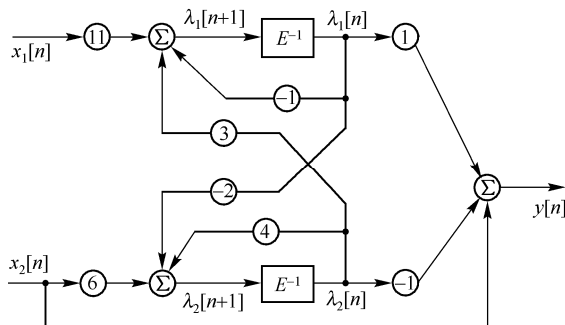


图 9.5-1 例 9.5-2 的系统框图

(2) 计算  $(zI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} z+1 & -3 \\ 2 & z-4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} \begin{bmatrix} z-4 & 3 \\ -2 & z+1 \end{bmatrix}$

和 
$$\mathbf{X}(z) = \mathcal{Z}[x_1[n] \ x_2[n]]^T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{z-1} \end{bmatrix}^T, \quad \lambda(0) = [0 \ 0]^T$$

(3) 计算系统的输出。由式(9.5-6)可知, 系统输出的  $z$  变换为

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{X}(z) \\ &= \left( [1 \ -1] \frac{1}{(z-1)(z-2)} \begin{bmatrix} z-4 & 3 \\ -2 & z+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + [0 \ 1] \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{z}{z-1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{11}{z-1} - \frac{6z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

取其逆变换得到 
$$y[n] = 11u[n-1] - 6nu[n] + u[n] = \delta[n] + (12-6n)u[n-1]$$

## 9.6 由状态方程判断系统的稳定性

由 5.8 节和 8.3 节可知, 系统函数的极点决定了系统的自由运动情况, 因此可以根据系统极点的位置来判断系统的稳定情况。当然, 用系统函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$  或  $\mathbf{H}(z)$  的极点也可以判断系统是否稳定。

### 1. 连续时间系统的稳定性判别

用状态变量法分析系统时, 系统函数矩阵

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (9.6-1)$$

式中,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  均为系数矩阵。对于线性时不变系统, 它们是常数矩阵。由于

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (9.6-2)$$

式中,  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  是系统的特征多项式, 而  $\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  是矩阵  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  的伴随矩阵, 所以有

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{C} \cdot \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{D} \cdot \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \quad (9.6-3)$$

从而可知, 系统的极点, 亦即  $\mathbf{H}(s)$  的极点仅由系统特征多项式  $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$  决定, 或者说系统的极点就是系数矩阵  $\mathbf{A}$  的特征根, 亦即

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (9.6-4)$$

的根。故系统稳定与否只与系数矩阵  $\mathbf{A}$  有关, 与其他三个系数矩阵无关。对于因果系统, 若系数矩阵的  $n$  个特征根  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 全部位于左半  $s$  平面, 即  $\text{Re}(\alpha_i) < 0$ , 则系统稳定。

**例 9.6-1** 某系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ K & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$$

试求其中  $K$  在什么范围内系统稳定。

**解:** 系统的特征多项式为 
$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s+2 & -1 \\ -K & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + 3s + 2 - K$$

若使系统特征根均在左半  $s$  平面，则应满足  $2 - K > 0$ ，即当  $K < 2$  时，系统稳定。对于高阶系统，判断方程  $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  的根是否在左半  $s$  平面可以用劳斯准则（Routh criterion）来判断。劳斯准则参见附录 B。

## 2. 离散时间系统的稳定性判别

8.3 节曾指出，对于因果系统，如果它的系统函数  $H(z)$  的极点都在单位圆内，则系统稳定。与连续时间系统类似，用状态变量法分析系统时，系统稳定性也决定于系统函数矩阵  $\mathbf{H}(z)$  的极点位置。系统函数矩阵  $\mathbf{H}(z)$  的极点是系统特征方程

$$\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \quad (9.6-5)$$

的根，或者说是系数矩阵  $\mathbf{A}$  的特征根。也就是说，对于因果系统，若系统函数矩阵  $\mathbf{H}(z)$  的  $n$  个极点  $p_i (i=1, 2, \dots, n)$  全部位于单位圆内，则系统稳定。

**例 9.6-2** 若某因果离散系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

问该系统是否稳定。

**解：**系统的特征多项式为

$$A(z) = \det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} z - 1/2 & -1 \\ -1/6 & z - 1/3 \end{vmatrix} = z^2 - \frac{5}{6}z$$

系统的两个极点分别为 0 与  $5/6$ ，均在单位圆内，因此，该系统是稳定的。

判断方程  $\det(z\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$  的根是否在单位圆内，可以用朱里准则（July criterion）来判断。有兴趣的读者可参考更多相关文献。

从上述论述可以看出，系统函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$  或  $\mathbf{H}(z)$  的极点仅与系数矩阵  $\mathbf{A}$  有关，而与其他系数矩阵  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  无关，因而系统的稳定性也只取决于系数矩阵  $\mathbf{A}$ 。至于系数矩阵  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  的作用，读者可参阅有关书籍，其中详细论述了  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  在自动控制中的重要作用。

## 9.7 系统的状态变量分析法的 MATLAB 实现

系统的状态变量分析法的 MATLAB 实现主要包括：系统函数到状态方程的转换，系统函数矩阵的计算，连续系统的状态方程和离散系统的状态方程的求解。其中，系统函数到状态方程的转换需要用到专用函数 `tf2ss`，系统函数的计算需要用到专用函数 `ss2tf`，系统的状态方程的求解需要用到专用函数 `ss` 和 `lsim`。下面举例说明。

**例 9.7-1** 写出下列系统的状态方程。

$$(1) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) \quad (2) H(z) = \frac{z-3}{z^3 + 2z^2 + 3z + 6}$$

**解：**通过简单的程序，可以求出状态方程中系数矩阵  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  和  $\mathbf{D}$  的值，程序清单 `exec901.m` 如下：

```
b1=[1 2];a1=[1 3 2];[A1,B1,C1,D1]=tf2ss(b1,a1)
b2=[1 -3];a2=[1 2 3 6];[A2,B2,C2,D2]=tf2ss(b2,a2)
```

根据运算结果，可以得到系统 1 的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

系统 2 的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \\ \lambda_3[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \\ \lambda_3[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x[n] \\ y[n] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \\ \lambda_3[n] \end{bmatrix} \end{cases}$$

例 9.7-2 已知某连续系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

其输入和初始状态分别为  $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ e^{-3t}u(t) \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} \lambda_1(0^-) \\ \lambda_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

求该系统的系统函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$  和输出，并绘制输出的时域波形。

解：通过简单的程序，可以求出系统函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$ ，程序清单 exec902a.m 如下：

```
A=[1 0;1 -3];B=[1 0;0 1];C=[1 -1;0 -1];D=[1 1;1 0];
[b1,a1]=ss2tf(A,B,C,D,1)      %求与输入 x1(t)有关的系统函数
[b2,a2]=ss2tf(A,B,C,D,2)      %求与输入 x2(t)有关的系统函数
```

运行结果为：

```
b1=1      3      -1      b2=1      1      -2
      1      2      4      0      -1      1
a1=1      2      -3      a2=1      2      -3
```

所以系统函数矩阵为  $\mathbf{H}(s) = \frac{1}{s^2 + 2s - 3} \begin{bmatrix} s^2 + 3s - 1 & s^2 + s - 2 \\ s^2 + 2s + 4 & -s + 1 \end{bmatrix}$

求解系统输出的程序清单 exec902b.m 如下，输出结果的波形如图 9.7-1 所示。

```
A=[1 0;1 -3];B=[1 0;0 1];C=[1 -1;0 -1];D=[1 1;1 0];
r0=[1 -1];dt=0.01;t=0:dt:2;      %r0 为系统的初始条件
x(:,1)=ones(length(t),1);x(:,2)=exp(-3*t);      %系统的激励信号
sys=ss(A,B,C,D);y=lsim(sys,x,t,r0);
plot(t,y(:,1),'r');text(1.6,'y1(t)');hold on;
```



```
plot(t,y(:,2));text(1,1,'y2(t)');hold off;
```

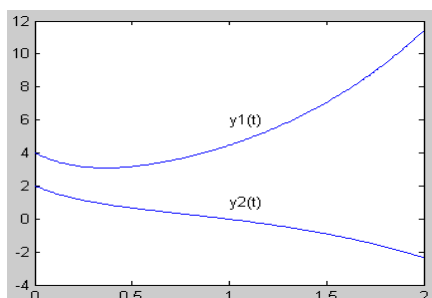


图 9.7-1 连续系统输出的时域波形

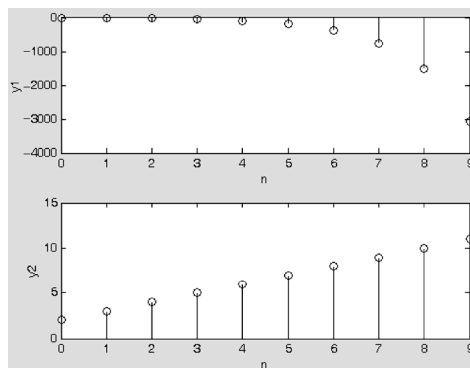


图 9.7-2 离散系统输出的时域序列

**例 9.7-3** 已知某离散系统的状态方程和输出方程为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \quad \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix}$$

其初始状态和输入分别为  $\begin{bmatrix} \lambda_1[0] \\ \lambda_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $x[n] = u[n]$ 。求该系统的输出, 并绘制输出的时域波形。

**解:** 求解系统输出的程序清单 `exec903.m` 如下, 输出结果的波形如图 9.7-2 所示。

```
A=[-1 3; -2 4];B=[2;1];C=[-1 2; 1 -1];D=[0;0];
r0=[1; -1];N=10;x=ones(1,N);
sys=ss(A,B,C,D,[]);y=lsim(sys,x,[],r0);
subplot(2,1,1);y1=y(:,1)';stem((0:N-1),y1);
xlabel('n');ylabel('y1');
subplot(2,1,2);y2=y(:,2)';stem((0:N-1),y2);
xlabel('n');ylabel('y2');
```

## 习 题

9-1 建立图题 9-1 所示电路的状态方程。

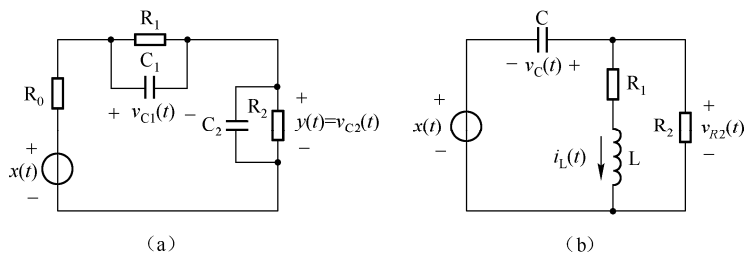


图 题 9-1

9-2 建立图题 9-2 所示电路的状态方程。若指定输出为电阻  $R_1$ ,  $R_2$  上的电压, 写出输出方程。

9-3 将下列微分方程化为状态方程和输出方程。

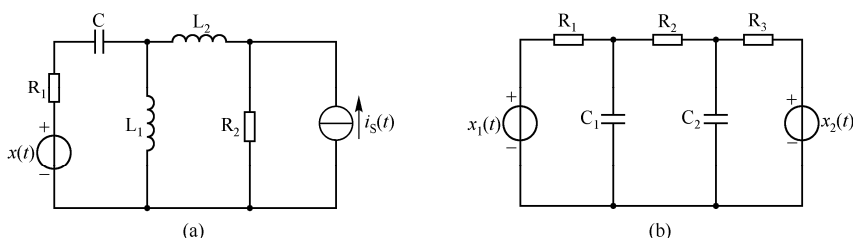


图 题 9-2

- (1)  $y'''(t) + 5y''(t) + 7y'(t) + 3y(t) = x(t)$   
 (2)  $y'''(t) + 5y''(t) + y'(t) + 2y(t) = x'(t) + 2x(t)$

9-4 将图题 9-4(a)和(b)所示系统画成流图形式，并列写系统的状态方程和输出方程。

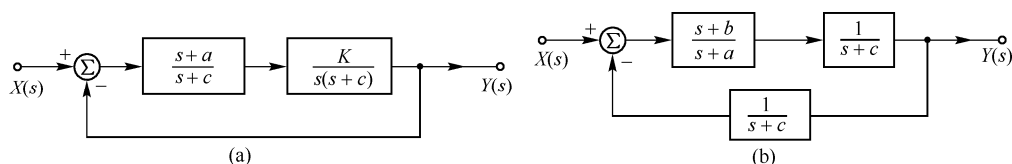


图 题 9-4

9-5 系统为如图题 9-5 所示的方框图，试列写状态方程和输出方程。

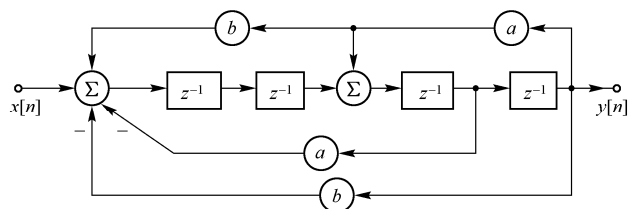


图 题 9-5

9-6 将下列差分方程化为状态方程和输出方程。

- (1)  $y[n] - y[n-1] - 2y[n-2] = x[n]$   
 (2)  $y[n] + y[n-1] + 0.25y[n-2] = x[n] + x[n-1]$

9-7 (1) 已知系统的微分方程为  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = b_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 x(t)$

用图题 9-7 的流图形式模拟该系统，列写对应于图题 9-7 形式的状态方程，并求  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2$  与原方程系数之间的关系。

(2) 已知系统的微分方程为  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 6 \frac{dx(t)}{dt} + 8x(t)$

求对应(1)问所示状态方程的各系数。

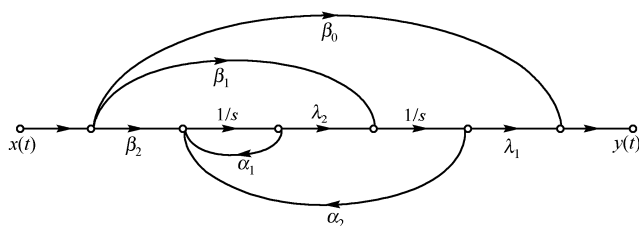


图 题 9-7

9-8 给定系统的状态方程和起始条件分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda_1(0^-) \\ \lambda_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

求解该系统。

9-9 求状态方程  $\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} x(t)$  在给定条件下的解。

$$(1) \begin{bmatrix} \lambda_1(0^-) \\ \lambda_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x(t) = 0; \quad (2) \begin{bmatrix} \lambda_1(0^-) \\ \lambda_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad x(t) = u(t);$$

9-10 系统状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + x(t)$$

当  $\begin{bmatrix} \lambda_1(0^-) \\ \lambda_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $x(t) = u(t)$  时:

(1) 求系统的状态变量和输出变量;

\*\* (2) 若选另一组状态变量  $g_1(t)$  和  $g_2(t)$ , 它与原状态变量关系为  $\begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$ , 试导出用

$g_1(t)$  和  $g_2(t)$  描述系统的状态方程和起始状态  $g_1(0^-)$ ,  $g_2(0^-)$ ;

(3) 用新状态方程求解, 试比较由两种状态方程形式得出的输出。

9-11 系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}$$

且已知  $\lambda_1(0^-) = 1$ ,  $\lambda_2(0^-) = 1$ ,  $x(t) = u(t)$ 。

(1) 求系统函数矩阵  $H(s)$ ; (2) 求输出  $y(t)$ 。

9-12 已知一离散系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[n] \quad y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix}$$

给定当  $n \geq 0$  时,  $x[n] = 0$  和  $y[n] = 8(-1)^n - 5(-2)^n$ 。

(1) 求常数  $a, b$ ; (2) 求  $\lambda_1[n]$  和  $\lambda_2[n]$ ; \*\* (3) 写出描述该系统的差分方程。

9-13 一离散系统如图题 9-13 所示。

(1) 当输入  $x[n] = \delta[n]$  时, 求  $\lambda_1[n]$ ,  $\lambda_2[n]$  和  $h[n]$ ;

(2) 列写系统的差分方程。

9-14 系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[n] \quad y[n] = \begin{bmatrix} 0.11 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix} + u[n]$$

已知  $\begin{bmatrix} \lambda_1[0] \\ \lambda_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 。

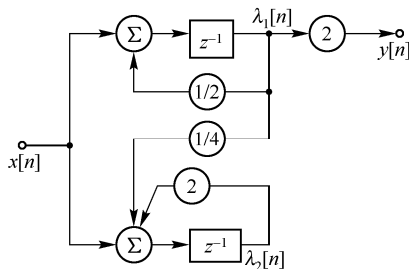


图 题 9-13

- (1) 画出模拟框图和信号流图; (2) 求系统函数  $H(z)$ ; (3) 求  $y[n]$ 。

**\*\*9-15** 已知系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

试求下列条件下的解:

- (1)  $\lambda_1[0] = 1, \lambda_2[0] = 1, x[n] = 0$  (2)  $\lambda_1[0] = 1, \lambda_2[0] = -1, x[n] = u[n]$

**\*\*9-16** 已知系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix}, \quad y[n] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix}$$

给定当  $n \geq 0$  时, 系统的输出为  $y[n] = (-1)^n + 3(3)^n$ , 试求

- (1) 常数  $a$  和  $b$ ; (2) 状态方程的解  $\begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix}$ 。

以下为 MATLAB 习题

9.17 写出下列系统的状态方程。

$$(1) \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 2 \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t) \quad (2) H(z) = \frac{z(z-3)}{z^3 + 2z^2 + 2z + 4}$$

9.18 已知某连续系统的状态方程和输出方程分别为

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1(t) \\ \dot{\lambda}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

其初始状态和输入分别为  $\begin{bmatrix} \lambda_1(0^-) \\ \lambda_2(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ e^{-0.5t}u(t) \end{bmatrix}$ 。求该系统的系统函数矩阵  $\mathbf{H}(s)$  和输出, 并绘制输出的时域波形。

9.19 已知某离散系统的状态方程和输出方程分别为

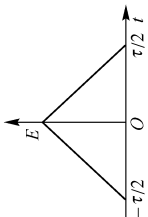
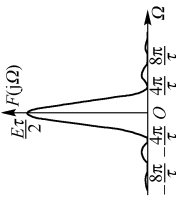
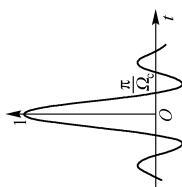
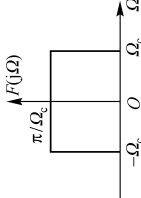
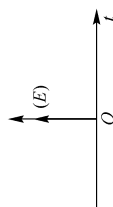
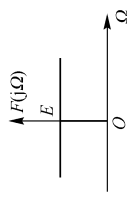
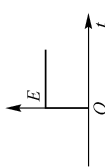
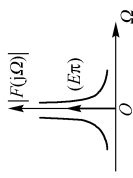
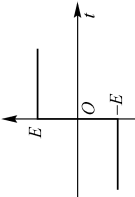
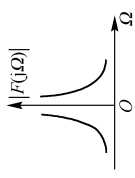
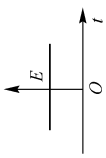
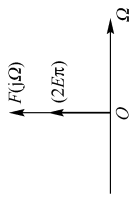
$$\begin{bmatrix} \lambda_1[n+1] \\ \lambda_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} x[n] \quad \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1[n] \\ \lambda_2[n] \end{bmatrix}$$

其初始状态和输入分别为  $\begin{bmatrix} \lambda_1[0] \\ \lambda_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $x[n] = e^{-n}u[n]$ 。求该系统的系统函数矩阵  $\mathbf{H}(z)$  和输出, 并绘制输出的时域波形。

# 附录 A 常用非周期信号的傅里叶变换表

| 序号 | 信号名称   | 时间函数 $f(t)$                                                                                 | 波形图 | 频谱函数 $F(j\Omega) =  F(j\Omega) e^{j\varphi(\Omega)}$                                                               | 频谱图 |
|----|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1  | 单边指数脉冲 | $Ee^{-\alpha t}u(t) \quad \alpha > 0$                                                       |     | $\frac{E}{\alpha + j\Omega}$                                                                                       |     |
| 2  | 双边指数脉冲 | $Ee^{-\alpha t }u(t) \quad \alpha > 0$                                                      |     | $\frac{2\alpha E}{\alpha^2 + \Omega^2}$                                                                            |     |
| 3  | 矩形脉冲   | $\begin{cases} E &  t  < \tau/2 \\ 0 &  t  > \tau/2 \end{cases}$                            |     | $E\tau \text{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) = \frac{2E}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$       |     |
| 4  | 余弦脉冲   | $\begin{cases} E \cos \frac{\pi t}{\tau} &  t  < \tau/2 \\ 0 &  t  \geq \tau/2 \end{cases}$ |     | $\frac{2E\tau}{\pi} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega\tau}{\pi}\right)^2}$ |     |

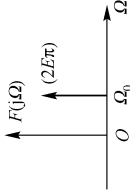
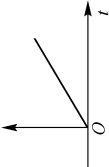
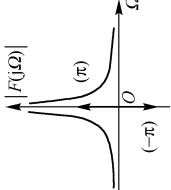
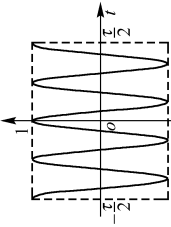
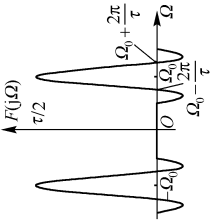
(续表)

| 序号 | 信号名称 | 时间函数 $f(t)$                                                                                           | 波形图                                                                                   | 频谱函数 $F(j\Omega) =  F(j\Omega) e^{j\varphi(\Omega)}$                                                                             | 频谱图                                                                                 |
|----|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 5  | 三角脉冲 | $\begin{cases} E\left(1 - \frac{2 t }{\tau}\right) &  t  < \tau/2 \\ 0 &  t  \geq \tau/2 \end{cases}$ |     | $\frac{E\tau}{2} \text{Sa}^2\left(\frac{\Omega\tau}{4}\right) = \frac{8E}{\Omega^2\tau} \sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{4}\right)$ |    |
| 6  | 抽样脉冲 | $\text{Sa}(\Omega_c t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\Omega_c t}$                                         |    | $\begin{cases} \frac{\pi}{\Omega_c} &  \Omega  < \Omega_c \\ 0 &  \Omega  > \Omega_c \end{cases}$                                |    |
| 7  | 冲激函数 | $E\delta(t)$                                                                                          |    | $E$                                                                                                                              |    |
| 8  | 阶跃函数 | $Eu(t)$                                                                                               |    | $\frac{E}{j\Omega} + \pi E\delta(\Omega)$                                                                                        |    |
| 9  | 符号函数 | $E \text{sgn}(t)$                                                                                     |   | $\frac{2E}{j\Omega}$                                                                                                             |   |
| 10 | 直流信号 | $E$                                                                                                   |  | $2\pi E\delta(\Omega)$                                                                                                           |  |

(续表)

| 序号 | 信号名称   | 时间函数 $f(t)$                                                | 波形图 | 频谱函数 $F(j\Omega) =  F(j\Omega) e^{j\varphi(\Omega)}$                                                                 | 频谱图 |
|----|--------|------------------------------------------------------------|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11 | 冲激序列   | $\delta_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$ |     | $\Omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - n\Omega_1) \quad \Omega_1 = 2\pi/T_1$                              |     |
| 12 | 余弦信号   | $E \cos \Omega_0 t$                                        |     | $E\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)]$                                                        |     |
| 13 | 正弦信号   | $E \sin \Omega_0 t$                                        |     | $jE\pi[\delta(\Omega + \Omega_0) - \delta(\Omega - \Omega_0)]$                                                       |     |
| 14 | 单边余弦信号 | $E \cos \Omega_0 t \cdot u(t)$                             |     | $\frac{E\pi}{2} [\delta(\Omega + \Omega_0) + \delta(\Omega - \Omega_0)] + \frac{j\Omega E}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$   |     |
| 15 | 单边正弦信号 | $E \sin \Omega_0 t \cdot u(t)$                             |     | $\frac{E\pi}{2j} [\delta(\Omega - \Omega_0) - \delta(\Omega + \Omega_0)] + \frac{\Omega_0 E}{\Omega_0^2 - \Omega^2}$ |     |

(续表)

| 序号 | 信号名称   | 时间函数 $f(t)$                                                                                          | 波形图                                                                                 | 频谱函数 $F(j\Omega) =  F(j\Omega) e^{j\varphi(\Omega)}$                                                                    | 频谱图                                                                               |
|----|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 16 | 复指数信号  | $Ee^{j\Omega_0 t}$                                                                                   |                                                                                     | $2\pi E\delta(\Omega - \Omega_0)$                                                                                       |  |
| 17 | 斜变信号   | $tu(t)$                                                                                              |  | $j\pi\delta'(\Omega) - \frac{1}{\Omega^2}$                                                                              |  |
| 18 | 矩形调幅信号 | $\left[ u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \cos \Omega_0 t$ |   | $\left[ \text{Sa}\frac{(\Omega + \Omega_0)\tau}{2} + \text{Sa}\frac{(\Omega - \Omega_0)\tau}{2} \right] \frac{\tau}{2}$ |  |



## 附录 B 劳 斯 准 则

为判断  $H(s)$  的极点位置, 需求解其分母多项式  $A(s)$  之根。此工作往往十分烦琐, 尤其是求高次方程的根更困难。因此, 希望能用一种不需求解方程, 而又能直接判断系统函数  $H(s)$  的极点是否全部位于左半  $s$  平面的方法。

1877 年, 劳斯 (Routh) 首先提出了一种不需求解方程, 就可以判断该方程包含有多少个具有正实部的根的方法。该方法称为劳斯准则。

设  $A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ , 则方程  $A(s) = 0$  的根全部位于左半  $s$  平面的充要条件是:

- (1) 多项式的全部系数  $b_i$  都是正数, 无缺项, 即劳斯准则的必要条件;
- (2) 劳斯阵列中第一列数字符号相同, 即劳斯准则的充分条件。

劳斯阵列的排写规则如下:

$$\begin{array}{llll}
 \text{第 1 行} & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \cdots \\
 \text{第 2 行} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \cdots \\
 \text{第 3 行} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \cdots \\
 \text{第 4 行} & d_{n-1} & d_{n-3} & d_{n-5} \cdots \\
 \text{第 5 行} & e_{n-1} & e_{n-3} & e_{n-5} \cdots \\
 & \vdots & & 
 \end{array}$$

阵列中, 前两行元素直接由  $A(s)$  多项式的系数构成。第 1 行的元素是  $A(s)$  多项式的第 1, 3, 5,  $\cdots$  项的系数。第 2 行的元素是  $A(s)$  多项式的第 2, 4, 6,  $\cdots$  项的系数。第 3 行以后的元素按以下规律计算

$$\begin{aligned}
 c_{n-1} &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad c_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \quad \cdots \\
 d_{n-1} &= -\frac{1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ c_{n-1} & c_{n-3} \end{vmatrix}, \quad d_{n-3} = -\frac{1}{c_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ c_{n-1} & c_{n-5} \end{vmatrix}, \quad \cdots
 \end{aligned}$$

以此类推, 共得  $(n+1)$  行, 且最后两行都只要一个元素。

如果劳斯阵列第 1 列各元素的符号不尽相同, 则符号改变的次数即为方程  $A(s) = 0$  具有正实部 (右半  $s$  平面) 根的数目。

**例 1** 根据劳斯准则判断方程  $2s^4 + s^3 + 12s^2 + 8s + 2 = 0$  是否具有实部为正的根。

**解:** 方程全部系数为正数, 无缺项。排出劳斯阵列为

$$\begin{array}{llll}
 \text{第 1 行} & 2 & 12 & 2 \\
 \text{第 2 行} & 1 & 8 & 0 \\
 \text{第 3 行} & -4 & 2 & 0 \\
 \text{第 4 行} & 8.5 & 0 & 0 \\
 \text{第 5 行} & 2 & 0 & 0
 \end{array}$$

第 6 行 0    0    0

此阵列中，第 1 列数字两次改变符号（从 1 到 -4，又从 -4 到 8.5）。因此，方程有两个具有正实部的根。

**例 2** 已知某系统的系统函数  $H(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1 + k}$ ，为使系统稳定，常数  $k$  应满足什么条件？

**解：**将  $H(s)$  分母多项式排成劳斯阵列

|       |                 |       |
|-------|-----------------|-------|
| 第 1 行 | 1               | 3     |
| 第 2 行 | 3               | $1+k$ |
| 第 3 行 | $\frac{8-k}{3}$ | 0     |
| 第 4 行 | $1+k$           | 0     |

如果系统是稳定的，则系统函数  $H(s)$  的极点应在左半  $s$  平面。根据劳斯准则，以上阵列中第 1 列元素应为正值，则  $\frac{8-k}{3} > 0$ ，即  $k < 8$  和  $1+k > 0$ ，即  $k > -1$ 。所以，当  $-1 < k < 8$  时，系统是稳定的。

在劳斯阵列的排写过程中，可能会遇到以下两种特殊情况，需要做特殊的处理。

(1) 劳斯阵列中出现某一行的第 1 列元素为零，而其余元素又不全为零，这样致使阵列不能继续排写。这时，可以将第 1 列中出现的零用一个无穷小量  $\varepsilon$  来代替，然后继续排写下去。

**例 3** 对方程  $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$  排出劳斯阵列，判断根之性质。

**解：**劳斯阵列如下

|       |                             |    |                                   |
|-------|-----------------------------|----|-----------------------------------|
| 第 1 行 | 1                           | 2  | 3                                 |
| 第 2 行 | 1                           | 2  |                                   |
| 第 3 行 | (0                          | 3) | 此行首项为零，用 $\varepsilon$ 来代替，然后继续排写 |
|       | $\varepsilon$               | 3  |                                   |
| 第 4 行 | $2 - \frac{3}{\varepsilon}$ |    |                                   |
| 第 5 行 | 3                           |    |                                   |

如果  $\varepsilon$  从正值趋于零，则第 4 行第 1 列元素为负，于是全部第 1 列数值将发生两次改变符号，方程有两个正实部的根。若  $\varepsilon$  从负值趋于零，则第 3 行第 1 列元素为负，而第 4 行第 1 列元素为正，导致同样的结论。

(2) 劳斯阵列尚未排写完时，出现一行元素全部为零。这种情况一般出现在连续两行元素的数字相等或成比例时。此时，不必再排阵，可以断言，在虚轴或右半  $s$  平面将出现方程的根。